

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА МЕХАНОДИНАМИКА. КУРС ЛЕКЦИЙ

Учебное пособие

Аннотация. Динамика Ньютона – фундамент всех расчётов механических движений материальных точек и тел, считалась полностью безошибочной. Однако первый её закон, не имея математической модели, сформулирован с нарушением причинно-следственных связей. Суть этого нарушения заключается в том, что причиной любого движения материальной точки или тела является действие силы на них. Но первый закон Ньютона отрицает это. Он сформулирован следующим образом: «материальная точка сохраняет своё состояние покоя или равномерного движения до тех пор, пока приложенные силы не выведут её из этого состояния». Так как тело не может двигаться без действия силы, то возникла необходимость найти причины движения тела в условиях, когда на него, как следует из первого закона Ньютона, не действуют силы. Результат поиска привёл к новой формулировке законов движения материальных точек и тел, которые названы законами механиодинамики. Главная особенность этих законов – прозрачность действия силы инерции на материальную точку или тело при различных видах их движений.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Общие сведения о механодинамике

Понятие «Динамика» родилось давно и уже получило различные приставки, которые ограничивают смысл, заложенный в этом понятии, и таким образом конкретнее отражают суть описываемых явлений и процессов. Например, давно используются понятия «Электродинамика», «Гидродинамика» и «Аэродинамика». В результате возникает необходимость выделить динамику, описывающую только механику твёрдых тел. С учётом этого вводим понятие «Механодинамика», в которое закладывается смысл динамики механических движений твёрдых тел, которые описывались до этого понятием «Динамика».

Механодинамика - раздел теоретической механики, в котором устанавливается и изучается связь между движением материальных точек и тел, и силами, действующими на них.

Основные модели реальных объектов в механодинамике - материальная точка и абсолютно твердое тело. В качестве материальных точек рассматриваются такие реальные объекты, у которых различиями в движении отдельных точек можно пренебречь. Если же этого сделать нельзя, то движение такого объекта рассматривается, как движение твердого тела.

Абсолютно твердое тело - это совокупность материальных точек, расстояния между которыми не меняются со временем. Из этого следует, что материальная точка – частный случай твёрдого тела.

Совокупность материальных тел, в которой они не могут двигаться независимо друг от друга, благодаря связям между ними, называется механической системой.

Законы механодинамики базируются на фундаментальных аксиомах Естествознания: пространство и время абсолютно, пространство, материя и время не разделимы. Достоверность аксиом следует из очевидности их утверждений. Достоверность законов механодинамики, которые базируются на аксиомах, не очевидна и доказывается экспериментальным путём, поэтому законы механодинамики нельзя считать аксиомами, они – постулаты.

1.2.Классификация движений и последовательность решения задач механодинамики

Начало решения любой задачи механодинамики начинается с установления вида и фазы движения материальной точки, твёрдого тела или механической системы. Существуют следующие виды движений материальных точек, твёрдых тел и механических систем: прямолинейное, криволинейное, вращательное, плоскопараллельное и сложное движения. Все виды этих движений имеют фазы. Первая фаза – ускоренное движение, вторая – равномерное движение и третья – замедленное движение. В некоторых случаях движение может состоять из двух фаз: ускоренного и замедленного. Например, тело, брошенное в поле силы тяжести вверх, имеет только две фазы движения: ускоренное и замедленное.

После установления вида движения материальной точки, твёрдого тела или механической системы определяются фазы их движения. При этом надо помнить, что любое движение любого материального объекта начинается с фазы ускоренного движения, поэтому для получения полной достоверной информации о движении любого материального объекта надо начинать с анализа фазы его ускоренного движения. Для этого объект исследования изображается графически, упрощённо и к нему прикладываются векторы всех сил и моментов, действующих на этот объект в фазе его ускоренного движения.

Первыми составляются кинематические уравнения движения объекта в фазе ускоренного движения и при наличии исходных данных определяются скорость и ускорение ускоренно движущегося объекта.

Затем составляются векторные уравнения сил и моментов, приложенных к объекту в фазе его ускоренного движения. Если для решения задачи необходимо иметь проекции сил и моментов на координатные оси, то составляются уравнения сил и моментов, приложенных к объекту в проекциях на оси координат.

После этого начинается определение всех остальных механических показателей, характеризующих ускоренное движение объекта.

На практике часто встречаются задачи с фазой ударного действия силы на объект перед началом его ускоренного движения. Поэтому фаза движения объекта под действием ударной силы также анализируется отдельно.

2. ЗАКОНЫ МЕХАНОДИНАМИКИ

2.1. Основной закон механодинамики

Многовековой опыт использования второго закона Ньютона показал его безупречную достоверность, поэтому у нас есть основания поставить его на первое место и назвать основным законом механодинамики.

Согласно основному закону механодинамики сила \bar{F} , действующая на материальное тело, движущееся с ускорением a , всегда равна массе m тела, умноженной на ускорение и совпадает с направлением ускорения.

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a} \quad (1)$$

Чтобы отличать силу \bar{F} , формирующую ускорение, от других сил, назовём её ньютоновской силой. Она всегда совпадает с направлением ускорения \bar{a} , которое она формирует. Все остальные силы являются силами сопротивления движению и формируют не ускорения, а замедления, которые мы обозначаем символом \bar{b} .

2.2. Главный принцип механодинамики

В 1743 г. Даламбер дополнил основной закон Ньютона своим постулатом: в каждый данный момент времени на движущееся тело действует сила инерции, равная произведению массы тела на ускорение его движения $\bar{F}_i = -m\bar{a}$. Эта сила направлена противоположно ньютоновской силе (1). С тех пор этот постулат начали называть принципом Даламбера. При этом игнорировался тот факт, что ускоренно тело движет только ньютоновская сила $m\bar{a}$, а все остальные силы, в том числе и сила инерции, тормозят движение. Из этого автоматически следует, что модуль силы инерции не равен произведению массы тела на ускорение его движения. Обусловлено это тем, что сила инерции является силой сопротивления ускоренному движению и поэтому наряду с другими силами сопротивления генерирует замедление, а не ускорение. Поскольку ньютоновская сила – единственная движущая сила, то, ускорение, генерируемое ею, должно быть равно сумме замедлений, генерируемых всеми силами, тормозящими ускоренное движение, в том числе и силы инерции.

Изложенное выше следует из эксперимента Галилея, который он провёл в начале 17 века. Суть его показана на рис. 1. Если одному металлическому шару предоставить возможность свободно падать на Землю, а второму – опускаться на парашюте, то шар без парашюта, имея меньшее сопротивление воздуха, будет падать на Землю быстрее шара с парашютом. Сила тяжести $\bar{F} = m\bar{g}$, приложенная к шару, выполняет роль ньютоновской активной силы (рис. 1, а). Поскольку шар опускается ускоренно, то, согласно принципу Даламбера, на него действует сила инерции, направленная противоположно ньютоновской силе и равная $\bar{F}_i = -m\bar{g}$. Кроме этих сил на шар действует ещё сила сопротивления воздуха \bar{P} . Вполне естественно, что у шара с парашютом сила сопротивления воздуха больше и он снижается на Землю медленнее шара без парашюта.

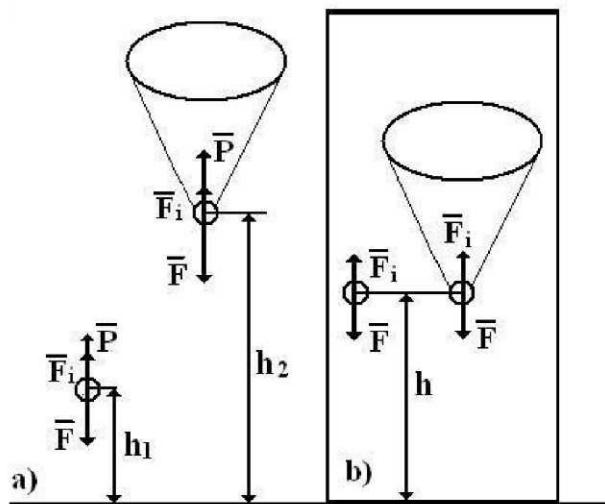


Рис. 1. Современное представление эксперимента Галилея

Итак, сила тяжести $\bar{F} = m\bar{g}$ единственная сила, движущая шар. Движению шара к Земле сопротивляются две силы: сила инерции $\bar{F}_i = -m\bar{g}$ и сила сопротивления воздуха \bar{P} . Согласно принципу Даламбера в каждый данный момент сумма сил, действующих на ускоренно движущееся тело, равна нулю (рис. 1, а), то есть

$$\bar{F} - \bar{F}_i - \bar{P} = 0 \Rightarrow \bar{F} = \bar{F}_i + \bar{P} \Rightarrow m\bar{g} = m\bar{g} + \bar{P}. \quad (2)$$

Странный результат (2). При равенстве ускорений \bar{g} ньютоновской силы $\bar{F} = m\bar{g}$ и силы инерции $\bar{F}_i = -m\bar{g}$ сила сопротивления \bar{P} воздуха, действующего на шар, равна нулю $\bar{P} = 0$. Противоречие очевидное и непонятно почему с ним мирились механики и физики-теоретики более 300 лет. Чтобы устраниТЬ это противоречие, введём понятие замедление движения, обозначим его символом \bar{b} и будем считать, что модули всех сил сопротивления движению равны произведениям массы m материальной точки или тела умноженной на замедление, которые они генерируют. Тогда уравнение (2) запишется так

$$m\bar{g} = m\bar{b}_i + m\bar{b}_p \Rightarrow \bar{g} = \bar{b}_i + \bar{b}_p, \quad (3)$$

где \bar{b}_i - замедление, генерируемое силой инерции; \bar{b}_p - замедление, генерируемое силой сопротивления воздуха.

В общем случае ускорение, генерируемое ньютоновской силой, обозначается символом \bar{a} . Тогда, если на ускоренно движущуюся точку или тело действует несколько сил сопротивления движению, то каждая из них будет генерировать замедление и уравнение (3) принимает вид

$$\bar{a} = \bar{b}_i + \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 + \dots + \bar{b}_n. \quad (4)$$

Таким образом, Даламбер ошибся, утверждая, что сила инерции равна произведению массы материальной точки или тела на ускорение его движения и направлена противоположно действию Ньютоновской силы. Теперь мы видим, что сила инерции при ускоренном движении материальной точки или тела, препятствует их движению и совместно с другими силами сопротивления движению генерирует замедление, которое является частью общей суммы замедлений, генерируемых всеми силами сопротивления движению (4).

А теперь посмотрим на рис. 1, б, где показана суть эксперимента Галилея. Представим, что шар без парашюта и - с парашютом помещены в большой цилиндр, из которого выкачен воздух. Оба они опускаются вниз под действием силы тяжести $\bar{F} = m\bar{g}$. (Массу парашюта не учитываем). Аналогичный эксперимент, выполненный Галилеем более 300 лет назад, показал, что тела разной массы и плотности опускаются вниз в трубке с выкаченным воздухом, с одной и той же скоростью. Удивительный эксперимент. Отсутствие сопротивления воздуха оставляет одну силу сопротивления ускоренному движению шара без парашюта и с парашютом – силу инерции $\bar{F}_i = -m\bar{g}$. Падение происходит потому, что величина силы тяжести \bar{F} в каждый данный момент превышает величину силы инерции \bar{F}_i и процесс падения шара без парашюта и с парашютом описывается неравенством

$$\bar{F} > \bar{F}_i. \quad (5)$$

Когда действие ньютоновской силы прекращается ($F = ma = 0$), то сила инерции \bar{F}_i никуда не исчезает. Она меняет своё направление на противоположное и её действие

обеспечивает равномерное движение тела, как говорят, по инерции. Математическая модель, описывающая это движение, становится такой

$$\bar{F}_i = m \cdot \bar{b}_i > 0. \quad (6)$$

Из этого автоматически следует ошибочность первого закона Ньютона, утверждающего, что сумма сил, действующих на равномерно движущееся тело, равна нулю. Из такого утверждения также сразу следует нарушение принципа причинности. Тело не может двигаться без причины. Оно всегда движется только под действием приложенной силы.

Изложенная информация убедительно доказывает, необходимость признания ошибочности принципа Даламбера и использования **нового главного принципа механодинамики**, который формулируется так: в каждый данный момент времени сумма активных сил, приложенных к телу, и сил сопротивления движению, включая силу инерции, равна нулю. При этом, ньютоновское ускорение всегда равно сумме замедлений, генерируемых силами сопротивления движению, включая и силу инерции.

Изложенная исходная информация о видах движения тел, ньютоновской силе F и силе инерции \bar{F}_i достаточна для понимания законов механодинамики и применения их для решения практических задач.

2.3. Первый закон механодинамики

Более 300 лет считалось, что ньютоновская сила $m\bar{a}$ движет тело, а сумма сил $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ сопротивления препятствует этому движению без участия силы инерции \bar{F}_i , которая также направлена противоположно движению (рис. 2, б). Чтобы убедиться в ошибочности такого подхода к решению задач механодинамики, рассмотрим подробно ускоренное движение центра масс M автомобиля, как материальной точки (рис. 2, б).

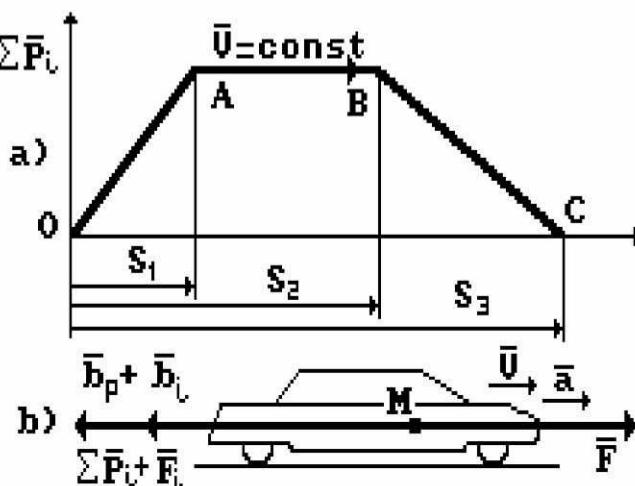


Рис. 2. Схема сил: а) действующих на ускоренно (ОА) движущийся автомобиль (б)

Каждый из нас ездил в автомобиле и знает, что при его ускоренном движении сила инерции прижимает нас к спинке сиденья. Если другой автомобиль ударит наш автомобиль сзади, то ускорение может быть настолько большим, что сила мышц нашего тела и прочность шейного позвоночника окажутся значительно меньше силы инерции, которая увлечёт нашу голову назад. Функции нашего спасения от силы инерции, способной оторвать нам голову, выполняет подголовник. Если же наш автомобиль столкнётся с внезапно возникшим впереди препятствием, то ускорение его движения изменится на противоположное, направленное против движения автомобиля, а сила инерции окажется направленной в

сторону движения автомобиля. Чтобы эта сила не выбросила нас вперёд через лобовое стекло автомобиля, мы пристёгиваемся ремнями.

Итак, достоверность описанного процесса появления и изменения направления силы инерции доказана миллионами жизней пассажиров, погибших в автоавариях за время использования автомобилей, а физики и механики – теоретики продолжают игнорировать это, считая, что сила инерции \bar{F}_i не входит в число сил сопротивления движению $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$, действующих на тело при его ускоренном или замедленном движении. Исправим их ошибку.

При ускоренном движении автомобиля (рис. 2, б) на него действует ньютоновская сила \bar{F} , генерируемая его двигателем; сила инерции \bar{F}_i , направленная противоположно ускорению \bar{a} автомобиля и поэтому тормозящая его движение; суммарная сила всех внешних сопротивлений $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$, которая также направлена противоположно движению автомобиля. В результате, согласно новому принципу механодинамики, имеем неоспоримое уравнение сил, действующих на ускоренно движущийся автомобиль (рис. 2, б)

$$\bar{F} = \bar{F}_i + \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \Rightarrow \bar{F} - \bar{F}_i - \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = 0. \quad (7)$$

Это и есть **первый закон механодинамики**. Он гласит: **ускоренное движение тела происходит под действием ньютоновской активной силы \bar{F} и сил сопротивления движению в виде силы инерции \bar{F}_i , и механических сил сопротивления $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$, сумма которых в любой момент времени равна нулю.**

Из нового принципа механодинамики следует, что ньютоновская сила \bar{F} совпадает с направлением ускорения \bar{a} , а силы, тормозящие движение и, таким образом, генерирующие замедление, совпадают с направлениями замедлений \bar{b} , формируемых ими (рис. 2, б). Обозначая замедление, принадлежащее силе инерции, через \bar{b}_i , а замедление, генерируемое силами механических сопротивлений $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$, через \bar{b}_p , перепишем уравнение (7) таким образом

$$m \cdot \bar{a} = m \cdot \bar{b}_i + \sum_{i=1}^n \bar{P}_i. \quad (8)$$

Нетрудно видеть, что при полном отсутствии механических сил сопротивления $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i = 0$ (в космосе, например) сила инерции $\bar{F}_i = m \cdot \bar{b}_i$ равна ньютоновской силе $\bar{F} = m \cdot \bar{a}$, но тело движется. Это возможно только при условии, когда ньютоновская сила больше силы инерции, поэтому математическая модель, описывающая движение тела в космосе, должна представляться в виде неравенства

$$\bar{F} \geq \bar{F}_i \Rightarrow m\bar{a} \geq m\bar{b}_i, \quad (9)$$

или

$$\bar{a} \geq \bar{b}_i. \quad (10)$$

Это и есть условие ускоренного движения тела в космосе при отсутствии сопротивлений. Из этого следует, что истинное инерциальное замедление \bar{b}_i тела можно определить в условиях, когда нет внешних сопротивлений. Вполне естественно, что специалисты

по космической технике владеют методами таких определений и имеют экспериментальную информацию об этом.

Таким образом, величина полного ускорения \bar{a} тела, движущегося ускоренно, равна сумме замедлений, генерируемых силами сопротивления движению

$$\bar{a} = \bar{b}_i + \bar{b}_p \quad (11)$$

В старой динамике считалось, что сила инерции \bar{F}_i , которая также препятствует ускоренному движению тела, не входит в сумму всех сил сопротивлений $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$. Это и есть главная фундаментальная ошибка ньютоновской динамики, которая оставалась незамеченной 322 года. Сила инерции автоматически входила в суммарную силу механических сопротивлений $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$, но все считали, что её там нет. В результате все экспериментальные коэффициенты механических сопротивлений движению тел оказываются ошибочными.

Из уравнений (8) следует, что сила инерции \bar{F}_i , действующая на автомобиль при его ускоренном движении, равна

$$\bar{F}_i = m\bar{b}_i = m\bar{a} - \sum_{i=1}^n \bar{P}_i, \quad (12)$$

а скалярная величина инерциального замедления \bar{b}_i определяется по формуле

$$b_i = a - \frac{\sum_{i=1}^n \bar{P}_i}{m}. \quad (13)$$

Величина полного ньютоновского ускорения a определяется из кинематического уравнения ускоренного движения тела

$$V = V_0 + at. \quad (14)$$

Если начальная скорость автомобиля $V_0 = 0$, то полное ускорение a равно скорости V автомобиля в момент перехода его от ускоренного к равномерному движению, делённому на время t ускоренного движения

$$a = V/t. \quad (15)$$

В принципе, при решении задач, можно принимать величину скорости V , равной величине постоянной скорости ($V = const$) тела при его равномерном движении, наступившем после ускоренного движения. Сумма сил $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ сопротивлений – **величина экспериментальная**, которую следует определять только при равномерном движении, чтобы исключить из неё силу инерции.

Таким образом, имеются все данные необходимые для определения инерциального замедления \bar{b}_i и расчёта силы инерции \bar{F}_i по формуле (12). Из неё следует, что инерциальное замедление \bar{b}_i зависит от сопротивления среды $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ (13).

Если определяются силы сопротивления движению тела, то делать это надо только при его равномерном движении. Если же сумму сил $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ сопротивления движению тела определять при его ускоренном движении, то, в соответствии с формулой (7), сила инер-

ции \bar{F}_i , препятствующая ускоренному движению тела, автоматически войдёт в сумму сил $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ сопротивлений движению и результат определения сил сопротивлений будет полностью ошибочен.

2.4. Второй закон механодинамики

Когда автомобиль начинает двигаться равномерно (рис. 3, б), то сила инерции \bar{F}_i автоматически изменяет своё направление на противоположное и уравнение суммы сил (7), действующих на автомобиль, становится таким

$$\bar{F}_K + \bar{F}_i = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i . \quad (16)$$

Это и есть **второй закон механодинамики** – закон равномерного прямолинейного движения тела (бывший первый закон ньютоновской динамики). Он гласит: **равномерное движение тела при отсутствии сопротивлений** (рис. 3, а, интервал АВ) происходит под действием силы инерции \bar{F}_i (в космосе, например). **Равномерное движение тела при наличии сопротивлений** также происходит под действием силы инерции \bar{F}_i , а постоянная активная сила \bar{F}_K преодолевает силы сопротивления движению $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ (рис. 3, б).

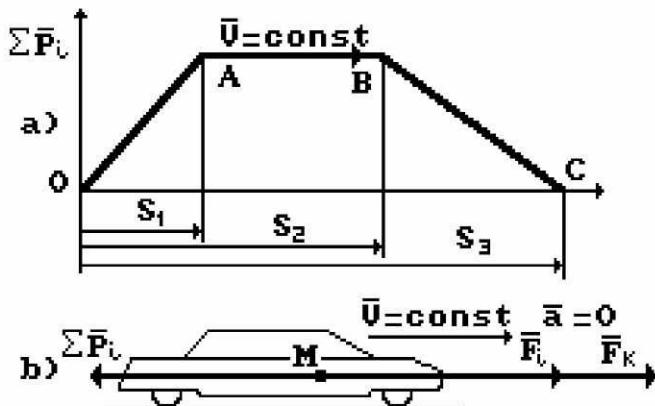


Рис. 3. Схема сил, действующих на равномерно движущийся автомобиль

Таким образом, суть второго закона механодинамики заключается в том, что равномерное движение автомобиля (тела) обеспечивает сила инерции \bar{F}_i , а постоянная сила \bar{F}_K , генерируемая двигателем автомобиля, преодолевает все внешние сопротивления $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$. Сила \bar{F}_K постоянна потому, что автомобиль движется равномерно и его ускорение равно нулю $\bar{a} = 0$.

В космосе, где нет механических сопротивлений движению, не требуется постоянная сила для их преодоления. Поэтому в космосе при переходе тела от ускоренного к равномерному движению, сила инерции меняет своё направление на противоположное и таким образом обеспечивает его равномерное прямолинейное движение с постоянной скоростью $V = const$ (рис. 3, интервал АВ).

А теперь обращаем внимание ещё раз на главную многовековую ошибку механиков. Для этого перепишем уравнение (16) так

$$\bar{F}_K + \bar{F}_i \geq \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \Rightarrow \bar{F}_K + \bar{F}_i - \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = 0 , \quad (17)$$

Это и есть математическая модель второго закона механодинамики (бывшего первого закона динамики). Более 300 лет не было математической модели для описания равномерного движения тела. Теперь она есть (16), (17) и мы можем успокоить пилотов. Равномерный полёт их самолёта описывает новый второй закон механодинамики (16). Согласно этому закону сумма сил, действующих на равномерно летящий самолет, не равна нулю (17). Сила, движущая самолёт равномерно, является силой инерции, которая была направлена противоположно его движению, когда он двигался ускоренно (взлетал). Как только самолёт начинает лететь равномерно, то сила инерции изменяет своё направление на противоположное и совпадает с силой, создаваемой двигателями самолёта. В результате сила инерции начинает обеспечивать равномерный полёт самолёта, а силы двигателей самолёта - преодолевать силы сопротивления его полёту. Таким образом, равномерный полёт самолёта управляется новым вторым законом механодинамики (16), согласно которому сумма сил, действующих на него, не равна нулю (17).

2.5. Третий закон механодинамики

Если выключить коробку передач автомобиля, движущегося равномерно (17), то активная сила \bar{F}_k исчезнет (рис. 3, б) и останутся две противоположно направленные силы: сила инерции \bar{F}_i и сумма сил механических сопротивлений движению $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ (рис. 4, б). Поскольку сила инерции не имеет источника, поддерживающего её в постоянном состоянии, то она оказывается меньше сил сопротивления движению ($\bar{F}_i < \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$) и автомобиль, начиная двигаться замедленно (рис. 4, б), останавливается (рис. 4, а, точка С). С учётом этого есть основания назвать силу инерции пассивной силой, которая не может генерировать ускорение, так как сама является следствием его появления.

Таким образом, надо чётко представлять направленность сил, действующих на автомобиль, при переходе его от равномерного движения к замедленному. Первичная сила инерции \bar{F}_i (рис. 4, б) не меняет своего направления, а появившееся замедление \bar{b}_p , генерируемое силами сопротивления движению, оказывается направленным противоположно силе инерции.

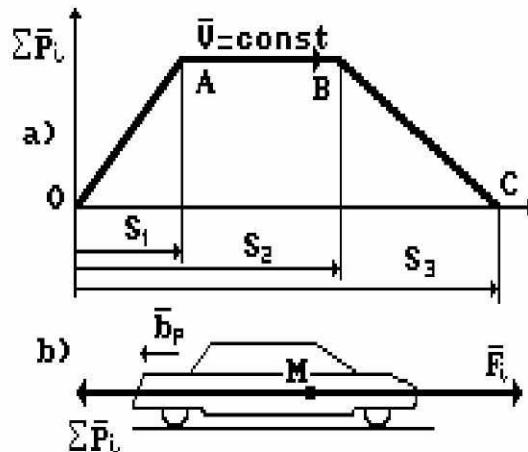


Рис. 4. Схема сил, действующих на замедленно движущийся автомобиль

Таким образом, если автомобиль переходит от равномерного движения к замедленному, то прежняя сила инерции \bar{F}_i и силы сопротивления движению $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ не меняют сво-

их направлений. Сила инерции не генерирует ускорение, а неравномерность сил сопротивления приводит к постепенному уменьшению силы инерции \bar{F}_i и тело останавливается.

$$\sum_{i=1}^n \bar{P}_i > \bar{F}_i. \quad (18)$$

Это и есть математическая модель **3-го ЗАКОНА механодинамики**. Он гласит: **замедленное движение твёрдого тела управляет превышением сил сопротивления движению над силой инерции**.

Обратим внимание на то, что расстояние S_1 движения автомобиля с ускорением меньше расстояния движения с замедлением $S_3 - S_2$ (рис. 4, а). Обусловлено это тем, что на участке S_1 величина сил сопротивлений $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ при разгоне автомобиля больше сил сопротивлений при замедленном движении за счёт того, что при замедленном движении выключен двигатель и коробка передач. Это - главная причина экономии топлива при езде с периодическим выключением передачи.

2.6. Четвёртый закон механодинамики

4-й ЗАКОН механодинамики (равенство действия противодействию). **Силы, с которыми действуют друг на друга два тела (рис. 5), всегда равны по модулю и направлены по прямой, соединяющей центры масс этих тел, в противоположные стороны.**

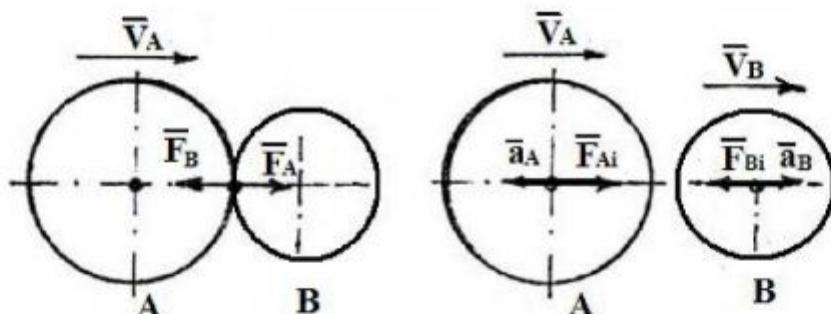


Рис. 5. Схема контактного взаимодействия двух тел

Поскольку $\bar{F}_B = -\bar{F}_A$, то $m_B \cdot \bar{a}_B = -m_A \cdot \bar{a}_A$ или

$$\frac{\bar{a}_B}{\bar{a}_A} = \frac{m_A}{m_B}. \quad (19).$$

То есть ускорения, которые сообщают друг другу два тела, обратно пропорциональны их массам. Эти ускорения направлены вдоль одной прямой в противоположные стороны. Следует особо отметить, что четвёртый закон механодинамики отражает взаимодействие тел, как на расстоянии, так при непосредственном контакте (рис. 5). На рис. 5 показано, что в момент контакта тел А и В силы \bar{F}_A и \bar{F}_B их взаимодействия равны по величине и противоположны по направлению. При этом обе силы \bar{F}_A и \bar{F}_B являются силами внешнего воздействия и появляются одновременно. Силы инерции \bar{F}_{Ai} и \bar{F}_{Bi} также равны по величине и противоположны по направлению.

2.7. Пятый закон механодинамики

5-Й ЗАКОН механодинамики (независимость действия сил). При одновременном действии на тело или точку нескольких сил сопротивления движению $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$ ньютоновское ускорение \bar{a} материальной точки или тела оказывается равным геометрической сумме замедлений, приходящихся на долю каждой из сил сопротивления движению $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$. Учитывая, что в уравнении (11) \bar{b}_p - геометрическая сумма замедлений, приходящихся на долю всех сил сопротивлений $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3, \dots, \bar{P}_n$, кроме силы инерции \bar{F}_i , то есть $\bar{b}_p = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 + \dots + \bar{b}_n$. Тогда уравнение (11) записывается так

$$\bar{a} = \bar{b}_i + \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{b}_3 + \dots + \bar{b}_n \quad (20)$$

Это - математическая модель **5-го ЗАКОНА механодинамики**. Он гласит: **при ускоренном движении твердого тела ньютоновское ускорение, формируемое ньютоновской силой, равно сумме замедлений, формируемых всеми силами сопротивлений движению, в том числе и силы инерции.**

Если тело падает в поле силы тяжести Земли, то

$$\bar{F} = m \cdot \bar{g} \Rightarrow m = F / g . \quad (21)$$

Масса материального тела равна его весу F , деленному на ускорение свободного падения g в данном месте земной поверхности.

В качестве единицы измерения силы в системе единиц СИ принят Ньютон (Н). Один Ньютон - сила, сообщающая массе в 1 кг ускорение $1 \text{м}/\text{с}^2$.

В технической системе единиц в качестве единицы измерения силы принят 1 кГ, а массы - $1 \text{кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$. Поскольку $F = mg$, то $1 \text{кг} = 1 \cdot 9,81 \text{Н}$ или $1 \text{Н} = 0,102 \text{кг}$. [1]

Новые знания по механодинамике позволяют точно определить силы сопротивления движению любого тела. Метод определения этих сил следует из формул (17). Если определяются силы сопротивления движению автомобиля экспериментально, то надо выбрать прямолинейный горизонтальный участок дороги, проехать по нему заданное расстояние с заданной постоянной скоростью и измерить расход топлива. Энергия этого топлива будет равна работе силы \bar{F}_k на зафиксированном участке дороги, которая противодействует всем силам сопротивления движению $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$. Из этого следует, что сила \bar{F}_k равна сумме сил $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$.

Если же подобный эксперимент проводить при ускоренном движении автомобиля, то, в соответствии с формулой (7), сила инерции \bar{F}_i , препятствующая ускоренному движению автомобиля, автоматически войдёт в сумму сил $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ сопротивлений и результат определения сил сопротивлений будет полностью ошибочен.

Ньютоновская или движущая сила определится по второму закону Ньютона

$$F = m \cdot \frac{dV}{dt} = m \cdot a . \quad (22)$$

Ньютоновское ускорение a удобнее определять в этом случае по формуле (15), а инерциальную составляющую b , замедления – по формуле (13). Сила инерции определяется по формуле (12).

ВЫВОДЫ

1. Все виды движений материальных объектов имеют минимум две фазы движений: ускоренную и замедленную фазу.
2. В Природе и человеческой практике чаще встречаются три фазы движения материальных объектов: ускоренная, равномерная и замедленная.
3. В ускоренной фазе движения материального объекта, сила инерции препятствует его движению.
4. В фазе равномерного движения сила инерции направлена в сторону движения и является силой, способствующей равномерному движению объекта.
5. В фазе замедленного движения сила инерции, является главной силой, движущей объект, который постепенно останавливается, так как силы сопротивления движению больше силы инерции.
6. Невозможно составить единую математическую модель, описывающую одновременно все три фазы движения материального объекта.
7. Современный уровень знаний позволяет корректно описать все три фазы движения материального объекта только порознь.

3. МЕХАНОДИНАМИКА КРИВОЛИНЕЙНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

3.1. Механодинамика ускоренного криволинейного движения точки

Криволинейное движение точки описывается обычно в естественной системе координат, имеющей нормальную ось $O\bar{n}$, касательную ось $O\bar{\tau}$ и бинормаль \bar{ob} (рис. 7). При этом плоскость $O\bar{n}\bar{\tau}$ называется соприкасающейся плоскостью. Ось \bar{ob} перпендикулярна соприкасающейся плоскости. Скорость \bar{v} точки направлена в сторону движения.

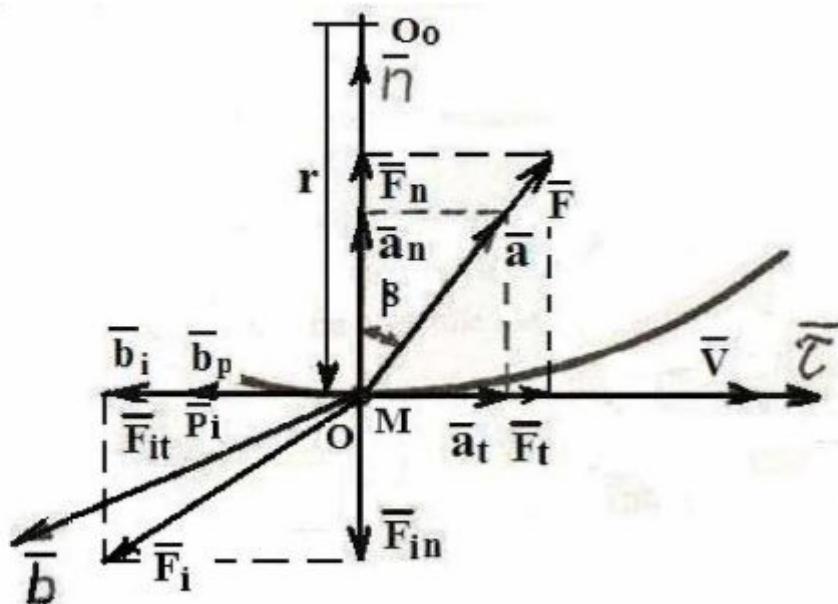


Рис. 7. Схема сил, действующих на материальную точку, движущуюся криволинейно и ускоренно

Обратим особое внимание на то, что направления сил, действующих на тело или точку, движущиеся криволинейно (рис. 7) и направления ускорений, генерируемых приложенными силами, зависят от наличия или отсутствия связей и их реакций. Роль связи может выполнять нить, направленная к центру кривизны траектории вдоль нормальной оси O_n , или реакция внешней среды, действующей на точку или тело и таким образом искривляющая её траекторию. Роль такой среды может выполнять воздух, действующий, например, на самолет или воду, действующая на объект, движущийся в воде или по её поверхности.

Отсутствие реакций связей, действующих на криволинейно движущуюся точку или тело или прекращение их действия (обрыв нити) автоматически меняет схему сил, приложенных к такой точке или телу и, как следствие, схему ускорений и замедлений. Поэтому, рассматривая криволинейное движение точки или тела, обязательно надо учитывать наличие связей и их реакций.

Рассмотрим вначале ускоренное криволинейное движение точки при наличии связей и их реакций. Поскольку движение криволинейное, то при наличии связей нормальная составляющая \bar{a}_n полного ускорения \bar{a} всегда направлена в сторону вогнутости кривой (рис. 7). Направление касательной составляющей \bar{a}_t полного ускорения \bar{a} зависит от характера криволинейного движения. Если оно ускоренное, то направления касательного ускорения \bar{a}_t и вектора скорости \bar{V} совпадают (рис. 7).

При ускоренном криволинейном движении на материальную точку действует ньютоновская (движущая сила) \bar{F}_t , сумма сил сопротивления $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$, направленная противоположно движению, касательная \bar{F}_{it} и нормальная \bar{F}_{in} составляющие полной силы инерции \bar{F}_i .

Вектор ньютоновской силы \bar{F} направлен вдоль вектора полного ускорения \bar{a} в сторону вогнутости кривой. Он раскладывается на две составляющие: нормальную \bar{F}_n и касательную \bar{F}_t . Поскольку касательная сила инерции \bar{F}_{it} направлена противоположно ускорению \bar{a}_t и генерирует замедление \bar{b}_t , то нормальная составляющая \bar{F}_{in} силы инерции всегда направлена от центра кривизны траектории вдоль радиуса кривизны. Таким образом, уравнение сил, действующих на материальную точку вдоль касательной к криволинейной траектории, запишется так

$$\bar{F}_t \geq \bar{F}_{it} + \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i \Rightarrow \bar{F}_t - \bar{F}_{it} - \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i = 0 \quad (23)$$

или

$$m \cdot \bar{a}_t = m \cdot \bar{b}_t + \sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i . \quad (24)$$

Как видно, уравнения (23) и (24) аналогичны уравнениям сил (7) и (8), действующих на ускоренно движущееся тело при прямолинейном движении. Для решения этого уравнения необходимо знать ускорение \bar{a}_t и замедление \bar{b}_t . Чтобы определить их надо знать, прежде всего, уравнение движения точки. В рассматриваемом случае оно задаётся в естественной форме

$$S = S(t) . \quad (25)$$

Зная уравнение движения точки (25), находим её скорость

$$V = \frac{ds}{dt} \quad (26)$$

и касательное ускорение

$$\bar{a}_t = \frac{dV}{dt}. \quad (27)$$

Модуль нормального ускорения \bar{a}_n определяется по формуле

$$a_n = \frac{V^2}{r}, \quad (28)$$

где r - радиус кривизны траектории.

Модуль инерциального замедления \bar{b}_i можно определить только в том случае, когда будет известна сумма сил сопротивлений $\sum_{i=1}^n P_i$, действующих на точку. Величина $\sum_{i=1}^n P_i$ определяется экспериментально. Зная её, находим замедление \bar{b}_i , формируемое касательной составляющей \bar{F}_{it} силы инерции (рис. 7).

$$b_i = a_t - \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{m}. \quad (29)$$

Из этого уравнения следует, что замедление \bar{b}_p , приходящееся на долю сил сопротивления $\sum_{i=1}^n P_i$, равно

$$b_p = \frac{\sum_{i=1}^n P_i}{m} \quad (30)$$

или

$$b_p = a_t - b_i. \quad (31)$$

Таким образом, новые законы механодинамики позволяют корректно описать процесс криволинейного ускоренного движения материальной точки. Приступим к описанию равномерного криволинейного движения точки.

3.2. Механодинамика равномерного криволинейного движения точки

При равномерном криволинейном движении точки касательное ускорение \bar{a}_t равно нулю, но касательная сила инерции \bar{F}_{it} , действовавшая на точку в период, когда она двигалась ускоренно перед переходом к равномерному движению, никуда не исчезает. Она изменяет своё направление на противоположное (рис. 8). В результате сумма касательных сил, действующих на материальную точку, запишется так

$$\bar{F}_{tk} + \bar{F}_{it} \geq \sum_{i=1}^n P_i \Rightarrow \bar{F}_{tk} + \bar{F}_{it} - \sum_{i=1}^n P_i = 0. \quad (32)$$

Напомним, что сумма сил сопротивлений $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$ движению точки – величина экспериментальная. Так как скорость криволинейного движения точки в этом случае – величина постоянная $V = \text{const}$, то касательная составляющая её полного ускорения \bar{a} равна нулю $\bar{a}_t = 0$ и остаётся одно нормальное ускорение \bar{a}_n , и противоположно направленная центробежная сила инерции \bar{F}_{in} (рис. 8).

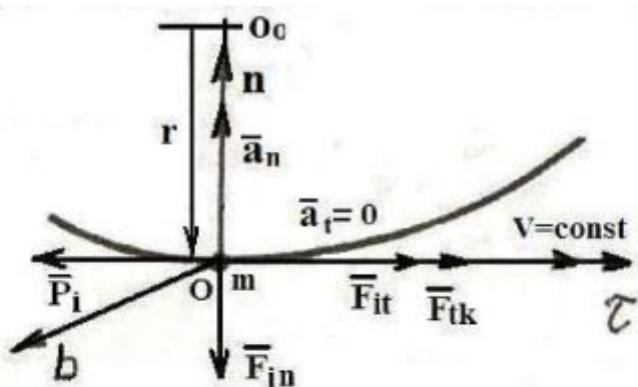


Рис. 8. Схема сил, действующих на материальную точку при равномерном криволинейном движении

Физическая суть уравнения (32) заключается в следующем. Движущая касательная сила \bar{F}_{tk} преодолевает все сопротивления движению $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$, а сила инерции \bar{F}_{it} движет точку равномерно. Таким образом, имеется вся информация, необходимая для определения сил, действующих на материальную точку, движущуюся криволинейно и равномерно.

3.3. Механодинамика замедленного криволинейного движения точки

При переходе материальной точки от равномерного к замедленному криволинейному движению касательная составляющая \bar{F}_{tk} движущей силы исчезает. Остаётся касательная составляющая \bar{F}_{it} силы инерции и сумма сил $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$ сопротивлений движению, которая генерирует замедление \bar{b}_p (рис. 9).

Поскольку сумма сил $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$ сопротивления движению больше касательной силы инерции \bar{F}_{it} , которая не генерирует ускорение, то и замедление \bar{b}_p , соответствующее силе $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_i$ и совпадающее с её направлением, формирует вместе с нормальной составляющей ускорения \bar{a}_n полное замедление \bar{b} , направленное с левой стороны нормальной оси ON (рис. 9). Однаковая размерность ускорения \bar{a}_n и замедления \bar{b}_p даёт нам право складывать их геометрически (рис. 9).

При переходе точки к замедленному движению сумма сил сопротивления движению $\sum_{i=1}^{i=n} \bar{P}_{ci}$ оказывается больше силы инерции \bar{F}_{it} и движение точки постепенно замедляется.

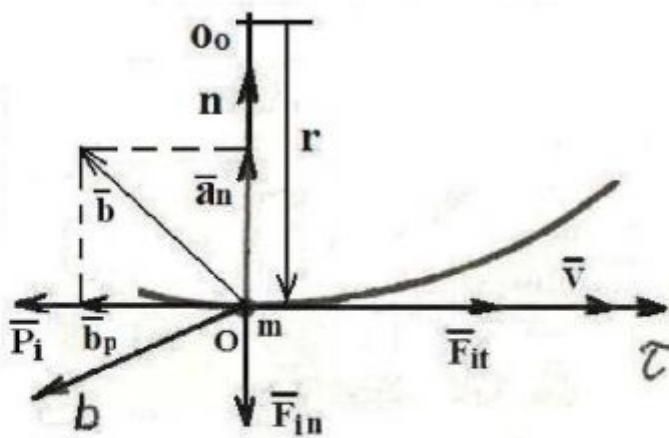


Рис. 9. Схема сил, действующих на точку при её криволинейном замедленном движении

Новые знания по механодинамике позволяют точно определить силы сопротивления движению любого тела. Метод определения этих сил следует из формулы (32). Если определяются силы сопротивления движению точки, то делать это надо только при её равномерном движении. Если же сумму сил $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ сопротивления движению точки определять при её ускоренном движении, то, в соответствии с формулами (23) и (32), сила инерции \bar{F}_{it} , препятствующая ускоренному движению точки, автоматически войдёт в сумму сил $\sum_{i=1}^n \bar{P}_i$ сопротивления движению и результат определения сил сопротивлений будет полностью ошибочен.

Ньютона или движущая сила при криволинейном движении определяются по основному закону Ньютона

$$F = m \cdot \frac{dV}{dt} = m \cdot a . \quad (33)$$

Полное ньютоновское ускорение a , связано с её нормальной \bar{a}_n и касательной \bar{a}_t составляющими простой зависимостью

$$a = \sqrt{\bar{a}_n^2 + \bar{a}_t^2} , \quad (34)$$

поэтому, если известны проекции \bar{a}_n и \bar{a}_t ускорения, то это позволяет определить полное ускорение a .

Отметим, что если радиус кривизны траектории движения точки постоянен $r = const$, то всё описанное относится и к движению точки по окружности.

4. СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Из кинематики известно, что в общем случае абсолютное ускорение точки равно (рис. 10)

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_k , \quad (35)$$

где $\bar{a}_e, \bar{a}_r, \bar{a}_k$ - переносное, относительное и кориолисово ускорения точки М соответственно (рис. 10).

Однако, надо иметь в виду, что кинематическое уравнение (35) получено без учета массы точки и сил, действующих на неё, поэтому при рассмотрении механодинамики

сложного движения точки, это уравнение (35) становится неполным, так как не учитывает замедления, генерируемые силами инерции.

С учетом изложенного необходимо к ускорениям, действующим на точку при её сложном движении, добавить замедления движения точки, которые будут формироваться силами инерции. Замедления, \bar{b} также как и ускорения, - величины векторные.

Переносное ускорение \bar{a}_e будет формировать переносную силу инерции \bar{F}_{ie} , которая будет замедлять движение точки в её переносном движении. Обозначим это замедление так \bar{b}_{ie} .

Относительное ускорение \bar{a}_r будет формировать относительную силу инерции \bar{F}_{ir} . Она тоже будет замедлять относительное движение точки. Обозначим это замедление символом \bar{b}_{ir} .

Так как кориолисова сила F_{ik} имеет инерциальную природу, то она тоже формирует замедление \bar{b}_{ik} , направление которого совпадает с направлением вектора кориолисовой силы. Из этого следует ошибочность существовавшего до этого представления о том, что кориолисова сила инерции F_{ik} равна произведению массы точки на кориолисово ускорение \bar{a}_k и направлена противоположно этому ускорению. Из изложенного следует, что кориолисово ускорение \bar{a}_k и кориолисово замедление \bar{b}_{ik} направлены в противоположные стороны.

Кроме перечисленных сил, на точку в сложном движении действуют силы сопротивления, которые также формируют замедление её движения. Обозначим результирующую этих сил так \bar{P}_c , а результирующее замедление, формируемое силами сопротивления, через \bar{b}_c . Тогда уравнение ускорений и замедлений, действующих на материальную точку в её сложном движении, в общем виде запишется так

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{b}_{ie} + \bar{a}_r + \bar{b}_{ir} + \bar{b}_{ik} + \bar{b}_c . \quad (36)$$

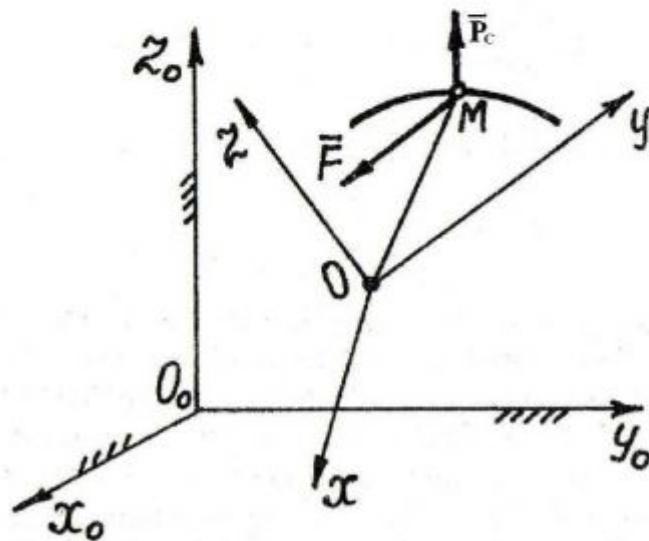


Рис. 10. Схема к анализу сложного движения точки

Уравнение сил, действующих на материальную точку в её сложном движении, принимает вид

$$m\bar{a} = m\bar{a}_e + m\bar{b}_{ie} + m\bar{a}_r + m\bar{b}_{ir} + m\bar{b}_{ik} + m\bar{b}_c . \quad (37)$$

Из этого следует

$$\bar{F} = \bar{F}_e + \bar{F}_{ie} + \bar{F}_r + \bar{F}_{ir} + \bar{F}_{ik} + \bar{P}_c. \quad (38)$$

Тогда общее уравнение механодинамики **относительного** движения материальной точки становится таким

$$\bar{F}_r = m \cdot \bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_e + \bar{F}_{ie} + \bar{F}_{ir} + \bar{F}_{ik} + \bar{P}_c. \quad (39)$$

Итак, общие уравнения сил, действующих на материальную точку при её сложном (38) и относительном (39) движении, составлены. Учитывая, что проекции относительного ускорения \bar{a}_r точки на подвижные оси координат равны:

$$a_{rx} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_{ry} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_{rz} = \frac{d^2 z}{dt^2} \quad (40)$$

и проектируя векторное уравнение (39) на эти оси, имеем:

$$m \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} = F_x + F_{ex} + F_{iex} + F_{irx} + F_{ikx} + P_{cx}; \quad (41)$$

$$m \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = F_y + F_{ey} + F_{iey} + F_{iry} + F_{iky} + P_{cy}; \quad (42)$$

$$m \cdot \frac{d^2 z}{dt^2} = F_z + F_{ez} + F_{iez} + F_{irz} + F_{ikz} + P_{cz}. \quad (43)$$

Это дифференциальные уравнения относительного движения материальной точки в координатной форме.

Следующий этап – использование этого уравнения для частных случаев относительного движения материальной точки. Таких случаев может быть несколько, но мы не будем составлять уравнения для каждого из них, а лишь перечислим эти случаи.

- 1-ускоренные переносное и относительное движение точки;
- 2-ускоренное переносное и равномерное относительное движение точки;
- 3-ускоренное переносное и замедленное относительное движение материальной точки;
- 4-равномерное переносное движение и ускоренное относительное движение материальной точки;
- 5-равномерное переносное и равномерное относительное движение материальной точки;
- 6-равномерное переносное и замедленное относительное движение материальной точки;
- 7-замедленное переносное движение и ускоренное относительное движение материальной точки;
- 8-замедленное переносное и равномерное относительное движение материальной точки;
- 9-замедленное переносное и замедленное относительное движение материальной точки.

Кроме этого подвижная система отсчёта может двигаться поступательно или криволинейно. Каждый из указанных случаев описывается отдельным уравнением:

- 1- подвижная система XOY движется поступательно. В этом случае $a_k = 0$ и $F_{ik} = 0$, поэтому в общем виде имеем

$$\bar{F}_r = m \cdot \bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_e + \bar{F}_{ie} + \bar{F}_{ir} + \bar{P}_c. \quad (44)$$

2) подвижная система ХОY движется поступательно, прямолинейно и равномерно. В этом случае: $b_{ik} = 0; a_e = 0$ и $\bar{F}_{ik} = 0; \bar{F}_e = 0$, поэтому

$$\bar{F}_r = m \cdot \bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_{ie} + \bar{F}_{ir} + \bar{P}_c ; \quad (45)$$

3) если точка под действием приложенных к ней сил находится в покое относительно подвижной системы отсчета, то, очевидно, что $V_r = 0; a_r = 0; a_k = 0$, поэтому

$$\bar{F} + \bar{F}_{ie} + \bar{P}_c = 0 ; \quad (46)$$

Пример - 1. Составить уравнения сил, действующих на ползун, движущийся по вращающемуся стержню в горизонтальной плоскости так, как показано на схеме (рис. 11).

Решение. Прежде чем приступить к схематическому показу сил, действующих на ползун (рис. 11), обратим внимание на связь между вращательным (переносным) движением и линейным (относительным) движением ползуна вдоль стержня. Совокупность этих движений значительно отличается от перемещения, например, пассажира вдоль движущегося трамвая. Пассажир может менять свою относительную скорость V_r произвольно, а ползун лишён такой возможности. Его переносная V_e и относительная V_r скорости также связаны друг с другом. Такая же связь и у сил, действующих на ползун. Поэтому, составляя схему сил, действующих на ползун, обязательно надо учитывать указанную взаимосвязь между его переносным и относительным движениями (рис. 11).

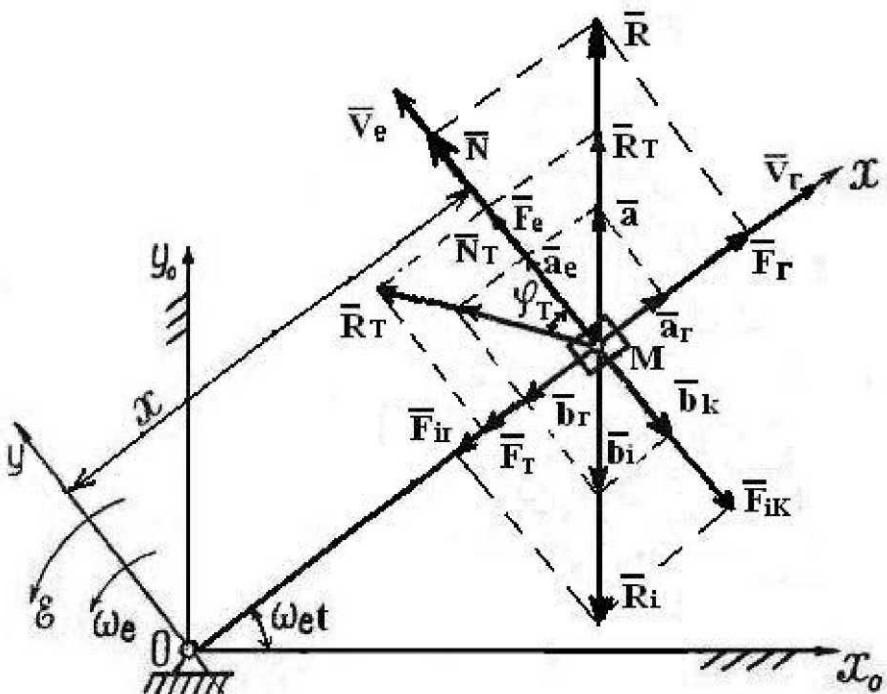


Рис. 11. Схема сил, действующих на ползун М

С учётом изложенного, тщательный анализ процесса движения ползуна (рис. 11) показывает, что на него действуют следующие силы: переносная сила \bar{F}_e , вектор которой направлен по нормали к стержню в сторону движения и равен нормальной реакции \bar{N} стержня на ползун; сила трения \bar{F}_T направлена противоположно движению ползуна относительно стержня и связана с нормальной реакцией \bar{N} через угол трения φ_T и коэффици-

ент трения f ($F_t = fN$). Результирующая сила \bar{R}_t силы трения \bar{F}_t и нормальной реакции \bar{N} образуют угол трения φ_t .

Известно, что ползун начнёт ускоренное движение вдоль стержня (вдоль оси ox) лишь тогда, когда вектор результирующей силы \bar{R}_t отклонится от нормали \bar{N} на угол немного больший угла трения φ_t в сторону относительного движения ползуна. Превышение угла отклонения результирующей \bar{R}_t от угла трения φ_t (рис. 11) настолько незначительно, что отклонение результирующей \bar{R}_t от нормали \bar{N} в момент начала ускоренного движения ползуна можно принимать равным углу трения φ_t . Направление абсолютного ускорения \bar{a} , совпадает с направлением вектора результирующей силы \bar{R}_t .

Вторая составляющая результирующей силы \bar{R}_t , направленная вдоль оси OX , является относительной силой F_r . Эта сила генерирует ускорение $a_c = \omega_e^2 x = a_r$. До нашего анализа считалось, что вектор этого ускорения направлен к центру вращения. Поскольку F_r движущая сила, то вектор ускорения $\bar{a}_c = \bar{a}_r$ этой силы совпадает с направлением её действия, то есть вектор ускорения $\bar{a}_c = \bar{a}_r$ в данном конкретном случае направлен от центра вращения, а не к центру, как считалось до сих пор, поэтому у нас есть основания назвать его центробежным ускорением.

Обращаем внимание на то, что если ползун будет жёстко связан с вращающимся стержнем, то на него будет действовать связь в виде стержня, которая будет удерживать ползун от перемещения вдоль стержня. В результате координата x относительного перемещения стержня станет постоянной величиной и её в таких случаях называют радиусом. Реакция связи, удерживающая ползун от относительного перемещения вдоль стержня, будет направлена к центру вращения и будет выполнять функции активного воздействия на ползун. Вполне естественно, что ускорение, генерируемое этой связью, также будет направлено к центру вращения и мы обязаны назвать его в этом случае центростремительным ускорением. Вполне естественно, что оно будет равно $\omega_e^2 \cdot x$. Так как ползун закреплён жёстко, то $x = r = const$. Отметим, что до проводимого нами анализа процесса сложного движения точки понятие «центробежное ускорение» отсутствовало. Но, как мы видим, необходимость введения этого понятия существует.

Далее, надо учсть существование предельно большой величины силы трения \bar{F}_t соответствующей коэффициенту трения f , который связан с углом трения зависимостью $f = \operatorname{tg} \varphi_t$. При ускоренной фазе вращения стержня с угловым ускорением ε_e результирующая сила достигнет предельно большой величины, определяемой силой трения. Обозначим её через \bar{R}_t (рис. 11). Но как только ползун начнёт движение вдоль стержня, увеличение силы трения \bar{F}_t прекратится, но увеличение результирующей силы, которую мы обозначили символом \bar{R}_t , продолжится за счёт продолжающегося увеличения переносного и относительного ускорений, поэтому результирующую силу, независящую от силы трения, обозначим символом \bar{R} .

А теперь обратим внимание на две причины ускоренного движения ползуна. Первая обусловлена увеличением угловой скорости ω_e от нуля до постоянной величины $\omega_e = const$, вторая – увеличением радиуса, равного переменной координате x . Так как в этом случае две переменные ω_e и x , то математическая модель для определения **переносного** касательного ускорения имеет вид

$$a_\tau = \frac{d(\omega_e \cdot x)}{dt} = \frac{d\omega_e}{dt} \cdot x + \omega_e \cdot \frac{dx}{dt} = \varepsilon_e x + \omega_e V_r. \quad (47)$$

Обратим внимание на то, что составляющие полного переносного ускорения (47) имеют одинаковую размерность $\text{рад} \cdot \text{м} / \text{с}^2$ и отметим, что математики, физики и механики обычно не пишут размерность радиан, в которой заложен смысл углового перемещения материальной точки. Если размерность радиан опускать, то размерность полного переносного ускорения (47) становится, соответствующей ускорению линейного перемещения материальной точки. Сейчас мы увидим, что нельзя опускать размерность радиан, так как появляется путаница в представлениях о сути сложного движения материальной точки.

Таким образом, из формулы (47) следует, что при ускоренном вращении стержня результирующая касательного (переносного) ускорения ползуна состоит из двух составляющих $a_r = a_{r1} + a_{r2}$. Первая составляющая $a_{r1} = \varepsilon_e x$ - генерируется переменной угловой скоростью ω_e , а вторая $a_{r2} = \omega_e V_r$ - переменным радиусом вращения x .

Чтобы найти полное **относительное** ускорение a_r ползуна в момент ускоренного вращения стержня, надо также учесть две переменных величины: переносную угловую скорость ω_e и переменный радиус вращения, равный координате x . Переменная угловая скорость ω_e будет генерировать угловое ускорение $d\omega_e / dt = \varepsilon_e$. Кроме этого она будет генерировать и переменное ускорение $\omega_e^2 \cdot x$ ползуна в относительном движении, направленное, в данном случае, от центра вращения. Поэтому, как мы уже отметили, есть основания назвать его центробежным ускорением.

Теперь надо учесть ту часть относительного ускорения ползуна, которая генерируется меняющейся координатой x или переменной относительной скоростью V_r . Она равна $\omega_e \cdot V_r$. Тогда полное относительное ускорение, при ускоренном вращении стержня будет равно

$$a_r = \omega_e^2 \cdot x + \omega_e V_r \Rightarrow \frac{\text{рад}^2}{\text{с}^2} \cdot \text{м} + \frac{\text{рад} \cdot \text{м}}{\text{с}^2}. \quad (48)$$

Сразу обращаем внимание на некоторую странность. Размерность первой составляющей полного относительного ускорения $\text{рад}^2 \cdot \text{м} / \text{с}^2$, а второй $\text{рад} \cdot \text{м} / \text{с}^2$. Из этого следует, что мы не имеем права опускать размерность радиан. В чём суть этого противоречия? Попытаемся поискать его причину. Для этого запишем уравнение изменения угла вращения стержня.

$$\varphi = \omega_e t. \quad (49)$$

При переменном вращении стержня переменная угловая скорость этого вращения определится зависимостью

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\omega_e}{dt} t \Rightarrow \omega_e = \varepsilon_e t. \quad (50)$$

Теперь надо задать время от начала ускоренного вращения стержня до момента перехода его к равномерному вращению ($\omega_e = \text{const}$) или угол поворота φ от начала ускоренного вращения до перехода к равномерному вращению. Примем $\varphi = 2\pi n$. Тогда из уравнения (49) имеем

$$t = \frac{2\pi n}{\omega_e}. \quad (51)$$

При таком определении времени ускоренного вращения стержня переносная угловая скорость ω_e , входящая в выражение (51), является усреднённой постоянной величиной, но, тем не менее, она отражает время t , затраченное на ускоренное вращение ползуна, и мы имеем право использовать математическую модель (51) для описания ускоренного вращения стержня и ускоренного относительного движения ползуна. Подставляя этот результат в формулу (50), имеем

$$\omega_e = \sqrt{2\pi\varepsilon} \Rightarrow \sqrt{\frac{\text{рад.} \cdot \text{рад.}}{c^2}} = \text{рад./с.} \quad (52)$$

Так будет изменяться угловая скорость ω_e , входящая в формулу ($a_c = \omega_e^2 x = a_r$) для определения ускорения a_c относительного движения ползуна вдоль стержня, в фазе ускоренного вращения стержня. Однако, надо учесть и ту часть $\omega_e V_r$ ускорения, которая возникает в результате увеличения радиуса вращения, то есть – координаты x . Тогда математическая модель полного относительного ускорения ползуна $a_c = a_r$ при ускоренном вращении стержня принимает вид

$$a_c = a_r = 2\pi\varepsilon x + \omega_e V_r \Rightarrow \frac{\text{рад.}^2 \cdot \text{м}}{c^2} + \frac{\text{рад.} \cdot \text{м}}{c^2}. \quad (53)$$

Как видно, размерности формул (48) и (53) совпадают. Это свидетельствует о правильности определения составляющих полного переносного и полного относительного ускорений движения ползуна при ускоренном вращении стержня.

Таким образом, при ускоренном вращении стержня полное переносное (касательное) ускорение (47) и полное относительное ускорение (53) состоят из двух составляющих, учитывающих ускоренное движение ползуна за счёт увеличения переносной угловой скорости ω_e и за счёт увеличения расстояния от центра вращения до ползуна, то есть – координаты x . При равномерном вращении стержня $\varepsilon = 0$ модули обоих ускорений касательного a_τ (47) и переносного a_r (53) оказываются одинаковыми и равными $\omega_e V_r$.

Так как $\bar{a}_\tau \perp \bar{a}_r$, то абсолютное ускорение ползуна при равномерном вращении стержня определяется зависимостью

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_r^2} = \omega_e V_r \sqrt{2}. \quad (54)$$

Из этого следует математическая модель для результирующей активной силы R , действующей на ползун при равномерном вращении стержня.

$$R = m\omega_e V_r \sqrt{2}. \quad (55)$$

При постоянной угловой скорости $\omega_e = \text{const}$ переносное касательное ускорение a_τ также увеличивается по мере удаления ползуна от центра вращения (О) за счёт увеличения радиуса вращения, то есть – координаты x . Действие стержня на ползун передаётся через нормальную реакцию N стержня, которая равна активной переносной силе F_e . Кроме этого, переменная величина F_e формирует переносную силу инерции, направленную противоположно и равную проекции результирующей силы инерции R_i на нормаль. Это – кориолисова сила инерции F_{ik} . Так как любая сила инерции формирует замедление движения тела, совпадающее с направлением самой силы инерции, то кориолисова сила инерции

также формирует замедление b_k переносного движения ползуна, которое совпадает по направлению с вектором кориолисовой силы инерции (рис. 11). Модуль кориолисова замедления равен модулю переносного (касательного) ускорения

$$a_\tau = b_k = \omega_e V_r . \quad (56)$$

Обратим внимание на то, что математическая модель бывшего кориолисова ускорения записывается так

$$a_k = 2\omega_e V_r . \quad (57)$$

Это в два раза больше замедления (56). Возникает законный вопрос: какая из математических моделей (56) или (57) точнее отражает реальность? Чтобы получить ответ на этот вопрос надо вернуться к принципу причинности, согласно которому сила первична, а ускорение вторично. Поэтому надо составить уравнения сил, действующих на ползун, и из этих уравнений должен следовать ответ на поставленный вопрос.

При ускоренном движении материальных точек и тел сила инерции направлена противоположно движению и формирует замедление b_r этого движения. Активная же центробежная сила \bar{F}_r направлена в сторону движения и совпадает с направлением центробежного ускорения, определяемого по формуле $a_c = \omega_e^2 x = a_r$.

Поскольку в соответствии с главным принципом механодинамики в каждый данный момент времени сумма активных сил, сил сопротивления движению и сил инерции, действующих на ползун, равна нулю, то векторное уравнение сил в этом сложном движении ползуна имеет вид

$$\bar{R} + \bar{R}_i + \bar{F}_r = 0 \Rightarrow m\bar{a} + m\bar{b} + f\bar{N} = 0 . \quad (58)$$

Проектируя силы, приложенные к ползуну, на оси ОХ и ОУ, имеем:

$$\sum F_x = F_r - F_{ri} - F_t = 0 \Rightarrow \sum F_x = m\omega_e V_r - mb_r - fm\omega_e V_r ; \quad (59)$$

$$\sum F_y = F_e + N - F_{ik} = 0 \Rightarrow m\omega_e V_r + m\omega_e V_r - mb_k . \quad (60)$$

Преобразуем уравнение (60) таким образом

$$\sum F_y = F_e + N - F_{ik} = 0 \Rightarrow m\omega_e V_r + m\omega_e V_r - mb_k = 2m\omega_e V_r - mb_k . \quad (61)$$

Итак, сумма проекций сил на ось ОУ, действующих на ползун, состоит из двух составляющих. Первая составляющая $2m\omega_e V_r$ равна сумме переносной активной силы F_e , действующей на ползун в переносном движении, и равной ей нормальной реакции N стержня на ползун. Это две активные силы, приложенные к ползуну в переносном движении. Обращаем внимание на то, что суммарное переносное ускорение, генерируемое этими силами, равно $2\omega_e V_r$, что полностью совпадает с давно используемым кориолисовым ускорением (57).

Далее, направление вектора суммы $2\omega_e V_r$ ускорений, генерируемых переносной активной силой F_e и нормальной реакцией N стержня на ползун, совпадает с давно принятым направлением вектора, так называемого, кориолисова ускорения (57). Напомним,

что в данном случае направление вектора бывшего кориолисова ускорения (57) определяется поворотом вектора относительной скорости \bar{V}_r в сторону вращения.

Давно условились силы инерции направлять противоположно ускорениям. На рис. 11 кориолисова сила инерции F_{ik} направлена противоположно нормальной реакции N , а значит и противоположно ускорению $2\omega_e V_r$, которое фактически не является кориолисовым ускорением. Это сумма ускорений, формируемых силами F_e и N . Она не имеет никакого отношения к кориолисовой силе инерции, которая формирует не ускорение движения ползуна, а его замедление b_k , вектор которого совпадает с направлением кориолисовой силы инерции F_{ik} (рис. 11).

Таким образом, мы оказались в противоречивой ситуации. С одной стороны суммарное ускорение $2\omega_e V_r$ генерируется активными силами F_e и N , приложенными к ползуну и направленными в сторону его переносного движения, а с другой стороны сумма этих ускорений $2\omega_e V_r$ давно названа кориолисовым ускорением, принадлежащим кориолисовой силе инерции, которая по своей природе генерирует не ускорение, а замедление материальных точек и тел при их ускоренном движении. Из этого следует, что направление действия кориолисовой силы инерции определяется правильно, но модуль его вычисляется неправильно. Произведение массы m ползуна на ускорение его движения $2\omega_e V_r$ равно не кориолисовой силе инерции F_{ik} (рис. 11), а суммарной активной силе $(F_e + N)$, действующей на ползун в переносном движении. Модуль кориолисовой силы инерции F_{ik} , замедляющей переносное движение ползуна, равен произведению массы m ползуна на замедление b_k , генерируемое кориолисовой силой инерции $F_{ik} = mb_k = m\omega_e V_r$, направленной противоположно переносному движению ползуна (рис. 11).

Конечно, в изложенном выше, неясна причина сложения $(F_e + N)$. Но без этого не появляется двойка в выражении (57) кориолисова ускорения. Однако, если представить, что ползун удаляется от центра на удлиняющейся гибкой нити, вращающейся относительно центра, то в такой схеме будет отсутствовать реакция N стержня на ползун и останется одна переносная сила F_e . Этот пример позволяет считать, что при движении ползуна по жёсткому стержню на него действуют в переносном движении две силы $(F_e + N)$. В этом случае численная величина кориолисова ускорения (57) остаётся прежней. Если же убрать силу F_e , то численная величина кориолисова ускорения будет в два раза меньше и потребуется экспериментальная проверка достоверности новой формулы для вычисления теперь уже не кориолисова ускорения, а кориолисова замедления.

Пример-2. (рис. 12). Дано: I ; $\omega_e = \text{const}$; $V_e = 0$; $x_0 \neq 0$. Найти относительную скорость V_r тела в момент вылета его из трубы (без учета силы трения).

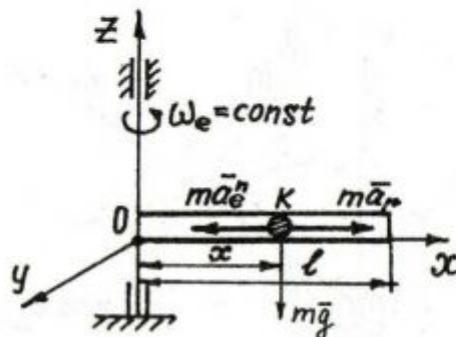


Рис. 12. Схема к примеру 2

Решение.

$$ma_r = m\omega_e^2 x \Rightarrow \frac{dV_r}{dt} = \omega_e^2 x \Rightarrow \frac{dV_r dx}{dt} = \omega_e^2 x dx;$$

$$\int_0^V V_r dV_r = \int_{x_0}^l \omega_e^2 x dx \Rightarrow \frac{V_r^2}{2} = \frac{\omega_e^2}{2} (l^2 - x_0^2) \Rightarrow V_r = \omega_e \sqrt{l^2 - x_0^2}. \quad (62)$$

5. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

В принципе, все действующие технические устройства генерируют колебания, которые могут выполнять определенные технологические процессы или наносить вред устройствам. Поэтому изучение колебаний - одна из важнейших сторон подготовки инженера.

Для теоретического описания колебательного процесса используют материальную точку в качестве объекта совершающего механические колебания. Большинство механических колебательных процессов имеют синусоидальный закон колебаний, в котором фаза ускоренного движения материальной точки переходит сразу в fazу замедленного движения. Фаза равномерного движения отсутствует. Поскольку сила инерции в fazе ускоренного движения материальной точки направлена противоположно движению и таким образом тормозит движение материальной точки, а в fazе замедленного движения она направлена в сторону движения материальной точки, то суммарное её действие за один период колебаний равно нулю. Поэтому есть основания не учитывать действие силы инерции при описании колебательных движений материальной точки. Её действие автоматически учитывается экспериментальными коэффициентами, которые входят в уравнения её колебательных движений.

5.1. Свободные колебания

Рассмотрим колебания груза \bar{P} , подвешенного на пружине, имеющей в естественном состоянии (без подвешенного груза) длину $AB = l_0$ (рис. 13). За начало отсчета примем положение груза, в котором вес \bar{P} груза уравновешивается реакцией \bar{F} пружины (точка О, рис. 13).

Статическое удлинение пружины ВО, соответствующее положению равновесия груза, обозначим через λ_{cm} . Тогда текущее удлинение λ определится из рис. 13 так $\lambda = \lambda_{cm} \pm x$. Согласно закону Гука, сила упругости (реакция) пружины пропорциональна ее удлинению, то есть $F = c\lambda$, где c - коэффициент пропорциональности (жесткость пружины).

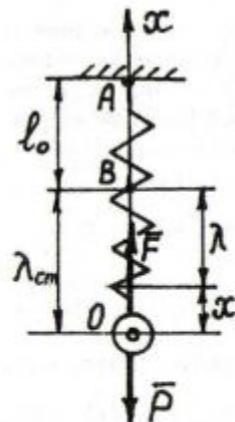


Рис. 13. Схема к выводу дифференциального уравнения свободных колебаний материальной точки

Так как в положении статического равновесия модуль силы F равен весу груза P , то $P = c \cdot \lambda_{cm}$, откуда по результатам эксперимента можно найти коэффициент жесткости пружины

$$c = \frac{P}{\lambda_{cm}} = \frac{H}{M}. \quad (63)$$

Как видно (рис. 13), дифференциальное уравнение движения груза будет иметь вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F - P,$$

или

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = c\lambda - P.$$

Поскольку $F = c\lambda$ и $P = c\lambda_{cm}$, а также $\lambda = \lambda_{cm} - x$, то $m(d^2 x / dt^2) = -cx$. Обозначим $c/m = k^2$ (k - частота свободных гармонических колебаний), тогда

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x = 0. \quad (64)$$

Это дифференциальное уравнение гармонического колебания. Следовательно, груз, подвешенный на пружине, совершает гармонические колебания около положения равновесия. Из теории линейных дифференциальных уравнений известно, что общий интеграл дифференциального уравнения (64) второго порядка выражается так

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt. \quad (65)$$

Если вместо постоянных C_1 и C_2 ввести постоянные A и α , такие, что $C_1 = A \cos \alpha$; $C_2 = A \sin \alpha$, то получим

$$x = A(\sin kt \cdot \cos \alpha + \cos kt \cdot \sin \alpha) \Rightarrow x = A \sin(kt + \alpha), \quad (66)$$

где A - амплитуда колебаний (наибольшее отклонение груза от положения равновесия); $kt + \alpha$ - фаза колебания; α - начальная фаза (при $t = 0$).

График гармонического колебания (рис. 14) представляет собой, очевидно, синусоиду. Промежуток времени T , в течение которого груз совершает одно полное колебание, называется периодом колебаний. Так как период синуса и косинуса равен 2π , то $kT = 2\pi$. Откуда

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{c}} = 2\pi \sqrt{\frac{\lambda_{cm}}{g}}. \quad (67)$$

Величина v , обратная периоду T и определяющая число колебаний за секунду, называется частотой колебаний

$$v = \frac{1}{T} = \frac{k}{2\pi}. \quad (68)$$

Скорость точки при гармоническом колебании равна

$$V = \frac{dx}{dt} = Ak \cos(kt + \alpha). \quad (69)$$

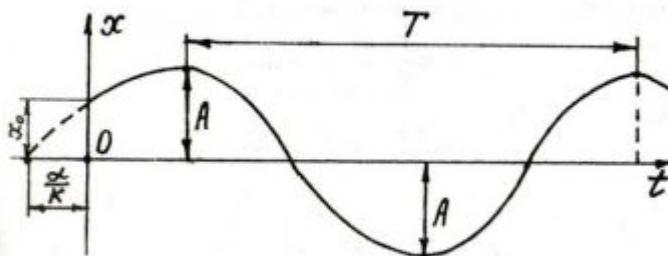


Рис. 14. График закона гармонического (синусоидального) колебания материальной точки

Амплитуда A и начальная фаза α колебания определяются по начальным условиям движения. Полагая, что при $t = 0; x = x_0; V = V_0$ (66 и 69) имеем: $x_0 = A \sin \alpha; V_0 = Ak \cos \alpha$. Отсюда

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{V_0^2}{k^2}}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{kx_0}{V_0}. \quad (70)$$

Свойства свободных колебаний при отсутствии сопротивления: 1 - амплитуда A и начальная фаза α (70) зависят от начальных условий; 2 - круговая частота k (68) и период T колебаний не зависят от начальных условий и являются независимыми характеристиками данной колебательной системы.

5.2. Затухающие колебания

Если свободные колебания совершаются в какой-то среде (жидкость, газ ...), то среда, создавая сопротивление, приводит к затуханию этих колебаний.

Пусть сила сопротивления среды пропорциональна первой степени скорости $\bar{R}_x = -\mu \bar{V}$. Знак минус означает, что сила \bar{R} направлена противоположно вектору \bar{V} (рис. 15). Таким образом, при затухающих колебаниях на точку (груз) действует восстанавливающая сила $\bar{F}_x = -cx$ и сопротивление среды $\bar{R}_x = -\mu \bar{V}$, поэтому дифференциальное уравнение затухающего колебания имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -F_x - R_x$$

или

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - \mu \frac{dx}{dt}. \quad (71)$$

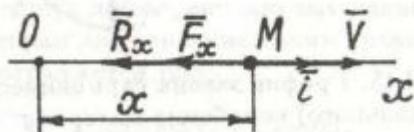


Рис. 15. Схема сил, действующих на точку в сопротивляющейся среде

Разделим обе части уравнения (71) на m и введем обозначения:

$$\frac{c}{m} = k^2, \quad \frac{\mu}{m} = 2n,$$

где n - коэффициент затухания.

Тогда

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2n\frac{dx}{dt} + k^2x = 0. \quad (72)$$

Для интегрирования этого уравнения применим способ замены переменного, полагая

$$x = \psi e^{-nt}, \quad (73)$$

где ψ - новая переменная. После двукратного дифференцирования уравнения (73), подстановки результата в уравнение (65) и преобразований, получим

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + (k^2 - n^2)\psi = 0. \quad (74)$$

Полагая $k^2 - n^2 = k_1^2$, имеем

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} + k_1^2\psi = 0. \quad (75)$$

Это дифференциальное уравнение гармонического колебания, сходное с уравнением (68). Интегрируя его, получим

$$\psi = A \sin(k_1 t + \alpha). \quad (76)$$

Подставляя этот результат в уравнение (73), найдем

$$x = A \cdot e^{-nt} \cdot \sin(k_1 t + \alpha). \quad (77)$$

Это уравнение отличается от уравнения гармонического колебания множителем e^{-nt} , который делает размахи колебаний точки М около положения равновесия переменными; они быстро уменьшаются с течением времени, поэтому их называют затухающими колебаниями (рис. 16).

Период затухающих колебаний равен

$$T_1 = \frac{2\pi}{k_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (78)$$

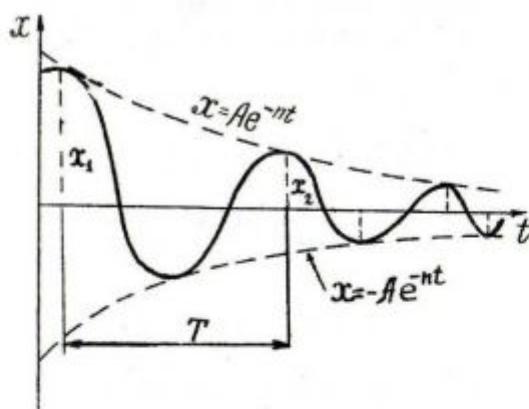


Рис. 16. График затухающих колебаний

Так как $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$, то $k_1 < k$ и

$$\frac{2\pi}{k} < \frac{2\pi}{k_1},$$

то есть период $T_1 = 2\pi/k_1$ затухающих колебаний больше, чем период $T = 2\pi/k$ гармонического колебания, совершающегося точкой под действием той же силы \bar{F} при отсутствии сопротивления.

Отвлечённое число e^{-nt} называется декрементом затухающих колебаний. Величина nt - логарифмический декремент затухания.

5.3. Вынужденные колебания. Резонанс

В этом случае на "колеблющуюся" точку, кроме восстанавливающей силы \bar{F} , действует еще и периодически изменяющаяся сила \bar{Q} , возбуждающая колебания. Ее проекция на ось ОХ равна $Q_x = Q_0 \sin \nu t$. Эта сила называется возмущающей силой, а колебания, происходящие под действием такой силы - вынужденными. Величина ν является частотой возмущающей силы. В данном случае $Q_x = Q_0 \sin \nu t$ - гармоническая возмущающая сила. Она может иметь и другой закон.

Вынужденные колебания при отсутствии сопротивления. Если на движущуюся точку действует только восстанавливающая \bar{F} и возбуждающая \bar{Q} силы, а сила сопротивления \bar{R} отсутствует, то дифференциальное уравнение движения в этом случае имеет вид

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + cx - Q_0 \sin \nu t = 0. \quad (79)$$

Разделим обе части этого уравнения на m и положим $Q_0/m = P_0$. Тогда учитывая, что $c/m = k^2$, имеем

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + k^2 x - P_0 \sin \nu t = 0. \quad (80)$$

Это дифференциальное уравнение вынужденных колебаний при отсутствии сопротивления. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{P_0}{k^2 - v^2} \sin vt, \quad (81)$$

где a и α - постоянные интегрирования.

Полученное уравнение показывает, что колебания точки складываются в этом случае из: 1 - колебаний с амплитудой a , и частотой k , называемых свободными колебаниями; 2 - колебаний с амплитудой

$$A = \frac{P_0}{|k^2 - v^2|} = \frac{\delta_0}{\left|1 - \left(\frac{v}{k}\right)^2\right|}, \quad (82)$$

и частотой v , которые называют вынужденными колебаниями. Здесь $\frac{P_0}{k^2} = \delta_0$. Амплитуда

A не зависит от начальных условий, а амплитуда a - зависит.

В практике, как правило, колебания происходят при наличии сопротивлений, поэтому собственные колебания с частотой k быстро затухают, а вынужденные колебания с частотой v оказываются основными. Но бывают и исключения, когда $v \rightarrow k$.

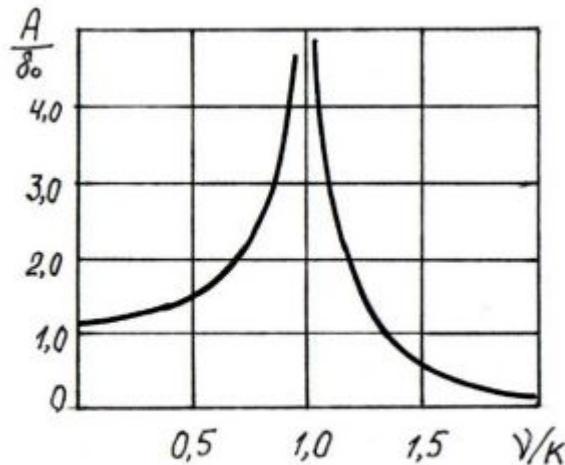


Рис. 17. Схема к анализу явления резонанса

Амплитуда

$$A = \frac{\delta_0}{\left|1 - \left(\frac{v}{k}\right)^2\right|} \rightarrow \infty \quad (83)$$

вынужденных колебаний в этом случае неограниченно растет, так как знаменатель в формуле (83) стремится к нулю.

$$\left|1 - \left(\frac{v}{k}\right)^2\right| \rightarrow 0 \quad (84)$$

и наступает явление резонанса (рис. 17).

Когда $v \gg k$, амплитуда A близка к нулю. Когда v близка к k , то A становится очень большой. Если работающая конструкция проявляет явно выраженные признаки, близкие к резонансу, то надо экспериментально определить величину статической деформации λ_{cm} тела, формирующего колебания с учетом приложенных к нему нагрузок, затем вычислить частоту собственных колебаний этого тела по формуле $k = \sqrt{g / \lambda_{cm}}$.

Далее, используя характеристики привода конструкции, вычислить частоту $\nu = \pi l / 30$ возбуждающих колебаний и сравнить ее с частотой k собственных колебаний. Если значение ν/k близко к единице, то конструкция работает в режиме, близком к резонансу (рис. 17).

Изменяя геометрические (λ_{cm}) и кинематические (ν) параметры, можно добиться величины ν/k , далекой от ее резонансного значения.

Общие свойства вынужденных колебаний

1. Амплитуда вынужденных колебаний не зависит от начальных условий.
2. Вынужденные колебания не затухают при наличии сопротивлений.
3. Частота вынужденных колебаний ν равна частоте возмущающей силы, и от характеристик колеблющейся системы не зависит (возмущающая сила "навязывает" системе свою частоту колебаний).
4. Если сопротивление среды мало, то даже при малой возмущающей силе $Q \rightarrow 0$ можно получить интенсивные вынужденные колебания.

6. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ МЕХАНОДИНАМИКИ

Вводная часть

Общие теоремы механодинамики являются следствием основного закона механодинамики. Применение этих теорем избавляет исследователя от необходимости ряда операций интегрирования, так как эти операции раз и навсегда выполняются при доказательстве общих теорем. Указанные теоремы базируются на таких фундаментальных понятиях, как количество движения материальной точки, момент количества движения и действие силы на материальную точку.

6.1. О количестве движения материальной точки

Количеством движения материальной точки называется векторная величина $m\bar{V}$, равная произведению массы m точки на её скорость \bar{V} . Направлен вектор $m\bar{V}$ так же, как и вектор \bar{V} - по касательной к траектории (рис. 18).

Изменение количества движения материальной точки $\Delta m\bar{V}$ за некоторый промежуток времени – следствие действия силы \bar{F} на материальную точку. Длительность этого действия может быть разной, поэтому изменение количества движения материальной точки нельзя называть импульсом силы, так как понятие импульс силы соответствует её кратковременному действию. С учётом этого назовём величину, равную изменению количества движения материальной точки, просто: «действие силы» и обозначим символом $\bar{S} = m\Delta\bar{V}$ (рис. 18).

Обратим внимание на то, что изменение количества движения материальной точки при ускоренном её движении происходит под действием ньютонаской силы и сил сопротивления движению, в виде сил, формируемых механическими сопротивлениями, и силой инерции. Изменение количества движения происходит за счёт превышение величины ньютонаской силы над силами сопротивления движению.

При ускоренном движении материальной точки результат действия силы всегда положительный.

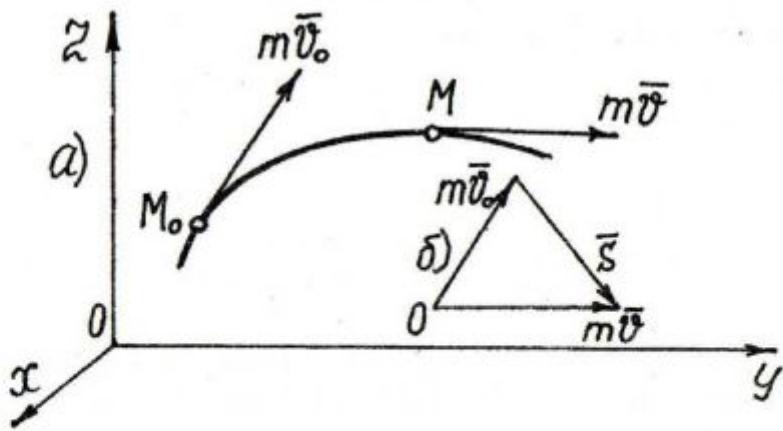


Рис. 18. Схема к определению действия силы \bar{S}

При замедленном движении материальной точки ньютоновская сила отсутствует. Изменение количества движения материальной точки происходит за счёт превышения сил сопротивления движению над силой инерции, которая направлена в сторону движения материальной точки. При замедленном движении материальной точки результат действия силы всегда отрицательный.

6.2. Теорема об изменении количества движения материальной точки

Связь действия силы \bar{S} с основным уравнением механодинамики выражает теорема об изменении количества движения материальной точки.

Теорема. Изменение количества движения материальной точки $\Delta m\bar{V}$ за некоторый промежуток времени равно действию силы ($m\Delta\bar{V} = \bar{S}$) на материальную точку за тот же промежуток времени.

$$m\bar{a} = \bar{F} \Rightarrow m \frac{d\bar{V}}{dt} = \bar{F} \Rightarrow d(m\bar{V}) = \bar{F}dt = d\bar{S}. \quad (85)$$

Дифференциал количества движения $d(m\bar{V})$ материальной точки равен элементарному действию $d\bar{S}$ силы на материальную точку. Интегрируя выражение (85) дифференциала количества движения материальной точки, имеем

$$m\bar{V} - m\bar{V}_o = \int_0^t \bar{F}dt = \bar{S}. \quad (86)$$

Теорема доказана. Если известны $m\bar{V}$ и $m\bar{V}_o$, то легко построить и вектор действия силы \bar{S} (рис. 18). Проектируя уравнение (86) изменения количества движения точки на оси координат, получим:

$$mV_x - mV_{ox} = \int_0^t F_x dt = S_x; \quad (87)$$

$$mV_y - mV_{oy} = \int_0^t F_y dt = S_y; \quad (88)$$

$$mV_z - mV_{oz} = \int_0^t F_z dt = S_z. \quad (89)$$

Изменение проекции количества движения $mV_x - mV_{ox}$ на какую-нибудь ось равно проекции S_x действия силы на ту же ось.

Следствия теоремы:

1) когда $\bar{F} = const$, то

$$\bar{S} = \int_0^t \bar{F} dt = \bar{F} \cdot t \quad \text{и} \quad m\bar{V} - m\bar{V}_o = \bar{F} \cdot t. \quad (90)$$

2) если $F_x = 0$, то $V_x = V_{ox} = const$ и выполняется закон сохранения количества движения, эквивалентный второму закону механики.

3) если $F_x = const$, то

$$\int_0^t F_x dt = F_x \cdot t \quad \text{и} \quad mV_x - mV_{ox} = F_x \cdot t. \quad (91)$$

Обратим внимание на размерность $H \cdot c$ действия силы. Чем дольше действует сила, тем больше величина её действия на материальную точку, поэтому понятие действие силы не может отражать ударное действие силы, которое совершается за малый промежуток времени. Поэтому для характеристики кратковременного действия силы вводим понятие ударная сила.

6.3. Ударная сила

Ударная сила \bar{F}_y – векторная величина, равная силе \bar{F} , делённой на время t_y её действия при ударе $\bar{F}_y = \bar{F}/t_y, H/c$. Логичность изменения ударной силы очевидна. Чем меньше время действия одной и той же силы, тем больше её ударное действие.

В качестве примера можно взять пулю, вылетевшую из патрона. Главным критерием определения расстояния действия ударной силы будет момент, когда под действием давления пуля вылетает из закрытого пространства патрона или ствола оружия. Тогда длину той части патрона, которую занимала пуля до выстрела, или длину ствола оружия можно принять за расстояние, на котором действует ударная сила, перемещающая пулю. Поскольку скорость вылета пули из ствола известна, то время действия ударной силы \bar{F}_y можно определять, как частное от деления длины ствола, по которому движется пуля, на скорость её движения.

Величину ударной силы, выстрелившей 2-й энергоблок Саяно-Шушенской ГЭС невозможно рассчитать, используя старые понятия импульс силы и ударный импульс. Новое понятие ударная сила позволяет решить эту задачу. Для этого возьмём расстояние от места крепления крышки энергоблока 80-ю шпильками до поверхности пола машинного зала, где заканчивалась герметизация полости колодца, в котором размещался энергоблок (рис. 19). Это расстояние эквивалентно расстоянию движения, например, пули в закрытой полости ствола перед вылетом из него. Для 2-го энергоблока это расстояние было принято равным $S=0,80\text{m}$ (рис. 19). Средняя скорость взлёта энергоблока на высоту 14м составила $V=16,56\text{m/s}$. Тогда время действия ударной силы на энергоблок будет равно

$$t_y = \frac{S}{V} = \frac{0,80}{16,56} = 0,05\text{s}. \quad (93)$$



Рис. 19. Схема к определению времени действия ударной силы на энергоблок

Сила сопротивления подъёму энергоблока, закреплённого к фундаменту 80-ю шпильками, с учетом массы блока, прочности шпилек, крепивших крышку энергоблока и силы инерции, тормозившей его ускоренный вылет, составила

$$\bar{F} = 5,06 \cdot 10^8 H. \quad (94)$$

В результате величина ударной силы, действовавшей на энергоблок, оказалась, примерно, равной

$$F_y = \frac{F}{t_y} = \frac{5,06 \cdot 10^8}{0,05} = 1,01 \cdot 10^{10} H/c = 1030000 \text{тонн}/c. \quad (95)$$

Отметим, что старые понятия импульс силы и ударный импульс не позволяют решать подобные задачи.

6.4. Момент количества движения материальной точки

Часто при изучении движения точки вместо изменения вектора $m\bar{V}$ возникает необходимость рассмотреть изменение его момента относительно данного центра О или оси OZ. При этом момент вектора $m\bar{V}$ относительно центра О или оси OZ обозначают соответственно: $\bar{m}_0(m\bar{V})$ и $\bar{m}_z(m\bar{V})$ и называют моментом количества движения или кинетическим моментом точки М относительно центра О или оси OZ. Вычисляется момент $m_0(m\bar{V})$ так же, как и момент силы $m_0(\bar{F})$ (рис. 20).

На рис. 20 векторы \bar{F} и $m\bar{V}$ лежат в плоскости П перпендикулярной к оси OZ. Модуль момента силы \bar{F} относительно центра О равен $m_0(\bar{F}) = -F \cdot h_1$. Модуль момента количества движения $m\bar{V}$ материальной точки относительно центра О равен $m_0(m\bar{V}) = mVh_2$, где h_2 - длина перпендикуляра, опущенного из точки О на направление вектора \bar{V} . Приведем векторную запись момента силы $\bar{m}_0 = \bar{m}_0(\bar{F})$ и момента количества движения $\bar{K}_0 = \bar{m}_0(m\bar{V})$:

$$\bar{m}_0 = \bar{m}_0(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}; \quad \bar{K}_0 = \bar{m}_0(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}. \quad (96)$$

Направление вектора \bar{K}_0 определяется также, как и вектора \bar{m}_0 . Момент силы \bar{F} относительно координатных осей записывается так:

$$m_x = m_x(\bar{F}); \quad m_y = m_y(\bar{F}); \quad m_z = m_z(\bar{F}).$$

Аналогично записывается и момент количества движения относительно осей:

$$K_x = m_x(m\bar{V}); \quad K_y = m_y(m\bar{V}); \quad K_z = m_z(m\bar{V}). \quad (97)$$

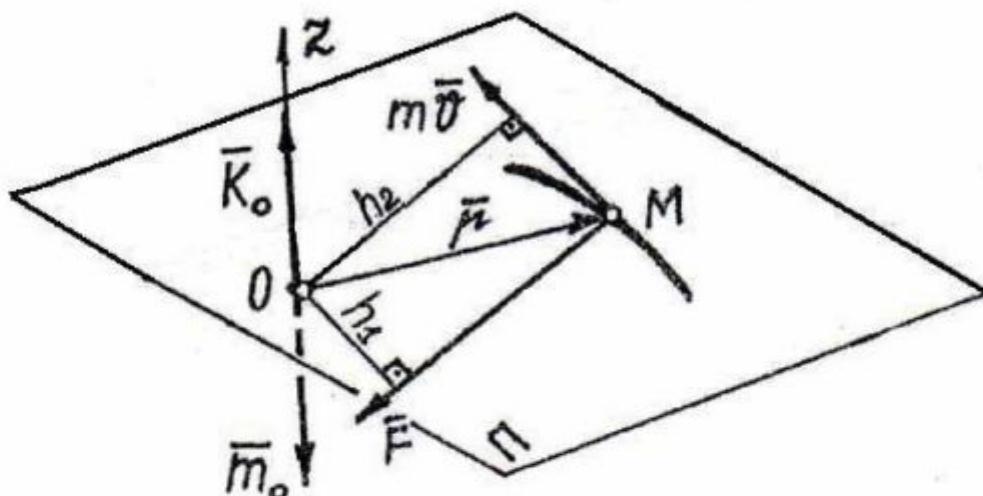


Рис. 20. Схема к вычислению момента $\bar{K}_0 = \bar{m}_0(m\bar{V})$ количества движения материальной точки

Если известны координаты (x, y, z) точки, то моменты количества движения этой точки относительно осей равны:

$$K_x = m_x(m\bar{V}) = y \cdot mV_z - z \cdot mV_y; \quad (98)$$

$$K_y = m_y(m\bar{V}) = z \cdot mV_x - x \cdot mV_z; \quad (99)$$

$$K_z = m_z(m\bar{V}) = x \cdot mV_y - y \cdot mV_x. \quad (100)$$

6.5. Теорема моментов относительно центра

Производная по времени от момента количества движения точки (взятого относительно какого-нибудь центра О) равна моменту действующей на эту точку силы относительно того же центра.

Дифференцируя выражение $\bar{K}_0 = \bar{m}_0(m\bar{V}) = \bar{r} \times m\bar{V}$ по t , получим:

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \left(\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{V} \right) + \left(\bar{r} \times m \frac{d\bar{V}}{dt} \right) = (\bar{V} \times m\bar{V}) + (\bar{r} \times m\bar{a}). \quad (101)$$

Так как векторы \bar{V} и $m\bar{V}$ параллельны, то $\bar{V} \times m\bar{V} = 0$ и учитывая, что $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$, окончательно имеем

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{V}) = \bar{r} \times \bar{F} = \bar{m}_0(\bar{F}) \quad (102)$$

или

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \frac{d}{dt}[\bar{m}_0(m\bar{V})] = \bar{m}_0(\bar{F}). \quad (103)$$

Теорема доказана.

Следствие теоремы. Если $\bar{m}_0(\bar{F}) = 0$, то $\bar{m}_0(m\bar{V}) = const$. То есть, если момент действующей на точку М силы \bar{F} относительно некоторого центра О равен нулю, то момент количества движения точки М относительно этого же центра О есть величина численно и по направлению постоянная. Считается, что точка в этом случае движется под действием центральной силы. Центральной силой называется сила, линия действия которой проходит через центр О. Классическим примером такой силы является сила притяжения планет к Солнцу или спутника к Земле.

Теорема о моменте количества движения в координатной форме. Производная по времени от момента количества движения материальной точки относительно какой-нибудь неподвижной оси равна моменту действующей на эту точку силы относительно той же оси.

Спроектируем векторное уравнение

$$\frac{d\bar{K}_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}) \quad (104)$$

на оси координат:

$$\frac{dK_x}{dt} = m_x(\bar{F}); \quad (105)$$

$$\frac{dK_y}{dt} = m_y(\bar{F}); \quad (106)$$

$$\frac{dK_z}{dt} = m_z(\bar{F}). \quad (107)$$

Эти уравнения и выражают теорему о моменте количества движения в координатной форме.

6.6. Закон сохранения момента количества движения (кинетического момента)

Из (103) и (107) следует, что если $\bar{m}_0(\bar{F}) = 0$ и $\bar{m}_z(\bar{F}) = 0$, то $\bar{K}_0 = const$ и $\bar{K}_z = const$. Это значит, что при отсутствии внешних сил точка будет вращаться относительно центра О или оси OZ вечно не меняя направления векторов \bar{K}_0 или K_z . В этом и заключается суть закона сохранения кинетического момента. Совсем недавно выяснилось, что этот закон управляет постоянством самой фундаментальной константы Природы - постоянной Планка $\bar{h} = mr^2\bar{\omega} = 6,626176 \cdot 10^{-34} - const$ [1], [2].

Поскольку постоянная Планка является фундаментальной величиной Квантовой механики, описывающей поведение обитателей микромира, то закон сохранения кинетического момента оказывается главным законом, управляющим формированием и поведением элементарных частиц. Так как постоянная Планка имеет размерность момента количества движения или кинетического момента и та как это - понятие классической ньютоновской механики, то законы этой механики должны работать в микромире также успешно, как и в

макромире. Это уже доказанный факт. Дальше мы подтвердим достоверность этого утверждения на примере новой теории электрона.

7. Приложение общих теорем механодинамики к теории удара

7.1. Основные определения

Мы уже отметили, некорректность связи ударного импульса с ударной силой. Суть этой некорректности в том, что с увеличением времени действия ударного импульса увеличивается сила удара и она теряет характер ударного действия. Поэтому закладываем в понятие «ударный импульс» лишь изменение количества движения тела или механической системы, то есть результат действия ударной силы. Мы уже заменили понятие сила удара понятием ударная сила, которая определяется, как частное от деления величины суммарной силы сопротивления движению тела при ударе на время её удара. С учетом изложенного и будем рассматривать явление удара.

Ударное действие силы зависит от упругих свойств соударяющихся тел. Эти свойства характеризуются величиной, называемой **коэффициентом восстановления**.

Процесс удара о плиту, например, падающего шара можно разделить на две фазы.

1. В момент начала удара скорости всех частиц шара убывают до нуля (рис. 21, а). Шар деформируется, и его кинетическая энергия $0,5mV^2$ переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформируемого тела (рис. 21, б).

2. Шар под действием внутренних упругих сил начинает восстанавливать свою форму, и потенциальная энергия переходит в кинетическую, - шар начинает двигаться в обратном направлении (рис. 21, б). В конце удара скорости частиц шара оказываются меньше их скорости до удара, за счет этого уменьшается и кинетическая энергия, так как часть ее идет на деформацию шара. В начале удара скорость шара \bar{V} , а в конце \bar{U} . На основании этого вводится величина $k = U/V$, называемая коэффициентом восстановления при ударе.

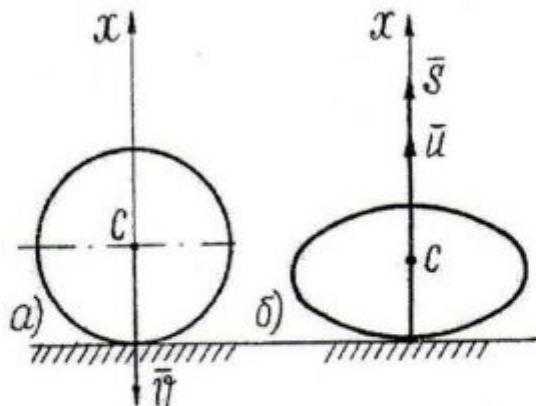


Рис. 21. Схема к описанию процесса удара

Величина k , равная отношению модуля скорости тела в конце удара U к модулю скорости V в начале удара называется коэффициентом восстановления при ударе.

Из определения следует, что для абсолютно упругого удара $k=1$, а абсолютно неупругого удара $k=0$ и вся механическая энергия теряется на деформацию и нагревание соударяющихся тел.

Для экспериментального определения k можно воспользоваться формулой Галилея. До удара $V = \sqrt{2gH}$, после удара $U = \sqrt{2gh}$. Отсюда

$$k = \frac{U}{V} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \quad (108)$$

Здесь H - высота падения тела; h - высота подъема тела после удара о плиту. Значения некоторых k .

Дерево о дерево - $k = 1/2$;

сталь о сталь - $k = 5/9$;

стекло о стекло - $k = 15/16$.

При изучении удара действием неударных сил (например, сил тяжести) пренебрегают из-за их малости. Пренебрегают также и перемещением точек тела при ударе. В основе изучения удара лежит изменение скоростей точек тела за время удара.

7.2. Общие теоремы теории удара

Общие теоремы теории удара базируются на общих теоремах механодинамики.

Теорема об изменении количества движения системы при ударе. Для одной точки действие внешних сил \bar{S}_i равно

$$\bar{S}_i = m_i(\bar{U}_i - \bar{V}_i). \quad (109)$$

Для системы точек можем записать

$$\sum m_i \bar{U}_i - \sum m_i \bar{V}_i = \sum \bar{S}_i \quad (110)$$

или

$$\bar{Q}_U - \bar{Q}_V = \sum \bar{S}_i^H + \sum \bar{S}_i^B. \quad (111)$$

По свойству внутренних сил $\sum \bar{S}_i^B = 0$. Поэтому

$$\bar{Q}_U - \bar{Q}_V = \sum \bar{S}_i^H. \quad (112)$$

Изменение количества движения системы $\bar{Q}_U - \bar{Q}_V$ за время удара равно сумме действий всех внешних сил. В проекции на ось ОХ

$$Q_{Ux} - Q_{Vx} = \sum S_{ix}. \quad (113)$$

Если $\sum S_{ix} = 0$, то $Q_{Ux} - Q_{Vx} = 0$, то есть количество движения системы не изменяется. Следовательно, внутренние действия сил не могут изменить количества движения всей системы.

7.3. Теорема об изменении главного момента количества движения при ударе

Если равнодействующая действий внешних сил \bar{S}_i , то, учитывая, что за время удара тело остается неподвижным, определим по теореме Вариньона сумму моментов векторов $m_i \bar{V}_i, m_i \bar{U}_i, \bar{S}_i$ относительно какого-нибудь центра О.

$$\bar{m}_o(m_i \bar{U}_i) - \bar{m}_o(m_i \bar{V}_i) = \bar{m}_o(\bar{S}_i). \quad (114)$$

Для всех точек системы

$$\sum \bar{m}_o(m_i \bar{U}_i) - \sum \bar{m}_o(m_i \bar{V}_i) = \sum \bar{m}_o(\bar{S}_i). \quad (115)$$

Обозначим главные моменты количества движения системы относительно центра О в конце и начале удара:

$$\bar{K}_U = \sum \bar{m}_o(m_i \bar{U}_i), \quad \bar{K}_V = \sum \bar{m}_o(m_i \bar{V}_i). \quad (116)$$

Тогда

$$\bar{K}_U - \bar{K}_V = \sum \bar{m}_o(\bar{S}_i), \quad (117)$$

то есть изменение за время удара главного момента количества движения системы относительно какого-нибудь центра О равно сумме моментов всех действий на систему внешних сил относительно того же центра.

Если $\sum \bar{m}_o(\bar{S}_i) = 0$, то $\bar{K}_U = \bar{K}_V$, то есть главный момент количества движения не изменяется. В проекциях на любую ось, например, ось ОХ имеем $K_{Vx} = \sum m_x(\bar{S}_i)$.

7.4. Частные случаи удара

1. Удар тела о неподвижную преграду.

Если нормаль к поверхности тела в точке его касания с плитой проходит через центр масс тела, то удар называется центральным.

Если \bar{V} центра масс тела в начале удара направлена по нормали к плите, то удар прямой. В противном случае - косой.

При прямом ударе о плиту (рис. 21)

$$\bar{Q}_V = M\bar{V}, \quad \bar{Q}_U = M\bar{U} \Rightarrow \bar{Q}_U - \bar{Q}_V = \bar{S}_1 \Rightarrow M(\bar{U} - \bar{V}) = \bar{S}.$$

Но при прямом ударе о плиту векторы \bar{U} и \bar{V} направлены противоположно друг другу, поэтому $M(U + V) = S$, кроме того

$$k = U/V, \quad S = M(k+1)V. \quad (118)$$

Ударное действие \bar{S} тем больше, чем больше k .

2. Прямой центральный удар двух тел (удар шаров рис. 22).

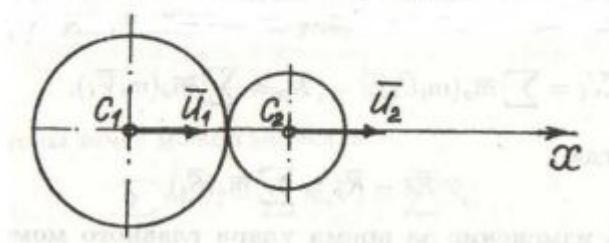


Рис. 22. Схема удара двух шаров

Удар называется прямым и центральным, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке касания проходит через их центры.

Считая M_1, M_2, V_{1x}, V_{2x} и k известными, найдем U_{1x} и U_{2x} . Для этого применим теорему об изменении количества движения к соударяющимся телам, рассматривая их как систему.

$$M_1 U_{1x} + M_2 U_{2x} = M_1 V_{1x} + M_2 V_{2x}. \quad (119)$$

Так как масса шаров разная, то $V_{1x} > V_{2x}$ и $U_{1x} \leq U_{2x}$, поэтому

$$k = \left| \frac{U_{1x} - U_{2x}}{V_{1x} - V_{2x}} \right| = -\frac{U_{1x} - U_{2x}}{V_{1x} - V_{2x}}. \quad (120)$$

Действия сил соударяющихся тел:

$$S_{1x} = M_1 (U_{1x} - V_{1x}), \quad S_{2x} = -S_{1x}. \quad (121)$$

Здесь возможны два предельных случая:

а) абсолютно неупругий удар ($k = 0$).

Из (119) и (120) имеем

$$U_{1x} = -U_{2x} = \frac{M_1 V_{1x} + M_2 V_{2x}}{M_1 + M_2}. \quad (122)$$

Подставляя полученный результат в выражение (119), получим действие силы

$$S_{1x} = -S_{2x} = \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2} (V_{2x} - V_{1x}). \quad (123)$$

б) абсолютно упругий удар ($k = 1$). Из (119) и (120) имеем

$$U_{1x} = V_{1x} - \frac{2M_2}{M_1 + M_2} (V_{1x} - V_{2x}), \quad (124)$$

$$U_{2x} = V_{2x} + \frac{2M_2}{M_1 + M_2} (V_{1x} - V_{2x}). \quad (125)$$

Ударный импульс

$$S_{2x} = -S_{1x} = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2} (V_{1x} - V_{2x}). \quad (126)$$

При абсолютно упругом ударе действие силы вдвое больше, чем при абсолютно неупругом. Когда $M_1 = M_2$; $U_{1x} = V_{2x}$ и $U_{2x} = V_{1x}$ шары одинаковой массы при абсолютно упругом ударе обмениваются скоростями.

7.5. Удар по врачающемуся телу

$$\bar{K}_{1z} - \bar{K}_{oz} = \bar{m}_z (\bar{S}); \quad I_z (\omega_1 - \omega_o) = m_z (\bar{S}).$$

Из этого имеем

$$\omega_1 = \omega_o + \frac{m_z(\bar{S})}{I_z}. \quad (127)$$

Угловая скорость тела за время удара изменяется на величину, равную отношению момента ударного действия $m_z(\bar{S})$ к моменту инерции I_z тела относительно оси вращения.

8. РАБОТА, МОЩНОСТЬ, ЭНЕРГИЯ

8.1. Работа силы

Для характеристики действия силы на точку или тело при их движении вводится понятие о работе силы. При ускоренном движении точки или тела работу совершает ньютонаовская сила. При равномерном движении точки или тела ньютонаовская сила отсутствует, а работа совершается или постоянной активной силой или силой инерции. При замедленном движении точки или тела работа совершается только силой инерции. Таким образом, перед тем как определять работу силы надо обязательно установить вид движения материальной точки, так как от этого зависит сила, совершающая работу. Однако в любом случае элементарная работа dA силы F_τ на бесконечно малом перемещении dS равна

$$dA = F_\tau dS, \quad (128)$$

где F_τ - проекция силы \bar{F} на касательную к траектории, направленную в сторону перемещения точки. Размерность работы в системе СИ $N \cdot m = Дж(Джоуль)$.

Составляющая F_n , формируя давление на связь, которая (при идеальных связях) считается недеформируемой, не совершает работу. Поскольку $F_\tau = F \cdot \cos\alpha$, то

$$dA = F \cdot dS \cdot \cos\alpha. \quad (129)$$

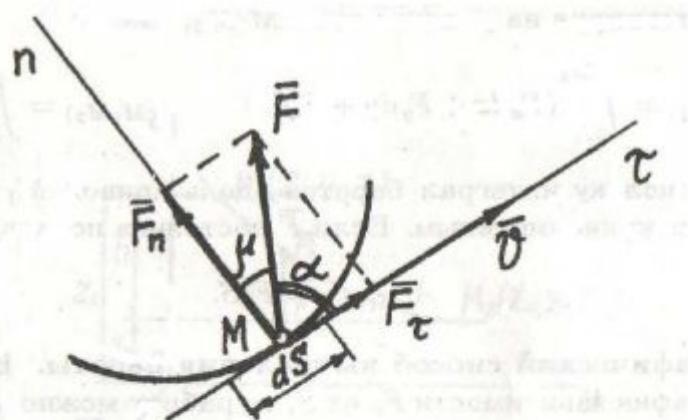


Рис. 23. Схема к анализу работы силы \bar{F}

Элементарная работа dA силы \bar{F} равна произведению модуля силы F на элементарное перемещение dS и на косинус угла α между направлением силы \bar{F} и направлением перемещения dS .

Следствия, вытекающие из формулы (129):

- 1) если $\alpha < 90^\circ$, то $dA > 0$ - ускоренное движение;

- 2) если $\alpha = 0$, то $dA = FdS$ - ускоренное движение;
- 3) если $\alpha > 90^\circ$, то $dA < 0$ замедленное движение;
- 4) если $\alpha = 180^\circ$, то $dA = -FdS$ - замедленное движение;
- 5) если $\alpha = 90^\circ$, то $dA = 0$ - равномерное движение.

Знак работы имеет следующий смысл: 1 - работа положительна, когда сила ускоряет движение; 2 - работа отрицательна, когда сила замедляет движение.

Аналитическое выражение элементарной работы. Работу силы \bar{F} на перемещении dS можно вычислить как сумму работ ее составляющих F_x, F_y, F_z на перемещениях dx, dy, dz , то есть

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz \Rightarrow dA = dA_x + dA_y + dA_z. \quad (130)$$

Это аналитическое выражение элементарной работы силы. Интегрируя на участке пути M_1M_2 , имеем

$$A(M_1M_2) = \int_{M_1}^{M_2} (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \Rightarrow A(M_1M_2) = \int_{M_1}^{M_2} F_t dS.$$

Поскольку интеграл берется вдоль кривой M_1M_2 , то он является криволинейным. Если \bar{F} постоянна по модулю, то

$$A(M_1M_2) = F_t dS. \quad (131)$$

Графический способ вычисления работы. Если известен график зависимости F_t от S , то работу можно вычислить графически, измерив площадь S_1ABS_2 (рис. 24). С учетом масштаба величин F_t и S эта площадь будет равна работе силы F_t на перемещении S . Единица измерения работы в системе СИ $N \cdot m = Дж$.

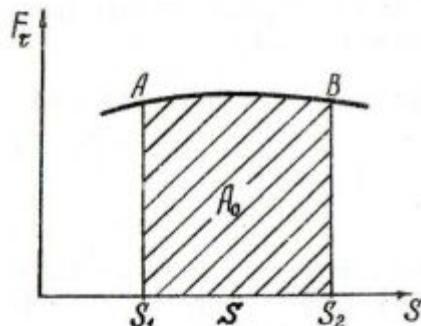


Рис. 24. Схема к графическому определению работы силы F_t

Пример. Вычислить работу силы тяжести (рис. 25).

$$A(M_1M_2) = \int_{S_1}^{S_2} -P dz = -P(z_1 - z_2) = +Ph,$$

где $h = z_1 - z_2$.

Работа силы тяжести равна произведению модуля силы на вертикальное перемещение точки ее приложения

$$A(M_1M_2) = \pm Ph.$$

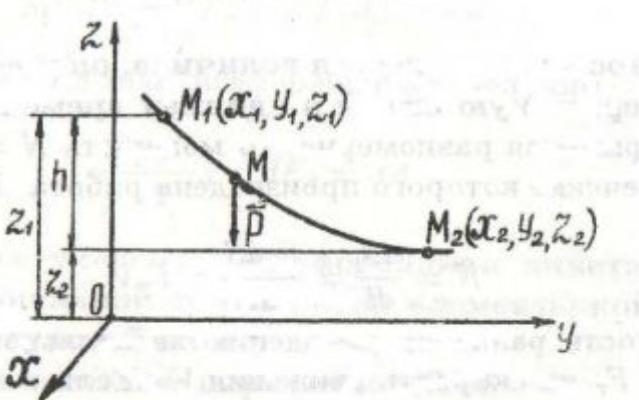


Рис. 25. Работа силы тяжести \bar{P}

Пример. Вычислить работу силы, приложенной к вращающемуся телу (рис. 26).

$$dA = F_t dS = F_t \cdot r d\varphi; \quad dS = r d\varphi.$$

С другой стороны $F_t r = m_z (\bar{F}) = M_z$ вращающий момент. Поэтому $dA = M_z d\varphi$, откуда

$$A = \int_0^\varphi M_z d\varphi.$$

Если $M_z = \text{const}$, то $A = M_z \cdot \varphi$. Если на тело действует пара сил, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси OZ, то M_z момент пары.

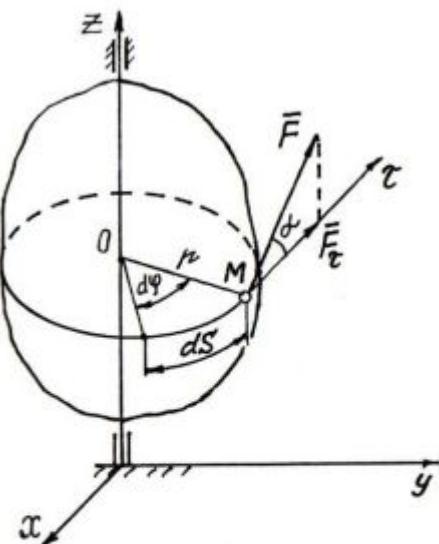


Рис. 26. Работа силы \bar{F} , вращающей тело относительно оси OZ

8.2. Мощность

Мощностью называется величина, определяющая работу, совершающую силой в единицу времени. Если работа совершается равномерно, то мощность $N = A/t$, где t - время, в течение которого произведена работа. В общем случае

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{F_\tau dS}{dt} = F_\tau V. \quad (132)$$

Мощность равна произведению касательной составляющей силы F_τ на скорость движения V . Если тело вращается под действием вращающего момента M_z , то

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{M_z d\phi}{dt} = M_z \omega. \quad (133)$$

То есть, мощность равна произведению вращающего момента M_z на угловую скорость ω вращения тела. При одной и той же мощности N вращающий момент M_z тем больше, чем меньше угловая скорость ω . Размерность мощности $H \cdot m/c = Джоуль/c = Ватт$.

8.3. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки

Кинетическая энергия материальной точки определяется выражением

$$E_k = \frac{mV^2}{2} = \frac{PV^2}{2g}. \quad (134)$$

Размерность кинетической энергии совпадает с размерностью работы.

Теорема. Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку.

Из основного закона механики (рис. 27) имеем $\bar{F} = m\bar{a}$. Проектируя уравнение $\bar{F} = m\bar{a}$ на направление скорости \bar{V} , получим (рис. 27)

$$ma_\tau = F_\tau \Rightarrow m \frac{dV}{dt} = F_\tau \Rightarrow mdV = F_\tau dt. \quad (135)$$

Умножим обе части уравнения (135) на V

$$mVdV = VF_\tau dt = F_\tau dS = dA \Rightarrow mVdV = dA.$$

Подведя mV под знак дифференциала, получим

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = dE_k = dA. \quad (136)$$

Мы доказали теорему: Дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку.

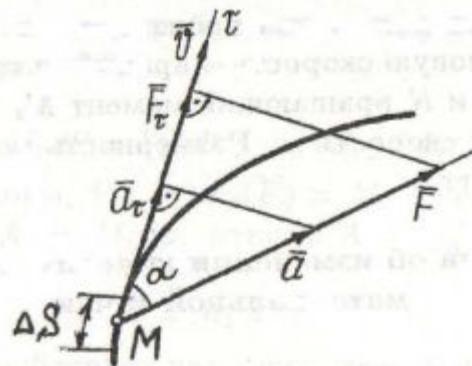


Рис. 27. Схема движения точки М под действием силы \bar{F}

Интегрируя последнее выражение, имеем

$$\int_{V_0}^V d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \int_0^A dA \Rightarrow \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = A. \quad (137)$$

Разность кинетических энергий материальной точки равна работе силы, приложенной к ней на пройденном пути.

8.4. Потенциальное силовое поле

Силовым полем называется часть пространства, в котором на находящуюся там материальную точку действует некоторая сила, зависящая от положения этой точки, то есть от координат x, y, z . Проекции силы, действующей на точку, в этом случае - функции координат.

$$F_x = f_1(x, y, z); \quad F_y = f_2(x, y, z); \quad F_z = f_3(x, y, z). \quad (138)$$

Силовое поле часто называют потенциальным. Оно описывается силовой функцией $U = U(x, y, z)$, частные производные которой по координатам равны проекциям силы поля на соответствующие оси координат.

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}. \quad (139)$$

Элементарная работа силы потенциального поля равна

$$dA = F_x \frac{\partial U}{\partial x} + F_y \frac{\partial U}{\partial y} + F_z \frac{\partial U}{\partial z} = dU.$$

То есть элементарная работа dA силы F потенциального поля равна полному дифференциальному силовой функции dU . Интегрируя полученный результат, имеем

$$\int_0^A dA = \int_{U_H}^{U_K} dU \Rightarrow A = U_K - U_H. \quad (140)$$

Работа силы потенциального поля на конечном пути равна $A = U_K - U_H$. Как видно, работа сил потенциального поля равна разности значений силовой функции в конечной U_K и начальной U_H точках пути и, следовательно, не зависит ни от вида, ни от длины траектории, по которой перемещается точка из положения M_H в положение M_K . Отсюда следует, что работа силы потенциального поля на замкнутой траектории равна нулю.

8.5. Понятие о потенциальной энергии

Если материальная точка перемещается в потенциальном поле из положения $M(x, y, z)$, в котором $U = U(x, y, z)$ в положение $M_o(x_o, y_o, z_0)$, в котором $U_o = U(x_o, y_o, z_o) = 0$, то работа A , производимая силой поля по перемещению точки из положения M в положение M_o , называется потенциальной E_o энергией точки M .

$$A = E_o = U_o - U = 0 - U. \quad (141)$$

В силовом поле Земли в качестве нулевой принимается точка на уровне моря. В ней $U_o = 0$ и поэтому в общем случае

$$E_o = U_o - U = -U. \quad (142)$$

На основании этого запишем:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial E_o}{\partial x}; \quad (143)$$

То есть проекции силы потенциального поля на координатные оси равны взятым с обратными знаками частным производным от потенциальной энергии по соответствующим координатам.

Пример. Определить работу силы P гравитации Земли по перемещению материальной точки из положения M_1 в положение M_2 (см. рис. 25).

Так как

$$dA = dU \text{ и } dU = \frac{\partial U}{\partial z} dz = -P_z dz, \text{ то } dA = -P_z dz.$$

Из этого имеем

$$A = \int_{z_1}^{z_2} -P dz = -P(z_2 - z_1) = P \cdot h.$$

8.6. Закон сохранения энергии

Пусть M_1 и M_2 - два разных положения материальной точки в силовом поле, в которых она имеет:

M_1	M_2
$E_{k1} = \frac{mV_1^2}{2}$	$E_{k2} = \frac{mV_2^2}{2}$
$E_{o1} = U_o - U_1$	$E_{o2} = U_o - U_2$
$U_1 = U_o - E_{o1}$	$U_2 = U_o - E_{o2}$

Поскольку $U_2 - U_1 = A$ и $\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = A$, то

$$\frac{mV_2^2}{2} - \frac{mV_1^2}{2} = U_2 - U_1 = E_{o1} - E_{o2}. \quad (144)$$

Отсюда

$$\frac{mV_2^2}{2} + E_{o2} = \frac{mV_1^2}{2} + E_{o1} = const. \quad (145)$$

При движении материальной точки в потенциальном силовом поле сумма кинетической и потенциальной энергий остается постоянной. Этот результат, выражающий закон сохранения только механической энергии и не распространяется на другие виды энергии, например, электромагнитную.

8.7. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении

Кинетическая энергия материальной точки определяется по средней величине скорости её движения при любом виде движения. Теорема о кинетической энергии материальной точки в относительном движении часто применяется при решении инженерных задач. При этом необходимо принимать во внимание работу переносной \bar{F}_e и кориолисовой \bar{F}_k сил инерции на относительном перемещении точки.

Но так как кориолисово замедление \bar{b}_k всегда \perp относительной скорости \bar{V}_r , то работа кориолисовой силы инерции в относительном движении равна нулю и эта сила не входит в уравнение кинетической энергии. Поэтому уравнение кинетической энергии материальной точки в относительном движении с учетом (120) и (136) будет иметь вид

$$d\left(\frac{mV_r^2}{2}\right) = (F_x + F_{ex})dx + (F_y + F_{ey})dy + (F_z + F_{ez})dz. \quad (146)$$

Правая часть этого уравнения выражает элементарную работу сил \bar{F} и \bar{F}_e на относительном перемещении точки.

8.8. Пример гравитационной задачи

Известно, что Общая теория относительности (ОТО) А. Эйнштейна предсказывает искривление пространства гравитационным полем и существование черных дыр. Доказательством искривления пространства служили результаты наблюдений за отклонением траектории светового фотона далекой звезды гравитационным полем Солнца. Впоследствии эти результаты были признаны ошибочными. Законы Классической механики достаточно просто предсказывают эту ошибочность [5].

Если длина волны фотона λ , частота колебаний ν , то скорость фотона $C = \lambda \cdot \nu$ и его энергия E определяются зависимостями:

$$E = h \cdot \nu = h \cdot C / \lambda = mC^2, \quad (147)$$

где $h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ - постоянная Планка.

Сила F_F , движущая световой фотон с длиной волны $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-7} \text{ м}$ со скоростью $C = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$, будет равна [5]

$$F_F = \frac{hC}{\lambda^2} = \frac{6,26 \cdot 10^{-34} \cdot 2,998 \cdot 10^8}{(5,0 \cdot 10^{-7})^2} = 7,51 \cdot 10^{-13} \text{ Н.} \quad (148)$$

Учитывая массу Солнца $M = 2 \cdot 10^{30} \text{ кг}$, радиус Солнца $R = 6,96 \cdot 10^8 \text{ м}$, постоянную гравитации $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$ и обозначая массу фотона через m , определим силу F_g гравитации Солнца, действующую на пролетающий мимо фотон, по формуле

$$F_g = G \frac{mM}{R^2} = G \frac{hM}{\lambda C R^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{6,26 \cdot 10^{-34} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{0,65 \cdot 10^{-6} \cdot 2,998 \cdot 10^8 \cdot (6,96 \cdot 10^8)^2} = 0,88 \cdot 10^{-33} \text{ Н.} \quad (149)$$

Тангенс угла отклонения фотона от прямолинейного движения при пролете вблизи Солнца будет равен

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_g}{F_F} = \frac{0,88 \cdot 10^{-33}}{7,51 \cdot 10^{-13}} = 8,53 \cdot 10^{-20}. \quad (150)$$

Если указанный фотон пролетает вблизи Солнца по прямой, которая параллельна линии, соединяющей центры масс Солнца и Земли, то величина его отклонения ΔS от прямолинейного движения в окрестностях Земли будет равна (рис. 28)

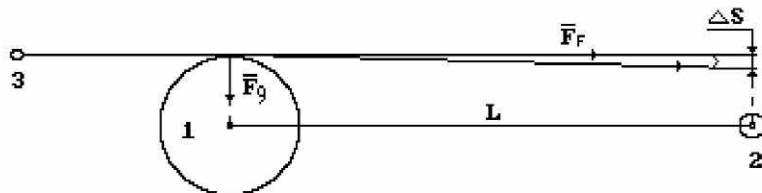


Рис. 28. Схема к анализу искривления траектории фотона гравитационным полем Солнца: 1-Солнце; 2- Земля; 3- звезда

$$\Delta S = L \cdot \operatorname{tg} \alpha = 1,51 \cdot 10^{11} \cdot 8,53 \cdot 10^{-20} = 1,30 \cdot 10^{-10} \text{ м.} \quad (151)$$

где $L = 1,51 \cdot 10^{11} \text{ м}$ - расстояние от Земли до Солнца.

Наука пока не располагает приборами, способными зафиксировать величину $\Delta S = 1,80 \cdot 10^{-10} \text{ м}$.

Гравитационный радиус R_g Солнца, при котором оно превращается в черную дыру, сейчас определяется по формуле, не учитывающей длину волны фотона

$$R_g = \frac{2GM}{C^2} = \frac{2 \cdot 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2 \cdot 10^{30}}{(2,998 \cdot 10^8)^2} = 2,97 \cdot 10^3 \text{ м.} \quad (152)$$

Если гравитационный радиус черной дыры определять из равенства гравитационной силы F_g силе F_F , движущей фотон, то длина волны фотона учитывается.

$$\frac{G \cdot m \cdot M}{R_g^2} = \frac{m \cdot C^2}{\lambda} \Rightarrow R_g = \frac{1}{C} \sqrt{G \cdot M \cdot \lambda}. \quad (153)$$

Для Солнца и светового фотона с $\lambda = 5,0 \cdot 10^{-7}$ м имеем

$$R_g = \frac{1}{2,998 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,0 \cdot 10^{30} \cdot 5,5 \cdot 10^{-7}} = 2,72 \cdot 10^{-2} \text{ м}. \quad (154)$$

Для гамма фотона с длиной волны $\lambda = 1 \cdot 10^{-18}$ м гравитационный радиус R_g Солнца, как черной дыры, будет равен

$$R_g = \frac{1}{2,998 \cdot 10^8} \cdot \sqrt{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 2,0 \cdot 10^{30} \cdot 1,0 \cdot 10^{-18}} = 3,85 \cdot 10^{-8} \text{ м}. \quad (155)$$

и ему будет соответствовать плотность вещества Солнца $\rho = 2,63 \cdot 10^{52} \text{ кг/м}^3$. Если учесть, что плотность ядер атомов оценивается величиной $\rho = (1,2 - 2,4) \cdot 10^{17} \text{ кг/м}^3$, то появляются серьезные основания сомневаться в существовании черных дыр [5].

Таким образом, ошибка в определении гравитационного радиуса черной дыры по формуле (152) составляет 11 порядков, но астрономы до сих пор не знали об этом [5].

9. ДИНАМИКА МЕХАНИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Механической системой материальных точек или тел называется такая их совокупность, в которой положение или движение каждой точки или тела зависят от положения и движения всех остальных точек (тел). Классическим примером механической системы являются трактор, комбайн, автомобиль.

Совокупность тел, между которыми нет никаких сил взаимодействия (группа работающих в поле тракторов), не образует механическую систему. Силы, действующие на точки или тела системы, могут быть внешними и внутренними. Внешними называют силы, действующие на точки системы со стороны других тел или точек, не входящих в состав данной системы. Внутренними называют силы, действующие на точки системы со стороны других точек или тел этой же системы. Как внешние, так и внутренние силы могут быть в свою очередь или активными, или реакциями связей.

Основное свойство внутренних сил заключается в том, что геометрическая сумма (главный вектор) всех внутренних сил системы равна нулю. Это свойство вытекает из четвёртого закона механодинамики.

Сумма моментов (главный момент) всех внутренних сил системы относительно любого центра или оси также равняется нулю.

9.1. Масса системы. Центр масс

Движение системы зависит не только от действующих на нее сил, но и от ее суммарной массы и распределения масс, входящих в систему. Масса системы M равна арифметической сумме масс m_i всех точек или тел, образующих систему $M = \sum m_i$.

Как известно, координаты центра тяжести тела определяются по формулам:

$$x_c = \frac{\sum p_i x_i}{P}; \quad y_c = \frac{\sum p_i y_i}{P}; \quad z_c = \frac{\sum p_i z_i}{P}, \quad (156)$$

где x_i, y_i, z_i - координаты точек приложения сил тяжести частиц тела, p_i - веса частиц тела, P - вес всего тела.

Учитывая, что $p_i = m_i g$ и $P = Mg$, имеем:

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{M}; \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{M}, \quad (157)$$

где x_c, y_c, z_c - координаты геометрической точки С, называемой центром масс, системы (рис. 29).

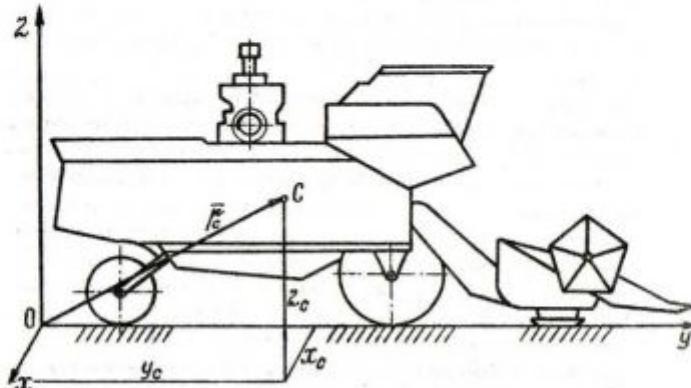


Рис. 29. Схема комбайна - механической системы

Если положение центра масс определяется его радиусом-вектором \bar{r}_c , то

$$\bar{r}_c = \sum \frac{m_i \bar{r}_i}{M}, \quad (158)$$

где \bar{r}_i - радиусы-векторы точек, образующих систему.

В однородном поле тяжести положения центра масс и центра тяжести совпадают, но понятия эти не тождественны. Понятие о центре тяжести имеет смысл для твердого тела, находящегося в однородном поле тяжести. Понятие о центре масс имеет смысл для любой системы материальных точек или тел, находящихся как в поле тяжести, так и вне этого поля.

9.2. Момент инерции тела относительно оси

Положение центра масс не полностью характеризует распределение масс системы. Например, при увеличении r (рис. 30) положение центра масс С системы двух шаров и штанги, соединяющей их, не меняется, а распределение масс станет другим, и изменится движение (вращение замедлится).

Чтобы учесть распределение масс в системе, введено понятие **момент инерции системы**, который характеризует распределение масс.

Моментом инерции тела (системы) относительно данной оси (или осевым моментом) называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек этого тела (системы) на квадрат их расстояний r_i^2 до оси.

$$I_z = \sum m_i r_i^2. \quad (159)$$

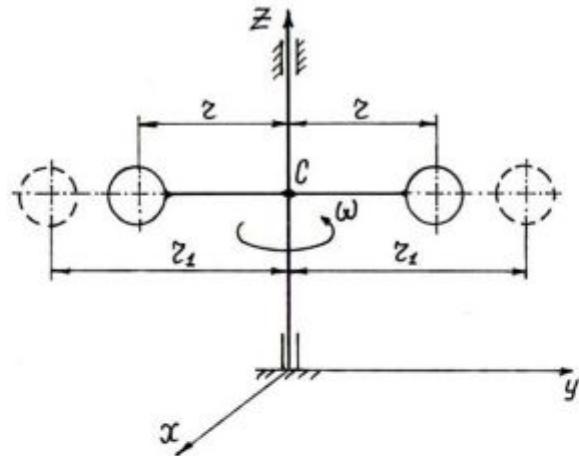


Рис. 30. Схема к определению момента инерции системы двух шаров

Момент инерции тела (системы) относительно любой оси является величиной положительной и не равной нулю.

Осьевой момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении. Единицей измерения момента инерции в системе СИ будет $\text{кг} \cdot \text{м}^2$.

При вычислении осевых моментов инерции расстояния от точек тела или системы до осей можно выражать через координаты этих точек. Например, через координаты точки M_i тела (рис. 31).

$$I_x = \sum m_i \cdot r_{ix}^2; \quad I_y = \sum m_i \cdot r_{iy}^2; \quad I_z = \sum m_i \cdot r_{iz}^2$$

или

$$\begin{aligned} I_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2); \quad I_y = \sum m_i (x_i^2 + z_i^2); \\ I_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \tag{160}$$

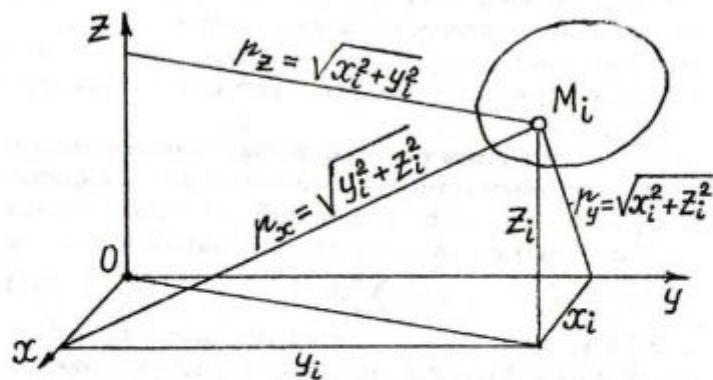


Рис. 31. К определению осевых моментов инерции

В плоскости XOY (если материальная точка лежит в этой плоскости).

$$I_x = \sum m_i y_i^2; \quad I_y = \sum m_i x_i^2; \quad I_o = I_x + I_y. \tag{161}$$

Радиусом инерции тела относительно оси OZ, называется линейная величина r_z , определяемая равенством $I_z = M \cdot r_z^2$. То есть

$$r_z = \sqrt{x_c^2 + y_c^2}, \quad (162)$$

где x_c и y_c - координаты центра масс тела.

Радиус инерции тела равен расстоянию от оси OZ до той точки, в которой надо сосредоточить массу всего тела, чтобы момент инерции этой точки относительно оси OZ был равен моменту инерции всего тела относительно той же оси.

Для сплошного тела $I_z = \int r^2 dm$, но $dm = \rho dV$, где ρ - плотность вещества; V - объем тела; r - расстояние от элемента dm тела до оси OZ, поэтому

$$I_z = \int_{(V)} \rho h^2 dV = \int_{(V)} \rho (x^2 + y^2) dV;$$

$$I_x = \int_{(V)} \rho (y^2 + z^2) dV; \quad I_y = \int_{(V)} \rho (z^2 + x^2) dV.$$

9.3. Моменты инерции некоторых однородных тел

1. Момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой M относительно оси OZ, проходящей перпендикулярно стержню через его конец (рис. 32). Для любого элементарного отрезка длиной dx , величина $r = x$, масса $dm = \rho dx$. Поскольку плотность $\rho = M/l$, то

$$I_z = \int_0^l x^2 dm = \int_0^l x^2 \rho dx = \rho \frac{l^3}{3} \Rightarrow I_z = \rho \frac{l^3}{3} = \frac{1}{3} M l^2. \quad (163)$$

Таким образом, момент инерции однородного стержня относительно оси, перпендикулярной его концу, равен одной третьей произведения массы стержня на квадрат его длины.

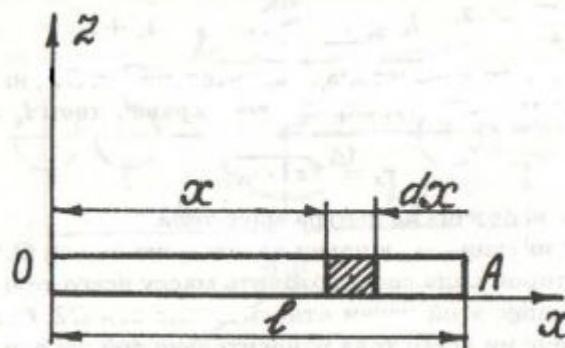


Рис. 32. Схема к определению момента инерции однородной пластинки

2. Момент инерции круглого однородного кольца радиуса r и массы m относительно оси OZ, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр (рис. 33), равен

$$I_z = \sum m_i r_i^2 = mr^2. \quad (164)$$

Момент инерции однородного кольца относительно оси OZ, проходящей через центр кольца перпендикулярно его плоскости, равен произведению массы кольца на квадрат его радиуса.

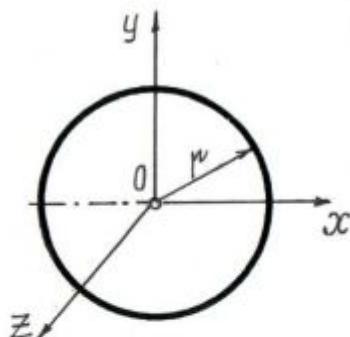


Рис. 33. К определению момента инерции однородного кольца

3. Момент инерции круглого однородного диска относительно оси OZ, проходящей через его центр перпендикулярно плоскости диска (рис. 34), равен

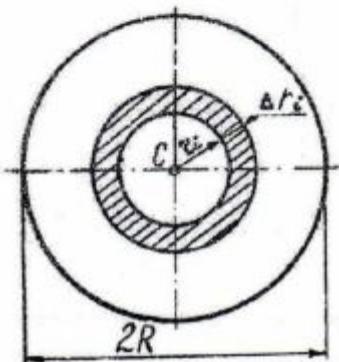


Рис. 34. К определению момента инерции однородного диска. Ось CZ перпендикулярна плоскости рисунка

$$I_z = \sum m_i r_i^2; \quad m_i = 2\pi r_i \cdot \Delta r_i \cdot \rho, \quad (165)$$

где $\rho = M / \pi R^2$ - поверхностная плотность круга.

Переходя к пределу, получим

$$I_z = 2\pi \rho \int_0^R r_i^3 dr_i = 0,5\pi R^4 \rho = 0,5\pi R^4 M / \pi R^2 = 0,5MR^2. \quad (166)$$

4. Момент инерции круглого цилиндра равен $I_z = 0,5MR^2$.

5. Момент инерции шара равен $I_z = 0,4MR^2$.

9.4. Момент инерции тел относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса)

Момент инерции тела относительно данной оси равен моменту инерции относительно оси, ей параллельной и проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы всего тела на квадрат расстояния между осями (рис. 35).

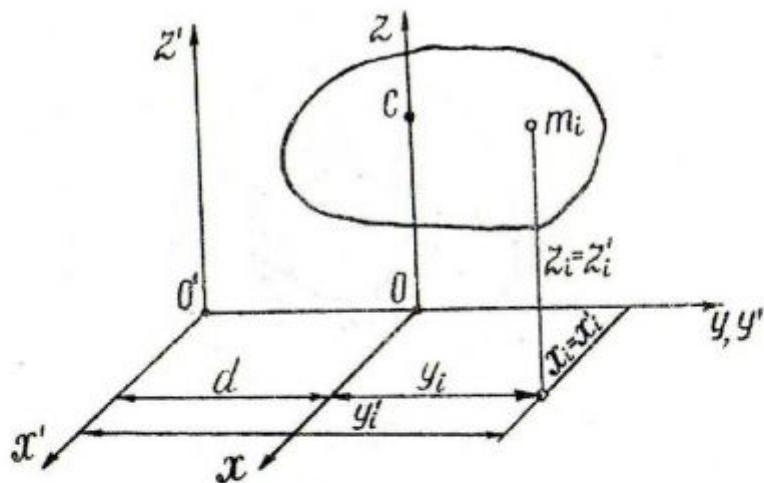


Рис. 35. К доказательству теоремы Гюйгенса

Момент инерции точки m_i тела относительно оси $O'Z'$ равен $m_i(x_i'^2 + y_i'^2)$. Тогда момент инерции тела относительно этой же оси определится по формуле

$$I_{z'} = \sum m_i(x_i'^2 + y_i'^2),$$

но из рис. 33 следует, что $x'_i = x_i$, а $y'_i = y_i + d$, поэтому

$$\begin{aligned} I_{z'} &= \sum m_i[x_i^2 + (y_i + d)^2] = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2 + 2y_id + d^2) = \\ &= \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + \sum 2m_iy_id + \sum m_id^2. \end{aligned} \quad (167)$$

Так как ось ОY лежит в плоскости, проходящей через центр масс С тела, то $\sum y_i = y_c = 0$, поэтому $\sum 2m_iy_id = 0$ и

$$I_{z'} = \sum m_i(x_i^2 + y_i^2) + \sum m_id^2 = I_z + Md^2. \quad (168)$$

Как видно, $I_{z'} > I_z$, поэтому из всех осей данного направления наименьший момент инерции будет относительно той оси, которая проходит через центр масс тела.

9.5. Физический маятник

Физическим маятником называется твердое тело, которое может совершать колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси под действием силы тяжести (рис. 34). Р - вес маятника; I_o - момент инерции относительно оси подвеса; a - расстояние от оси подвеса до центра масс С маятника.

Дальше будет показано, что дифференциальное уравнение колебаний физического маятника (на основании рис. 34) имеет вид

$$I_o \ddot{\varphi} = M_o = -P \cdot a \cdot \sin \varphi. \quad (169)$$

Обозначая $P \cdot a / I_o = k^2$ и ограничиваясь малыми колебаниями, когда $\sin \varphi \approx \varphi$, имеем

$$\ddot{\varphi} + k^2 \varphi = 0. \quad (170)$$

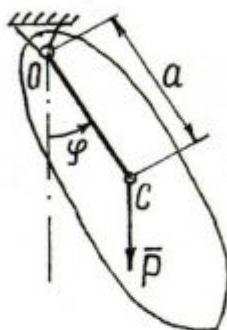


Рис. 36. Схема физического маятника

Это дифференциальное уравнение свободных колебаний точки и его общее решение имеет вид

$$\varphi = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt. \quad (171)$$

Если при $t = 0; \varphi = \varphi_0; kt = 0$, то $C_2 = \varphi_0$ и закон малых колебаний маятника при заданных начальных условиях запишется так

$$\varphi = \varphi_0 \cos kt. \quad (172)$$

Следовательно, малые колебания физического маятника являются гармоническими. Период T этих колебаний определяется по формуле

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{I_o}{P \cdot a}} \Rightarrow I_o = \frac{P \cdot a \cdot T^2}{4\pi^2}. \quad (173)$$

Как видно, для малых колебаний период от угла начального отклонения φ_0 не зависит. При $\varphi \leq 0,4 \text{рад} \approx 23^\circ$ указанная формула определяет период T с погрешностью до 1%.

9.6. Экспериментальное определение момента инерции тел

Подвесив тело так, чтобы ось подвеса OZ была горизонтальна, найдем период его малых колебаний T . Затем методом взвешивания найдем положение центра масс C тела и величину $OC = a$ (рис. 37, а). Тогда из формулы (173) будем иметь

$$I_{oz} = \frac{P \cdot a \cdot T^2}{4\pi^2}. \quad (174)$$

Определение момента инерции по способу крутильных колебаний. Испытуемое тело подвешивается в центре масс на проволоке к неподвижной точке C (рис. 37, б).

Поскольку момент упругих сил проволоки пропорционален углу ее закручивания $c\varphi$, то дифференциальное уравнение гармонических колебаний тела относительно оси CO имеет вид

$$I \ddot{\varphi} = -c\varphi, \quad (175)$$

где I - момент инерции тела относительно оси ОС.

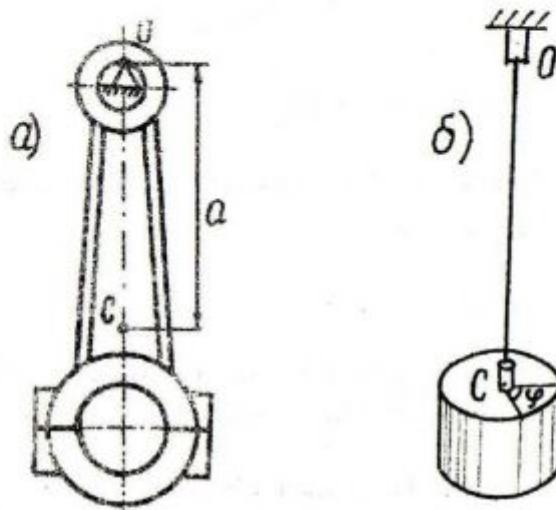


Рис. 37. К определению момента инерции тела

Так как момент инерции тела во вращательном движении играет ту же роль, что и масса тела при поступательном движении, то период колебаний определяется по аналогичной формуле (173).

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{c}}. \quad (176)$$

Для определения постоянной c находят период крутильных колебаний T_o эталонного тела на той же проволоке с известным моментом инерции I_o относительно оси СО.

Решая последнее уравнение относительно c и приравнивая результаты, имеем

$$c = \frac{4\pi^2 I}{T^2} = \frac{4\pi^2 I_o}{T_o^2} \Rightarrow \frac{I}{I_o} = \frac{T^2}{T_o^2}. \quad (177)$$

Откуда

$$I = \frac{I_o \cdot T^2}{T_o^2}. \quad (178)$$

9.7. Вращательное движение твёрдого тела и механической системы

Законы механодинамики позволяют описать все фазы вращательного движения твёрдого тела или их совокупностей, представляющих механическую систему, и проанализировать процесс генерации инерциальных моментов. Оказывается, что инерциальную энергию вращающихся тел и их совокупностей можно использовать в качестве дополнительной энергии и применять её для экономии электрической энергии на привод механических систем.

Методика применения законов механодинамики требует четкого учёта фазы движения или вращения материальных тел. Их три: ускоренное, равномерное и замедленное

движение (вращение). Начальной фазой вращения ротора электромеханической системы, вращающейся за счёт энергии электродвигателя, является ускоренное вращение. Оно действует в течение короткого промежутка времени в момент начала его вращения, но мы не можем игнорировать роль этой фазы в формировании равномерного вращения системы (рис. 38). Ускоренное вращение ротора электродвигателя обеспечивает активная ньютона сила, которая в этом случае формирует момент вращения ротора электродвигателя, поэтому у нас есть основания назвать его ньютоновским моментом M . Ему сопротивляются все механические сопротивления $-M_C$ и инерциальный момент $-M_i$ (рис. 38). В соответствии с главным принципом механодинамики уравнение моментов, действующих на ускоренно вращающийся ротор электродвигателя и всей его нагрузки, запишется так

$$M = M_i + \sum_{i=1}^n M_C \Rightarrow M - M_i - \sum_{i=1}^n M_C = 0 \quad (179)$$

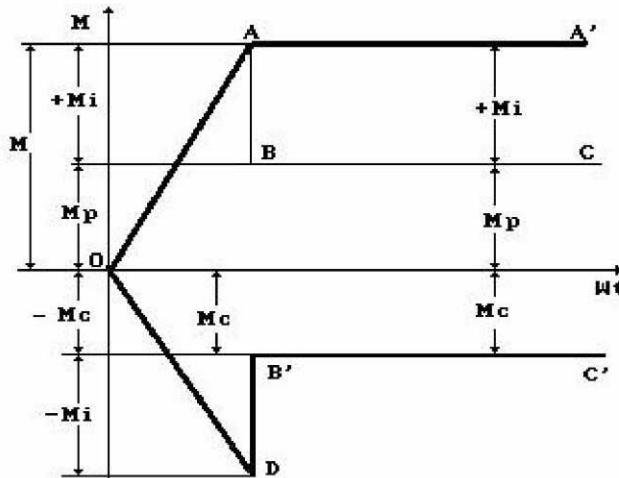


Рис. 38. Диаграмма изменения механических моментов вращающегося тела

Однако, для нас важнее фаза равномерного вращения, так как в ней скрыт весь многочасовый рабочий режим вращающейся механической системы. На рис. 38 моменты, приложенные к механической системе, вращающейся равномерно после короткой фазы ускоренного вращения. Равномерное вращение тела или механической системы описывает второй закон механодинамики, который гласит: **равномерное вращение тела при наличии сопротивлений происходит под действием инерциального момента M_i , а постоянный активный момент M_p преодолевает моменты сопротивления $\sum_i M_C$ вращению тела.**

Его математическая модель имеет вид

$$M_p + M_i = \sum_{i=1}^n M_C \Rightarrow M_p + M_i - \sum_{i=1}^n M_C = 0. \quad (180)$$

Как видно (180), суммарный $\sum_{i=1}^n M_C$ момент сопротивления вращению тела преодолевается не только активным приводным моментом M_p , но и инерциальным моментом M_i . В подобных уравнениях динамики Ньютона инерциальный момент M_i отсутствует, а в механодинамике (180) присутствует. Величина инерциального момента M_i зависит от момента инерции I вращающегося тела и определяется по формуле

$$M_i = I \cdot \varepsilon, \quad (181)$$

где ε - угловое ускорение вращения тела в фазе его ускоренного вращения, оно определяется по формуле

$$\int_0^t \varepsilon dt = \int_0^t d\omega \Rightarrow \varepsilon = \omega \cdot t. \quad (182)$$

Поскольку ω - угловая скорость вращения ротора, то для определения углового ускорения ε и инерциального момента M_i необходимо знать время ускоренного вращения ротора. Эта задача решается экспериментально.

Из рис. 38 следует, что наличие инерциального момента M_i при равномерном вращении механической системы позволяет использовать его для экономии энергии подобно тому, как сила инерции равномерно движущегося автомобиля используется для экономии топлива. Для этого надо периодически отключать электродвигатель от нагрузки. Тогда и подача, и потребление электрической энергии будет импульсной. Эту задачу можно решить двумя способами: электрическим и механическим. Рассмотрим механический способ решения этой задачи.

Известно, что пусковой (ньютоновский) момент M (рис. 39) при запуске электродвигателя в несколько раз больше рабочего момента M_p . Это обусловлено тем, что пуск электродвигателя - ускоренное вращение, при котором этому процессу препятствуют не только механические и рабочие силы сопротивлений, но и инерциальный момент M_i (рис. 39).

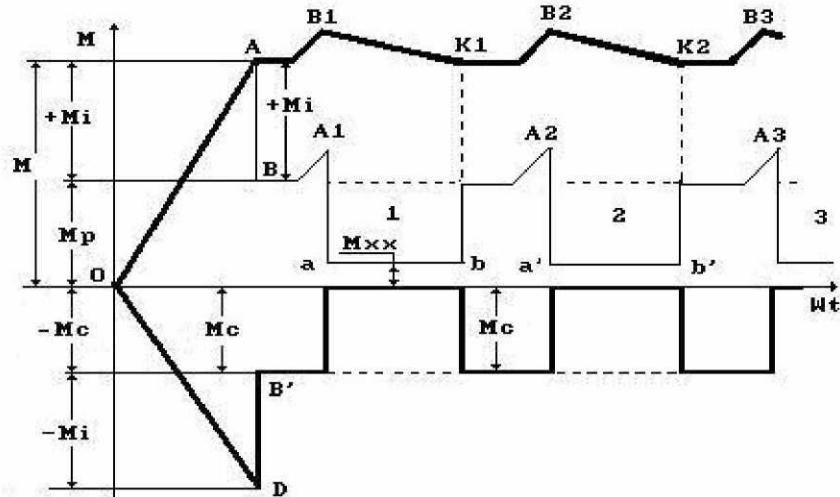


Рис. 39. Диаграмма изменения механических моментов вращающегося тела с дисбалансным приводом

На рис. 39 показаны изменения моментов, врачающих механическую систему при переходе от пускового ускоренного вращения к равномерному вращению. После завершения ускоренного вращения начинается процесс равномерного вращения. Механические и рабочие силы сопротивления вращению, достигнув максимума, сохраняют свои величины, которые формируют постоянный момент механических и рабочих сопротивлений. Инерциальный же момент M_i ведёт себя по другому. При переходе системы к равномерному вращению он меняет свой отрицательный знак на положительный и превращается в инерциальный момент, поддерживающий вращение электродвигателя, его привода и потребителя его механической энергии (рис. 39).

Нетрудно видеть (рис. 39), что инерциальный момент M_i , препятствовавший ускоренному вращению электродвигателя, никуда не исчезает. Он изменяет свое направление на противоположное при переходе к равномерному вращению и после отключения электрической энергии, формирующей рабочий момент M_p , инерциальный момент M_i готов поддержать вращение электродвигателя. Такое вращение называется вращением по инерции.

Возникает вопрос: нельзя ли использовать инерциальный момент M_i для совершения полезной механической работы? Инженеры многократно пытались сделать устройства для реализации этой идеи, но они оказывались ненадёжными и, как следствие, малоэффективными. Указанная идея получила своё воплощение лишь при импульсном использовании инерциального момента. Оказалось, что если его увеличивать импульсно и после этого разрывать связь вала электродвигателя с валом потребителя механической энергии с помощью обгонной муфты, то существуют режимы работы, при которых уменьшается расход электрической энергии на привод электродвигателя, оборудованного устройством импульсного увеличения инерциального момента M_i (рис. 40)

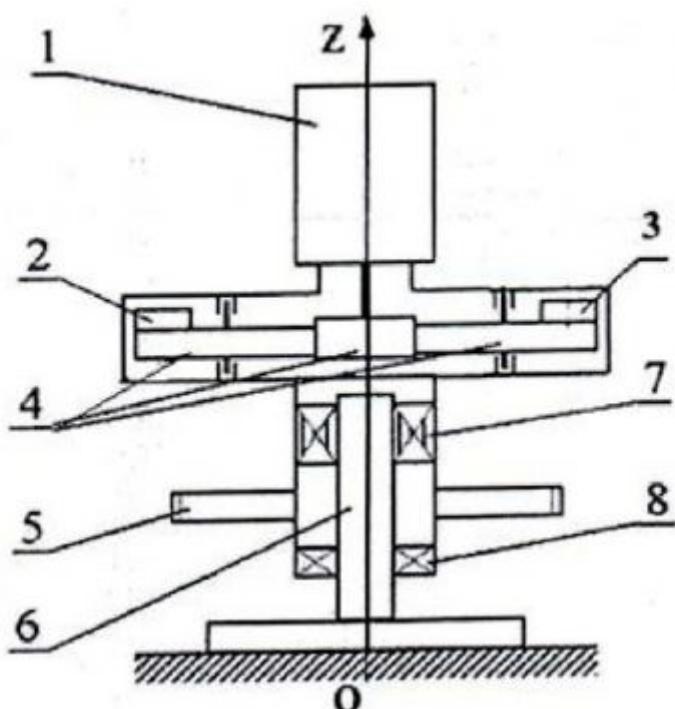


Рис. 40. Центробежный усилитель мощности: 1 – электродвигатель; 2 и 3 – дисбалансы; 4 – шестерни, 5 – зубчатое колесо; 6 – неподвижная ось; 7 – обгонная муфта; 8 – подшипник; г – радиус вращения центра масс дисбаланса;

Если в системе привода электродвигателя установить дисбалансы, то они будут генерировать импульсы моментов сил, которые импульсно увеличивают рабочий момент M_p (рис. 39, точки A1, A2, A3,...). Эти импульсы передаются всем вращающимся деталям. В результате импульсно увеличивается и инерциальный момент M_i (рис. 39, точки B1, B2, B3,...). Если в этот момент прервать механическую связь между электродвигателем и потребителем механической энергии с помощью обгонной муфты, то потребитель механической энергии будет вращаться некоторое время по инерции, а рабочий момент M_p на валу электродвигателя уменьшится до величины момента его холостого хода $M_{\text{хх}}$ (рис. 39). В результате электродвигатель некоторое время будет потреблять из электросети электроэнергию, только на холостой ход (рис. 39, а-б).

В момент, когда импульс инерциального момента M_i уменьшается до величины его среднего значения (рис. 39, точки К1, К2, К3...), обгонная муфта вновь включается и рабочий момент M_p электродвигателя увеличивается до своей прежней величины.

Итак, в процессе работы электродвигателя с дисбалансным приводом, появляются моменты времени полного освобождения электродвигателя от рабочей нагрузки (рис. 39, зоны 1, 2, 3...) и использование в эти моменты инерциальных импульсов M_i для привода потребителя механической энергии.

Описанная схема работы электродвигателя с дисбалансным приводом (рис. 40) испытана и запатентована российским изобретателем Линевич Э.И. Она дала положительные экспериментальные результаты по экономии электрической энергии.

А теперь представим математическое описание работы электродвигателя с дисбалансным приводом. Поскольку его работа начинается с ускоренного вращения, то его работа описывается первым законом механодинамики, который формулируется так:
ускоренное вращение тела происходит под действием ньютонаского активного пускового момента M и моментов сопротивления вращению в виде инерциального момента M_i , и моментов M_c механических сопротивлений. Математическая модель этого закона имеет вид

$$M = M_i - \sum_{i=1}^n M_c, \quad (183)$$

Составляющие этой математической модели рассчитываются следующим образом.

$$M_i = \sum_{i=1}^n I_i \cdot \varepsilon, \quad (184)$$

$\sum_{i=1}^n I_i$ - сумма моментов инерции всех вращающихся деталей; ε - угловое ускорение вращения, которое определяется из формулы

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \cdot t, \quad (185)$$

ω_0 - начальная угловая скорость вращения, которая обычно равна нулю; ω - угловая скорость равномерного вращения; t - время от начала вращения до перехода к равномерному вращению.

Из формулы (185) при $\omega_0 = 0$, имеем

$$\varepsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{\pi \cdot n}{30 \cdot t} = \frac{0,10 \cdot n}{t}. \quad (186)$$

Здесь n - количество оборотов в минуту. $\sum_{i=1}^n I_i$ - сумма моментов инерции всех вращающихся деталей определяется теоретически по специальным формулам, учитывающим массу детали, её геометрию и расположение относительно оси вращения.

Следующая составляющая закона ускоренного вращения – инерциальный момент M_i . Он рассчитывается по формуле

$$M_i = \sum_{i=1}^n I_i \cdot \delta_i = \sum_{i=1}^n I_i \cdot \varepsilon - \sum_{i=1}^n M_c, \quad (187)$$

где δ_i - инерциальное замедление, генерируемое инерциальным моментом M_i ; $\sum_{i=1}^n M_c$ - сумма всех моментов механических и рабочих сопротивлений, которую можно принимать, с некоторыми допущениями, равной рабочему моменту M_p электродвигателя при установленном равномерном вращении.

Величина инерциального замедления δ_i вращения двигателя определяется из формулы (187)

$$\delta_i = \frac{\sum I_i \cdot \varepsilon - \sum_{i=1}^n M_c}{\sum_{i=1}^n I_i}. \quad (188)$$

Таким образом, все составляющие, входящие в закон ускоренного вращения (183), определены. Равномерное вращение электродвигателя и потребителя его механической энергии описывается формулой

$$M_p + \sum_{i=1}^n M_i - \sum_{i=1}^n M_c \Rightarrow M_p + \sum_{i=1}^n M_i - \sum_{i=1}^n M_c = 0. \quad (189)$$

Из этой математической модели следуют такой вывод. Рабочий момент M_p электродвигателя преодолевает все механические сопротивления $\sum_{i=1}^n M_c$, а сумма инерциальных моментов $\sum_{i=1}^n M_i$ равномерно вращает электродвигатель и потребителя его механической энергии.

Анализ процесса перехода от ускоренного к равномерному вращению показывает более простой метод расчёта инерциального момента M_i . Поскольку он является моментом сопротивления ускоренному вращению вместе с моментом рабочих и механических сопротивлений M_c , то его величина входит в пусковой момент M . Далее, если учесть, что при равномерном вращении рабочий момент M_p незначительно превышает момент механических и рабочих сопротивлений M_c , то инерциальный момент M_i можно определять, как разность между пусковым M и рабочим M_p моментами, то есть

$$M_i = M - M_p. \quad (190)$$

Итак, методики расчёта всех показателей ускоренного и равномерного вращений электродвигателя и потребителя его механической энергии представлены. Следующий этап – расчёт дисбалансного привода.

На рис. 41 показана схема для вывода уравнения импульса инерциального момента, генерируемого дисбалансами D_1 и D_2 . Обратим внимание на то, что центральная шестерня 1 на валу электродвигателя и две шестерни 2 и 3 с дисбалансами D_1 и D_2 представляют единую механическую систему, поэтому проекции F_x и F_y центробежных сил инерции \bar{F} , действующих на оба дисбаланса, формируют пары с моментами (рис. 41):

$$M_1 = F \cdot \sin \omega_2 t \cdot L = m \omega_2^2 (r - r_0)^2 \cdot (2R + 2r \cdot 2r \cos \omega_2 t - 2r_0 \cos \omega_2 t) \sin \omega_2 t; \quad (191)$$

$$M_2 = -F \cdot \cos\omega_2 t \cdot (r - r_0) \cdot \sin\omega_2 t = -m\omega_2^2 \cdot (r - r_0)^2 \sin\omega_2 t \cdot \cos\omega_2 t. \quad (192)$$

Обратим внимание также и на то (рис 41), что в начальный момент M_1 способствует вращению вала 1 электродвигателя, поэтому он взят со знаком плюс, а $-M_2$ препятствует вращению, поэтому взят со знаком минус. Закономерность изменения моментов этих пар и будет формировать дополнительное воздействие на вал 1 электродвигателя и потребителя его механической энергии.

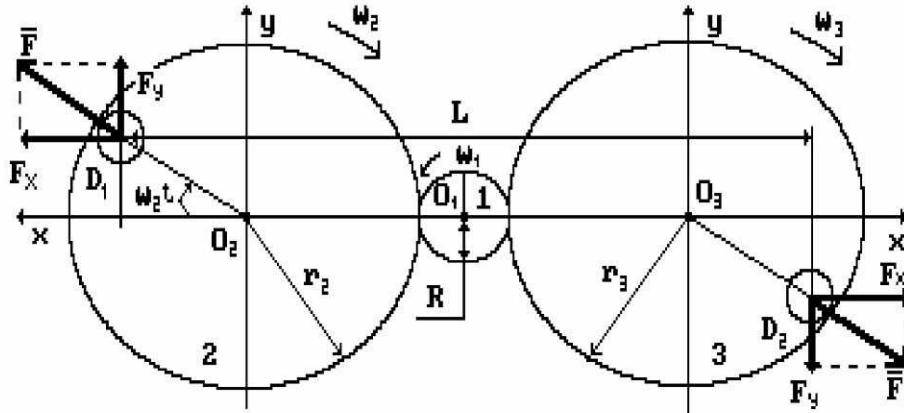


Рис. 41. Схема для анализа действия силы инерции \bar{F} на дисбалансы D_1 и D_2 :
R-радиус центральной шестерни 1; r – радиусы дисбалансных шестерён 2 и 3;
 r_0 - радиус дисбалансов D_1 и D_2

Анализ показывает, что теоретическая закономерность (193) изменения суммы моментов $M_1 + M_2$, как скалярных величин, близка к экспериментальной закономерности (рис. 42, сплошная искажённая синусоида).

$$M = M_1 + M_2 = m\omega_2^2(r - r_0)^2 \cdot \sin\omega_2(2R + 2r + 2rcos\omega_2 t - 2r_0cos\omega_2 t) - m\omega_2^2(r - r_0)^2 \sin\omega_2 t \cdot \cos\omega_2 t \quad (193)$$

Следует обратить внимание и на то (рис. 42), что положительная амплитуда импульсов моментов центробежных сил инерции дисбалансов и угол поворота ωt_1 вала электродвигателя, формирующий положительную амплитуду, больше отрицательной амплитуды и больше угла ωt_2 , формирующего отрицательную амплитуду импульса. На рис. 39 это отражено схематически импульсным увеличением рабочего момента с вершинами импульсов в точках A1, A2, A,....

Амплитуда импульса при угле поворота дисбалансов на 90° (рис. 42, сплошная искажённая синусоида) значительно меньше его теоретической величины. Обусловлено это тем, этот импульс соответствует моменту отключения вала электродвигателя от вала потребителя его механической энергии с помощью обгонной муфты. Так, что большая, теоретическая величина импульса передаётся только валу потребителя механической энергии и увеличивает его инерциальный момент M_i .

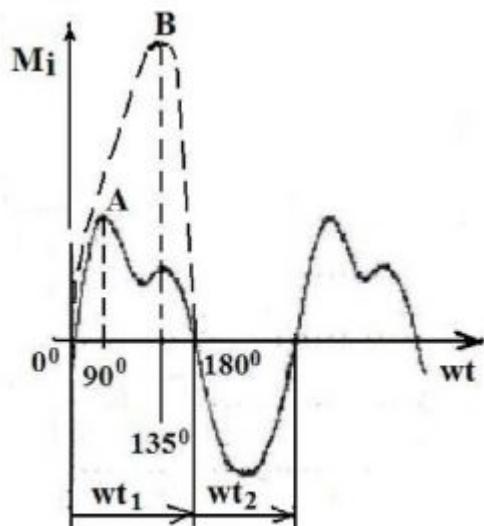


Рис. 42. Экспериментальный (А) и теоретический (В) максимумы суммы импульсов составляющих M_1 и M_2 моментов центробежных сил инерции дисбалансов

Анализ представленной теории механодинамики работы дисбалансного привода показывает, что этот привод надо монтировать на корпусе потребителя механической энергии. В этом случае положительная и отрицательная амплитуды импульса окажутся на валу потребителя и большая величина положительной амплитуды импульса усилит вращение потребителя, а вал электродвигателя в этот момент будет отключён от вала потребителя и энергия, потребляемая электродвигателем из сети уменьшится. Из изложенного следует большая роль параметров обгонной муфты в оптимизации амплитуды инерциального момента M_i .

9.8. Дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы

Классическим примером движущейся системы является движущийся трактор (рис. 43).

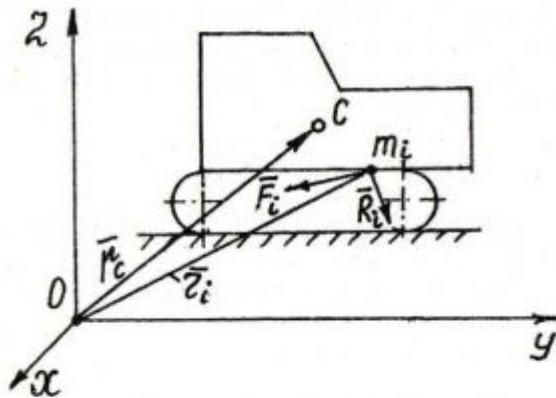


Рис. 43. К составлению дифференциальных уравнений движения системы

Выделим какую-нибудь точку системы с массой m_i . Обозначим равнодействующую всех внешних сил сопротивления через R_i , приложенных к точке а сил инерции – через F_i . Равнодействующую внутренних сил обозначим \bar{P}_i . Если механическая система движется ускоренно, то её точка m_i имеет ускорение \bar{a}_i и в соответствии с первым законом механодинамики уравнение её движения будет иметь вид

$$m_i \bar{a}_i = \bar{R}_i + \bar{F}_i + \bar{P}_i \Rightarrow m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \bar{R}_i + \bar{F}_i + \bar{P}_i. \quad (194)$$

Таким образом, можно составить уравнение движения всех точек системы, затем спроектировать их на оси координат и искать решения полученных уравнений. Но такой путь очень сложен и применяется редко. В большинстве случаев при решении задач механики достаточно знать некоторые суммарные характеристики движения системы в целом, а не каждой ее точки в отдельности. Эти суммарные характеристики определяются с помощью общих теорем динамики. При этом необходимо помнить, что центр масс механической системы может двигаться ускоренно, равномерно и замедленно и уравнения его движения будут аналогичны уравнениям движения материальной точки при соответствующих видах движений. Но в отличие от материальной точки на центр масс механической системы будут действовать еще внутренние силы и их моменты.

Теорема. Произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних и внутренних сил.

Чтобы найти этот закон, составим уравнение движения i -той точки системы

$$m_i \bar{a}_i = \bar{R}_i + \bar{F}_i + \bar{P}_i, \quad (195)$$

где \bar{R}_i - результирующая внешних сил сопротивления; \bar{F}_i - сила инерции; \bar{P}_i - внутренняя сила.

Затем сложим почленно левые и правые части полученного уравнения и найдем дифференциальные уравнения движения всех точек механической системы

$$\sum m_i \bar{a}_i = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i + \sum \bar{P}_i. \quad (196)$$

Так как сумма внутренних сил $\sum \bar{P}_i = 0$, то

$$\sum m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i, \quad (197)$$

где $i = 1, 2, 3, \dots, n$.

После такого сложения сил должны получить общие характеристики системы: массу M системы и ускорение \bar{a} ее центра масс. Зафиксируем положение центра масс С системы (рис. 43) с помощью радиуса-вектора \bar{r}_c , который определяется по формуле

$$\bar{r}_c = \frac{\sum m_i \bar{r}_i}{M}, \quad (198)$$

где M - масса всей системы (трактора). Перепишем уравнение (198) так

$$\sum m_i \bar{r}_i = M \bar{r}_c. \quad (199)$$

Продифференцируем левую и правую части равенства (199) дважды по времени

$$\sum m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2}. \quad (200)$$

Учитывая что $d^2 \bar{r}_c / dt^2 = \bar{a}_c$, имеем

$$\sum m_i \frac{d^2 \bar{r}_i}{dt^2} = M \bar{a}_c, \quad (201)$$

где \bar{a}_c - ускорение центра масс системы. Подставляя результат (201) в формулу (197), получим

$$M \bar{a}_c = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i. \quad (202)$$

Это уравнение выражает теорему о движении центра масс системы.

Сравнивая полученное уравнение (202) с уравнением движения материальной точки $m \ddot{a} = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i$, можем по другому сформулировать теорему.

Центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна массе всей системы и к которой приложены все внешние силы и силы инерции, действующие на систему.

Проектируя обе части уравнения $M \bar{a}_c = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i$ на оси координат, получим:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum R_{ix} + \sum F_{ix}; \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum R_{iy} + \sum F_{iy}; \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum R_{iz} + \sum F_{iz}. \quad (203)$$

Это дифференциальные уравнения движения центра масс системы в проекциях на декартовы оси координат.

Следствия теоремы.

1. Если тело движется поступательно, то его движение полностью определяется движением центра масс.

2. Если тело движется не поступательно, то его движение можно рассматривать как движение материальной точки лишь в том случае, когда для определения положения тела достаточно знать положение его центра масс.

3. Из теоремы о движении центра масс $M \bar{a}_c = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i$ имеем, если ньютоновская сила $M \bar{a}_c = 0$, то $\bar{a}_c = 0$ и $\bar{V}_c = const$, и

$$\sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i = 0 \Rightarrow \sum \bar{R}_i = -\sum \bar{F}_i. \quad (203)$$

Из этого следует, что при равномерном движении механической системы сила инерции равна и противоположно направлена сумме сил механического сопротивления движению. Если это равенство выполняется строго, то скорость движения механической системы постоянна $\bar{V}_c = const$. Однако, в реальных условиях обычно $\sum \bar{R}_i > \sum \bar{F}_i$ и равномерное движение механической системы переходит в замедленное. В космосе, вдали от звёзд и планет $\sum \bar{R}_i = 0$ и на движущуюся механическую систему действует только постоянная сила инерции $\sum \bar{F}_i$. В результате механическая система движется прямолинейно и равномерно. **Следовательно, когда движущая сила постоянна, то она преодолевает внешние сопротивления, а постоянная сила инерции движет механическую систему**

прямолинейно и равномерно с постоянной скоростью $V = \text{const}$. Это следствие второго закона механики.

4. Если сумма внешних сил, действующих на систему, и сил инерции не равна нулю, но сумма их проекций на какую-либо ось (например, OX) равна нулю $\sum R_{ix} + \sum F_{ix} = 0$, то

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum R_{ix} + \sum F_{ix} = 0. \quad (204)$$

Если $d^2 x_c / dt^2 = 0$, то $dx_c / dt = V_{cx} = \text{const}$, то есть в данном случае проекция скорости V_{cx} центра масс системы на ось OX – величина постоянная. Если же в этом случае $V_{cx} = 0$, то $dx_c / dt = V_{cx} = 0$. Отсюда следует, что $x_c = \text{const}$. Это следствие выражает закон сохранения движения центра масс системы.

Пример. Центр масс ротора электромотора смешен от оси вращения A на величину $AC = a$. Масса ротора m_1 , масса всех остальных частей m_2 (рис. 44). Определить, по какому закону $x_c = f(t)$ будет двигаться центр масс С электромотора, поставленного на гладкую горизонтальную плоскость, когда ротор вращается с постоянной угловой скоростью ω . Найти, какое максимальное горизонтальное усилие R_x будет испытывать болт D, если с его помощью закрепить электромотор.

Решение. Движение мотора будет подчиняться закону сохранения движения центра масс системы. Так как плоскость гладкая, и сумма проекций всех внешних сил на ось OX равна нулю, то согласно закону сохранения движения центра масс системы $dx_c / dt = V_{cx} = 0$, а это значит, что $x_c = \text{const}$, то есть центр масс системы не будет перемещаться вдоль оси OX. Следовательно, алгебраическая сумма произведений масс тел системы на проекции абсолютных перемещений их центров масс вдоль оси OX должна быть равна нулю. Поэтому, из рис. 39 имеем $m_2 \cdot x_A + m_1 \cdot x_C = 0$. Поскольку $x_C = x_A + a \sin \omega t$, то

$$m_2 \cdot x_A + m_1(x_A + a \sin \omega t) = 0.$$

Здесь: m_1 – масса ротора; m_2 – масса статора; $\varphi = \omega t$.

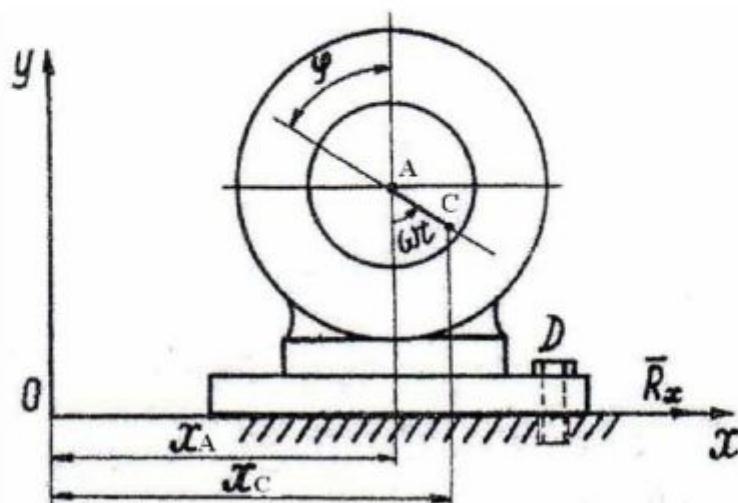


Рис. 44. К закону сохранения движения центра масс механической системы

Откуда

$$x_A = \frac{m_1 a}{m_1 + m_2} \sin \omega t.$$

Следовательно, мотор будет совершать гармонические колебания с частотой ω вдоль оси ОХ. Если его закрепить одним болтом, то в соответствии с теоремой о движении центра масс системы, горизонтальная реакция R_x на болт будет равна

$$R_x = M \frac{d^2 x_c}{dt^2},$$

где x_c - координата центра масс системы.

Исходя из рис. 44 имеем

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{M} = \frac{m_2 x_A + m_1 x_C}{M}.$$

Так как $x_C = x_A + \sin \omega t$, то

$$x_c = \frac{m_2 x_A + m_1 x_A + m_1 a \sin \omega t}{M}.$$

При наличии болта $x_A = const$, поэтому, дифференцируя дважды по времени последнее выражение, получим

$$a_{cx} = \frac{d^2 x_c}{dt^2} = -\frac{m_1}{M} a \omega^2 \sin \omega t$$

и сила R_x будет равна $R_x = M \cdot a_{cx} = -m_1 a \omega^2 \sin \omega t$. Напомним ещё раз, что при синусоидальном законе колебаний механической системы на её центр масс действует не только активная сила, но и сила инерции, которая меняет своё направление также по синусоидальному закону и суммарное её действие на центр масс механической системы за период колебаний, равно нулю.

Пример. Диск массой $M=20$ кг вращается относительно центра О с постоянной угловой скоростью $\omega = 10 \text{ рад/с}$; $OC=0,5\text{ см}$. Найти главный вектор \bar{R}_e внешних сил, действующих на диск (реакцию опоры в точке О, рис. 45).

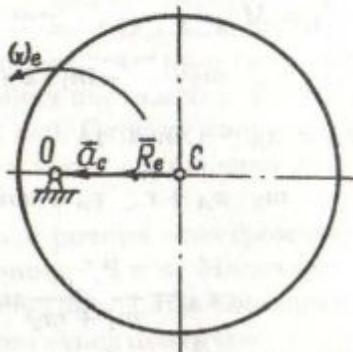


Рис. 45. К теореме о движении центра масс системы

Решение. Так как угловая скорость вращения постоянна $\omega = \text{const}$, то в соответствии с теоремой о движении центра масс системы имеем: $M\bar{a}_c = \bar{R}_e$; $a_c = \omega^2 OC = 0,5m/c^2$. Тогда $R_e = 20 \cdot 0,5 = 10H$.

9.9. Количество движения механической системы

Количество движения механической системы \bar{Q} - векторная величина, как и количество движения материальной точки. Она равна геометрической сумме (главному вектору) количеств движений всех точек системы (рис. 46).

$$\bar{Q} = \sum m_i \bar{V}_i \Rightarrow \sum m_i \frac{d\bar{r}_i}{dt} = M \frac{d\bar{r}_c}{dt} = M \bar{V}_c. \quad (205)$$

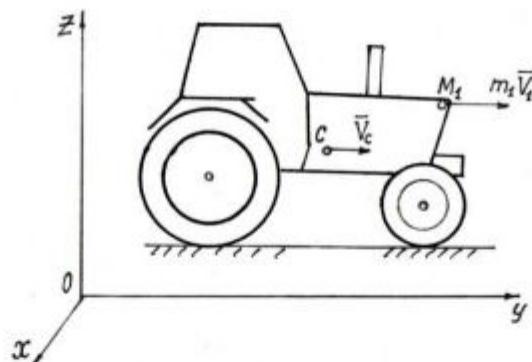


Рис. 46. Схема к определению количества движения механической системы

Проектируя уравнение (205) на оси координат, имеем:

$$Q_x = MV_{cx}; \quad Q_y = MV_{cy}; \quad Q_z = MV_{cz}.$$

Количество движения \bar{Q} системы равно произведению массы M всей системы на скорость ее центра масс. Как видно, вектор \bar{Q} может принимать любые значения и даже оказываться равным нулю, поэтому по величине \bar{Q} нельзя судить полностью о характере движения системы (рис. 47).

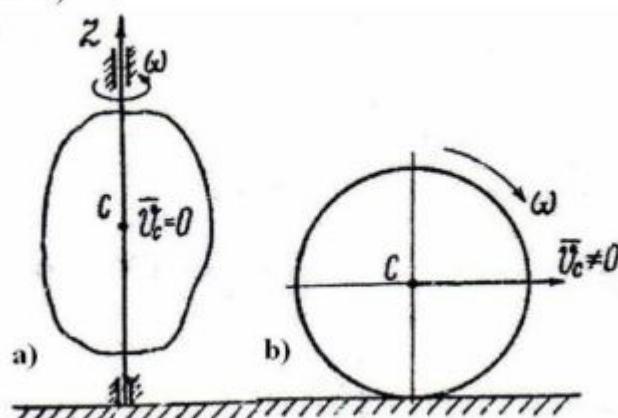


Рис. 47. К анализу количества движения механической системы

На рис. 47, а $\bar{V}_c = 0; \bar{Q} = 0$, но тело (система) движется (вращается). На рис. 47, б $\bar{V}_c \neq 0$, значит и $\bar{Q} \neq 0$. Следовательно, количество движения системы характеризует только поступательную часть ее движения.

9.10. Теорема об изменении количества движения механической системы

Производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил, в том числе и сил инерции.

Доказательство. Количество движения механической системы равно

$$\bar{Q} = M\bar{V}_c. \quad (206)$$

Напомним ещё раз, что началом движения механической системы является ускоренное движение. Главный признак ускоренного движения системы – наличие ускорения и присутствие его в математической модели, описывающей ускоренное движение. С учетом этого процесс дифференцирования уравнения (206) должен завершиться добавлением, в полученный результат, силы инерции. Учитывая изложенное, возьмём производную от левой и правой частей этого уравнения.

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = M\bar{a}_c.$$

Поскольку $M\bar{a}_c = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i$, то

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i. \quad (207)$$

Это уравнение выражает теорему об изменении количества движения механической системы в дифференциальной форме. В проекциях на оси координат получим:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum R_{ix} + \sum F_{ix}; \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum R_{iy} + \sum F_{iy}; \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum R_{iz} + \sum F_{iz}. \quad (208)$$

Эта теорема имеет и другую формулировку. **Изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно сумме импульсов внешних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.**

Доказательство. Пусть в момент времени $t = 0, \bar{Q} = \bar{Q}_o$, а при $t = t_1, \bar{Q} = \bar{Q}_1$. Тогда, интегрируя выражение $d\bar{Q}/dt = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i$, имеем:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_o = \int_o^{t_1} (\bar{R}_i + \bar{F}_i) dt = \sum \bar{S}_{iR} \Rightarrow \bar{Q}_1 - \bar{Q}_o = \sum \bar{S}_{iR}.$$

Изменение количества движения системы в проекциях на оси координат равно:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{1x} - \bar{Q}_{2x} &= \sum \bar{S}_{iRx}; \quad \bar{Q}_{1y} - \bar{Q}_{2y} = \sum \bar{S}_{iRy}; \\ \bar{Q}_{1z} - \bar{Q}_{2z} &= \sum \bar{S}_{iRz}. \end{aligned}$$

Можно найти связь доказанной теоремы с теоремой о движении центра масс системы. Теорема об изменении количества движения системы

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i. \quad (209)$$

Количество движения центра масс системы

$$\bar{Q} = M \cdot \bar{V}_c.$$

Дифференцируя последнее уравнение по времени, получим

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = M \frac{d\bar{V}_c}{dt} = M \bar{a}_c. \quad (210)$$

Ещё раз напомним о том, что появление ускорения в уравнении механики автоматически рождает необходимость присутствия в нём силы инерции. Подставив результат (210) в уравнение (209), имеем

$$M \bar{a}_c = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i. \quad (211)$$

Это уравнение движения центра масс системы.

Следовательно, теорема о движении центра масс системы и теорема об изменении количества движения системы представляют по существу две разные формы одной и той же теоремы.

В ряде задач, например, при изучении движения жидкости или газа, понятие о центре масс теряет смысл, и тогда пользуются теоремой об изменении количества движения.

Практическая важность теоремы об изменении количества движения системы заключается в том, что она позволяет исключить из рассмотрения наперед неизвестные внутренние силы, например, силы давления друг на друга частиц жидкости.

Пример. Струя жидкости диаметром d со скоростью V направлена на стену. Определить силу воздействия струи жидкости на стену, если её плотность равна ρ (рис. 48).

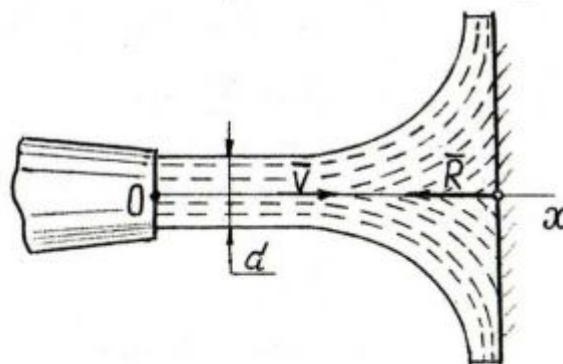


Рис. 48. К анализу количества движения системы

Учитывая, что сумма внутренних сил, действующих между частицами жидкости, равна нулю, обозначим реакцию стены на действие струи жидкости через \bar{R} . Тогда, используя теорему об изменении количества движения системы (жидкости), имеем

$$m\bar{V} = \bar{R} \cdot t.$$

Секундный ($t=1$) расход жидкости будет равен $m = \rho \frac{\pi d^2}{4} V$, поэтому $R = \rho \frac{\pi d^2}{4} V^2$.

9.11.Закон сохранения количества движения механической системы

Если сумма внешних сил и сил инерции, действующих на систему, равна нулю, то вектор \bar{Q} количества движения системы будет постоянен по модулю и направлению. Действительно, если $\sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i = 0$, то из $\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{R}_i + \sum \bar{F}_i = 0$ следует, что $\bar{Q} = const$. Обратим внимание на то, что в этом случае механическая система движется равномерно.

Если сумма проекций всех действующих на систему внешних сил и сил инерции на какую-нибудь ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная. Из этого следует

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum R_{ix} + \sum F_{ix} = 0; \Rightarrow Q_x = const.$$

Следствие закона. Внутренние силы не могут изменить суммарное количество движения системы.

9.12.Главный момент количества движения механической системы

Главным моментом количества движения системы (или кинетическим моментом) относительно данного центра О называется величина \bar{K}_o , равная геометрической сумме моментов количества движения всех точек системы относительно этого центра

$$\bar{K}_o = \sum \bar{m}_o (m_i \bar{V}_i). \quad (212)$$

Аналогично определяются моменты количества движения системы относительно координатных осей:

$$\bar{K}_x = \sum \bar{m}_x (m_i \bar{V}_i); \bar{K}_y = \sum \bar{m}_y (m_i \bar{V}_i); \bar{K}_z = \sum \bar{m}_z (m_i \bar{V}_i). \quad (213)$$

где K_x, K_y, K_z - проекции вектора \bar{K}_o на оси координат.

Количество движения системы $\bar{Q} = \sum (m_i \bar{V}_i)$ - главная характеристика ее поступательного движения.

Главный момент количества движения системы $\bar{K}_o = \sum \bar{m}_o (m_i \bar{V}_i)$ - главная характеристика вращательного движения системы.

Чтобы уяснить механический смысл \bar{K}_o , вычислим кинетический момент тела, врашающегося вокруг неподвижной оси (рис. 49).

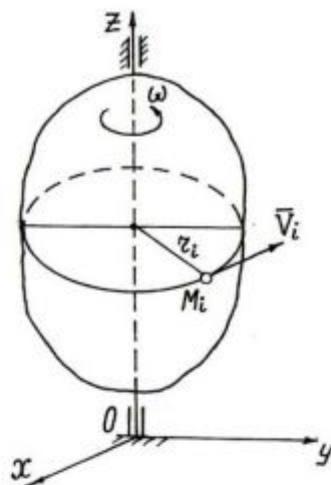


Рис. 49. К определению кинетического момента вращающегося тела

Для любой точки M_i , $m_i V_i = \omega r_i$. Количество движения $m_i V_i = m_i \omega r_i$. Момент количества движения относительно оси OZ равен

$$K_z = \sum m_i (m_i \bar{V}_i) = \sum (m_i \bar{V}_i) \cdot r_i = \sum m_i \omega r_i^2 = (\sum m_i r_i^2) \omega = I_z \omega. \quad (214)$$

Главный момент количества движения системы относительно оси $K_z = I_z \omega$. **Кинетический момент (главный момент) вращающегося тела относительно оси OZ вращения равен произведению момента инерции I_z тела относительно этой оси на угловую скорость ω тела.**

Если система состоит из нескольких тел, вращающихся вокруг одной и той же оси, то очевидно, что $K_z = I_{1z} \omega_1 + I_{2z} \omega_2 + \dots + I_{nz} \omega_n$.

Сравнивая формулы $\bar{Q} = M \bar{V}_c$ и $\bar{K}_z = I_z \bar{\omega}$, видим, что M - масса тела, величина, характеризующая инертность тела при поступательном движении; I_z - момент инерции тела относительно оси OZ – величина, характеризующая инертность тела при вращательном движении.

9.13. Теорема об изменении главного момента количества движения механической системы (теорема моментов)

Производная по времени от главного момента количества движения системы относительно некоторого неподвижного центра равна сумме моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра.

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum \bar{m}_o (m_i \bar{V}_i) \right] = \sum \bar{m}_o (m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt}) = \sum \bar{m}_o (\bar{R}_i) + \sum \bar{m}_o (\bar{F}_i), \quad (215)$$

где \bar{R}_i - равнодействующая внешних сил, \bar{F}_i - равнодействующая внутренних сил.

Учитывая что $d\bar{V}_i / dt = \bar{a}_i$, а также то, что $m_i \bar{a}_i = \bar{R}_i$ и то, что по свойству внутренних сил $\sum \bar{m}_o (\bar{F}_i) = 0$, получим

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \frac{d}{dt} \left[\sum \bar{m}_o (m_i \bar{V}_i) \right] = \sum \bar{m}_o (\bar{R}_i) = \bar{M}_o. \quad (216)$$

Это уравнение выражает теорему моментов для механической системы. Проектируя обе части полученного уравнения на оси координат, получим:

$$\frac{dK_x}{dt} = \sum m_x (\bar{R}_i); \quad \frac{dK_y}{dt} = \sum m_y (\bar{R}_i); \quad \frac{dK_z}{dt} = \sum m_z (\bar{R}_i). \quad (217)$$

Эти уравнения выражают теорему моментов относительно координатных осей. Практическая ценность теоремы моментов состоит в том, что она, аналогично теореме об изменении количества движения системы, позволяет при изучении вращательного движения исключить из рассмотрения все наперед неизвестные внутренние силы.

9.14. Теорема моментов относительно центра масс

Эта теорема используется при изучении сложного движения. Пусть OX, OY, OZ - неподвижные оси, по отношению к которым движется рассматриваемая механическая система с центром масс C. Свяжем с центром масс C подвижную систему CX', CY' и CZ' так, чтобы она перемещалась по отношению к неподвижной системе поступательно с ускорением \bar{a}_c (рис. 50).

На рис. 50 \bar{P}_i, \bar{R}_i - внутренняя и внешняя силы соответственно и \bar{P}_i^e - переносная сила инерции. Так как система отсчета CX'YZ', а, значит, и центр масс C движутся поступательно, то кориолисова сила инерции равна нулю и уравнение механодинамики в подвижных осях имеет вид

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \sum \bar{m}_c (\bar{P}_i^e) + \sum \bar{m}_c (\bar{R}_i) + \sum \bar{m}_c (\bar{P}_i). \quad (218)$$

На рис. 50 \bar{P}_i, \bar{R}_i - внутренняя и внешняя силы соответственно и \bar{P}_i^e - переносная сила инерции. Так как система отсчета CX'YZ', а, значит, и центр масс C движутся поступательно, то кориолисова сила инерции равна нулю и уравнение механодинамики в подвижных осях имеет вид

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \sum \bar{m}_c (\bar{P}_i^e) + \sum \bar{m}_c (\bar{R}_i) + \sum \bar{m}_c (\bar{P}_i). \quad (219)$$

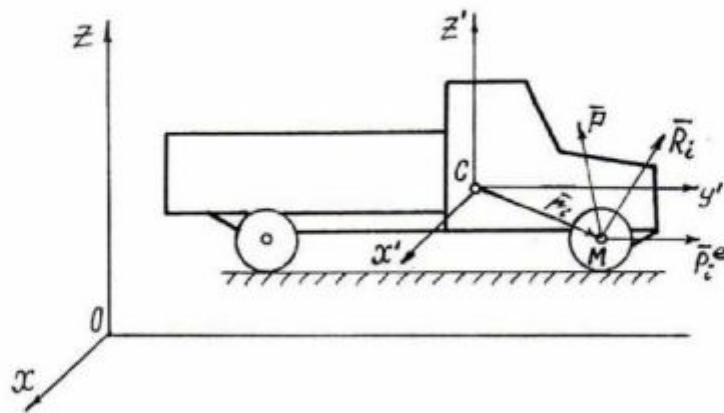


Рис. 50. К теореме моментов относительно центра масс механической системы

По свойству внутренних сил $\sum \bar{m}_c(\bar{P}_i) = 0$, а переносная сила инерции $\bar{P}_i^e = -m_i \bar{a}_i^e$. Так как подвижные оси перемещаются поступательно, то $\bar{a}_i^e = \bar{a}_c$, поэтому $\bar{P}_i^e = -m_i \bar{a}_c$. Так как $\bar{r}_c = 0$, то после подстановки получим

$$\sum \bar{m}_c(\bar{P}_i^e) = \sum \bar{m}_c(-m_i \bar{a}_c) = \sum [\bar{r}_i \times (-m_i \bar{a}_c)] = -[\bar{r}_c \times (M \cdot \bar{a}_c)] = 0.$$

Остается только сумма моментов от внешних сил \bar{R}_i и уравнение (218) принимает вид

$$\frac{d\bar{K}_c}{dt} = \sum \bar{m}_c(\bar{R}_i). \quad (220)$$

Итак, доказана теорема: Производная по времени от главного момента количества движения системы относительно поступательно движущегося ее центра масс С равна сумме моментов всех внешних сил \bar{R}_i системы относительно того же центра. То есть теорема моментов относительно центра масс сохраняет тот же вид, что и относительно неподвижного центра.

9.15. Закон сохранения главного момента количества движения системы

Он вытекает как следствие из теоремы моментов. Пусть сумма моментов относительно центра О всех внешних сил, действующих на систему, равна нулю $\sum \bar{m}_o(\bar{R}_i) = 0$. Тогда из уравнения

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o(\bar{R}_i) = 0$$

следует, что $\bar{K}_o = const$ и закон формулируется так:

Если сумма моментов относительно данного центра всех приложенных к данной системе внешних сил равна нулю, то главный момент количества движения этой системы относительного этого центра будет численно и по направлению постоянен.

Пусть сумма моментов всех внешних сил, действующих на систему, относительно какой-нибудь оси OZ равна нулю, то есть, $\sum m_z(\bar{R}) = 0$, тогда из уравнения

$$\frac{d\bar{K}_z}{dt} = \sum m_z(\bar{R}_i) = 0$$

следует, что $\bar{K}_z = const$ и закон формулируется так:

Если сумма моментов всех действующих на систему внешних сил относительно какой-нибудь оси равна нулю, то главный момент количества движения \bar{K}_z системы относительно этой оси будет величиной постоянной.

Эти два следствия выражают общий закон сохранения главного момента количества движения системы.

Пример. Вращение тела с изменяющимся моментом инерции I_z относительно оси OZ (например, фигурист). Закон гласит: если $\sum m_z(\bar{R}_i) = 0$, то

$$K_z = I_z \cdot \omega = const. \quad (221)$$

Значит, при увеличении I_z за счет внутренних сил ω будет уменьшаться, и наоборот.

9.16. Кинетическая энергия тела при разных видах его движения

Кинетической энергией системы называется скалярная величина E_k , равная арифметической сумме кинетических энергий всех точек системы

$$E_k = \sum \frac{m_i V_i^2}{2}. \quad (222)$$

Главное отличие кинетической энергии E_k системы от количества движения \bar{Q} системы и момента количества движения \bar{K}_o в том, что кинетическая энергия является величиной скалярной и положительной, поэтому она не зависит от направления движения частей системы и не характеризует этих направлений. Но вместе с тем на изменение кинетической энергии системы влияет изменение не только внешних, но и внутренних сил.

9.17. Кинетическая энергия тела при поступательном, вращательном и плоскопараллельном движении твёрдого тела

Поступательное движение тела. При поступательном движении тела все его точки имеют одинаковые скорости $V_i = V_c$, поэтому

$$E_k = \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{1}{2} M \cdot V_c^2. \quad (223)$$

Вращательное движение. Если тело вращается вокруг какой-нибудь оси OZ с угловой скоростью ω , то скорость любой его точки на расстоянии r_i от оси $V_i = \omega \cdot r_i$ и кинетическая энергия

$$E_k = \sum \frac{m_i \omega^2 r_i^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \omega^2 = \frac{1}{2} I_z \omega^2. \quad (224)$$

Плоскопараллельное движение (рис. 51).

$$E_k = \frac{1}{2} I_p \omega^2, \quad (225)$$

где I_p - момент инерции системы (тела) относительно оси, проходящей через мгновенный центр P вращения. Так как положение P все время меняется, то введем постоянный момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс C. Тогда на основании теоремы Гюйгенса $I_p = I_c + Md^2$; $d = PC$. Так как P - мгновенный центр скоростей, то $V_c = \omega d$ - скорость центра масс. Окончательно имеем

$$E_k = \frac{1}{2} I_p \omega^2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M \omega^2 d^2 = \frac{1}{2} I_c \omega^2 + \frac{1}{2} M V_c^2, \quad (226)$$

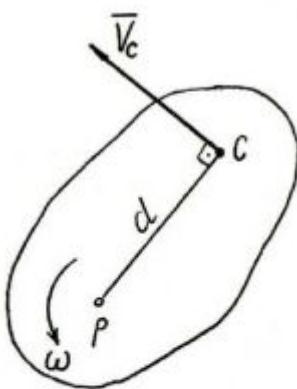


Рис. 51. К определению кинетической энергии при плоскопараллельном движении твердого тела

При плоскопараллельном движении тела его кинетическая энергия равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенному с кинетической энергией вращательного движения тела вокруг оси, проходящей через мгновенный центр вращения и перпендикулярной к плоскости движения.

Общий случай движения. Если за полюс взять центр масс С тела, то движение тела в общем случае будет слагаться из поступательного движения со скоростью \bar{V}_c и вращения вокруг мгновенной оси CP, проходящей через этот полюс (рис. 52). Для i-ой точки имеем

$$\bar{V}_{ai} = \bar{V}_c + \bar{V}'_i. \quad (227)$$

При этом $V'_i = \omega h_i$, \bar{V}_{ai} - абсолютная скорость i-ой точки. Тогда и

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i V_{ai}^2; \quad (228)$$

$$\bar{V}_{ai}^2 = (\bar{V}_c + \bar{V}'_i)^2 = \bar{V}_c^2 + 2\bar{V}_c \cdot \bar{V}'_i + \bar{V}'_i^2.$$

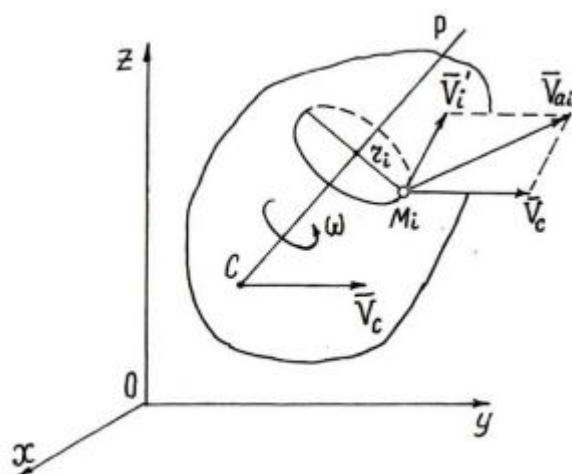


Рис. 52. К расчету кинетической энергии тела для общего случая его движения

Из определения скалярного произведения двух векторов следует, что $\overline{V}^2 = \overline{V} \cdot \overline{V} = V \cdot V \cos 0^\circ = V^2$, то есть скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.

Учитывая, что $\overline{V}^2 = V^2$ и $\overline{V_i}'^2 = V_i'^2$ и то, что $V_i' = \omega h_i$, имеем

$$V_{ai}^2 = V_c^2 + 2V_c \cdot V_i' + V_i'^2.$$

Тогда

$$E_k = \frac{1}{2} \left(\sum m_i \right) \cdot V_c^2 + V_c \sum m_i V_i' + \frac{1}{2} \left(\sum m_i r_i^2 \right) \cdot \omega^2. \quad (229)$$

Но

$$\sum m_i = M; \quad \sum m_i r_i^2 = I_{cp}; \quad \sum m_i V_i' = MV_c' = 0.$$

Так как ось вращения СР проходит через центр масс тела, то величина $\sum m_i V_i' = 0$ количества движения, получаемого телом при вращении относительно оси СР, проходящей через центр масс тела, равна нулю. Поэтому окончательно имеем

$$E_k = \frac{1}{2} M V_c^2 + \frac{1}{2} I_{cp} \omega^2. \quad (230)$$

Кинетическая энергия тела в общем случае движения равна кинетической энергии поступательного движения со скоростью центра масс, сложенной с кинетической энергией вращательного движения вокруг оси, проходящей через центр масс.

9.18. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Изменение кинетической энергии точки при некотором ее перемещении равно алгебраической сумме работ всех действующих на точку сил на том же перемещении.

Для i -той точки системы имеем

$$d \left(\frac{m_i V_i^2}{2} \right) = dA_i^R + dA_i^F,$$

где dA_i^R, dA_i^F - элементарные работы действующих на точку внешних \overline{R}_i и внутренних \overline{F}_i сил.

Складывая элементарные работы всех сил, действующих на точки системы, имеем

$$d \sum \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum dA_i^R + \sum dA_i^F \Rightarrow d \sum A_i^R + d \sum A_i^F. \quad (231)$$

Это равенство выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме. Проинтегрировав это равенство в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия равна E_{ko} , в положение, где она становится равной E_{k1} , будем иметь

$$E_{k1} - E_{ko} = \sum A_i^R + \sum A_i^F. \quad (232)$$

Изменение кинетической энергии системы при некотором ее перемещении равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

Всегда ли надо учитывать работу внутренних сил системы при определении ее кинетической энергии? Ответ зависит от вида связей системы.

Система с неизменяемыми связями имеет такие связи, при которых расстояния между точками системы не изменяются. Для такой системы сумма работ всех внутренних сил равна нулю и

$$dE_k = \sum dA_i^R \Rightarrow E_{k1} - E_{k2} = \sum dA_i^R. \quad (233)$$

Примером такой системы является абсолютно твердое тело.

Система с идеальными связями. Если система имеет связи, то внешние и внутренние силы могут быть активными и реакциями связей. Тогда

$$dE_k = \sum dA_i^a + \sum dA_i^N, \quad (234)$$

где dA_i^a - элементарная работа действующих на i -ю точку внешних и внутренних активных сил; dA_i^N - элементарная работа внешних и внутренних реакций связей.

Внешние и внутренние связи механической системы будут идеальными, если $\sum A_i^N = 0$.

Таким образом, если сумма работ всех реакций связей при элементарном перемещении системы равна нулю, то такие связи называются идеальными. Примером идеальных связей являются неизменяемые связи и связи без трения.

Изменение кинетической энергии системы с идеальными, не изменяющимися со временем связями, при любом ее перемещении равно сумме работ внешних и внутренних активных сил на этом перемещении.

Практическая ценность теоремы об изменении кинетической энергии системы состоит в том, что при неизменяющихся со временем связях она позволяет исключить из уравнений движения все наперед неизвестные реакции связей.

9.19. Приложение общих теорем динамики к динамике твердого тела

Дифференциальное уравнение ускоренного вращательного движения твердого тела (рис. 53).

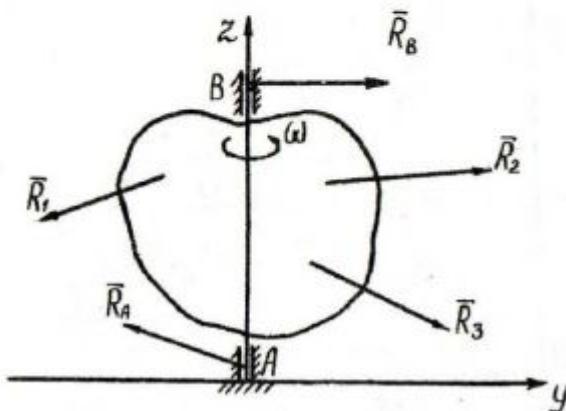


Рис. 53. Схема сил, действующих на вращающееся тело

$\bar{R}_1, \bar{R}_2, \bar{R}_3, \dots$ - система заданных сил; \bar{R}_A, \bar{R}_B - реакции подшипников. Моменты сил \bar{R}_A и \bar{R}_B относительно оси OZ равны нулю, так как линии действия этих сил пересекают ось OZ. Поскольку $K_z = I_z \omega$, то

$$\frac{dK_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = I_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = I_z \cdot \varepsilon = M_z, \quad (235)$$

где M_z - вращающий момент.

Это дифференциальное уравнение движения твердого тела, из которого следует, что $I_z \cdot \varepsilon = M_z$. Произведение момента инерции I_z тела относительно оси вращения на угловое ускорение ε равно вращающему моменту. При $M_z = \text{const}$ - чем больше I_z , тем меньше ε . Если $M_z = 0$, то $\omega = \text{const}$ - тело вращается равномерно. Если $\omega = \text{const}$, то и $\varepsilon = \text{const}$ - тело вращается равнопреременно.

Дифференциальные уравнения плоскопараллельного ускоренного движения твердого тела. Положение твердого тела, совершающего плоскопараллельное движение, определяется в любой момент времени положением любой его точки, взятой в качестве полюса, и углом вращения φ относительно полюса. Задачи динамики упрощаются, если за полюс взять центр масс С тела и определить положение тела координатами x_c, y_c, z_c (рис. 54).

Используя теорему о движении центра масс, имеем:

$$M \ddot{x}_c = \sum \bar{R}_i; \quad I_c \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \sum m_c(\bar{R}_i). \quad (236)$$

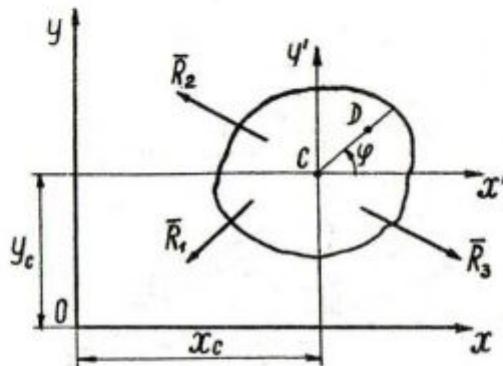


Рис. 54. Схема плоскопараллельного движения твердого тела

В проекциях на оси координат получим:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum R_{ix}; \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum R_{iy}; \quad \sum m_c(\bar{R}_i) = I_c \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (237)$$

Это дифференциальные уравнения плоскопараллельного движения твердого тела. С помощью этих уравнений можно по заданным силам определить закон движения тела, или, зная закон движения тела, найти главный вектор и главный момент действующих на тело внешних сил.

При несвободном движении тела, когда траектория центра масс известна, уравнение движения точки С удобнее составлять в проекциях на касательную τ и главную нормаль

n к этой траектории. Тогда дифференциальные уравнения движения твердого тела в естественных осях становятся такими:

$$M \frac{dV_c}{dt} = \sum R_i^r; \quad M \frac{V_c^2}{\rho} = \sum R_i^n; \quad I_c \frac{d^2\phi}{dt^2} = \sum m_c(\bar{R}_i), \quad (238)$$

где ρ - радиус кривизны траектории центра масс.

Пример (рис. 55). Определить работу сил трения, прижимающих тормозные колодки к барабану при его торможении. Дано: $F_1 = F_2 = 100H$; $r = 0,1m$; $n = 10ob$; $f = 0,3$.

Решение:

$$A = -2F_{Tp} 2\pi n = -2 \cdot 0,3 \cdot 100 \cdot 2 \cdot 3,14 \cdot 0,1 \cdot 10 = -377H \cdot m.$$

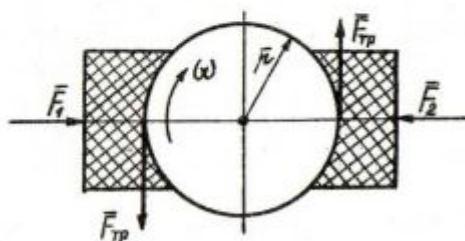


Рис. 55. Схема к примеру определения работы сил трения

В XX веке считалось, что законы классической механики успешно работают в макромире, а в микромире работают другие – квантовые законы. Однако, наши исследования показывают, что законы классической механики также успешно работают и в микромире. Любой объект, имеющий массу, подчиняется законам Ньютона. Поэтому есть основания владеть минимумом знаний о работе законов классической механики в микромире. Для реализации этого пожелания рассмотрим современную теорию электрона.

10. РАБОТА ЗАКОНОВ МЕХАНОДИНАМИКИ В МИКРОМИРЕ

10.1. Теория электрона

Сейчас мы увидим, как некоторые законы механодинамики работают в микромире. Уже известно, что длины волн λ элементарных частиц равны радиусам r их вращений и прояснился физический смысл размерности постоянной Планка h [5].

$$h = m\lambda^2 v = m\lambda \cdot \lambda v = m \cdot C \rightarrow h = mr^2 v = mr \cdot C, \text{кг} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{рад} \cdot \text{с}^{-1} = const. \quad (239)$$

Обратим внимание на размерность постоянной Планка (239). В классической механике эта размерность имеет названия: момент количества движения и кинетический момент. В классической физике эту размерность называют момент импульса или угловой момент [5].

Мы уже знаем, что постоянством кинетического момента управляет **закон сохранения кинетического момента**. Он гласит: если сумма моментов внешних сил, действующих на вращающееся тело, равна нулю, то кинетический момент \bar{h} этого тела остаётся постоянным по **величине и направлению**. Из этого следует, что постоянная Планка \bar{h} – **величина векторная**, но физики XX века использовали её только как скалярную величину [5].

Наиболее ярко проявление сути кинетического момента наблюдается при вращении волчка. Кинетический момент удерживает волчок от падения при его вращении. Но

самое главное не в этом, а в том, что кинетический момент - величина векторная, так же как скорость, ускорение движения тела или сила, действующая на него.

Вектор \bar{h} направлен вдоль оси вращения кольца (рис. 56, а, б) так, что если смотреть с его острия, то вращение будет направлено против хода часовой стрелки.

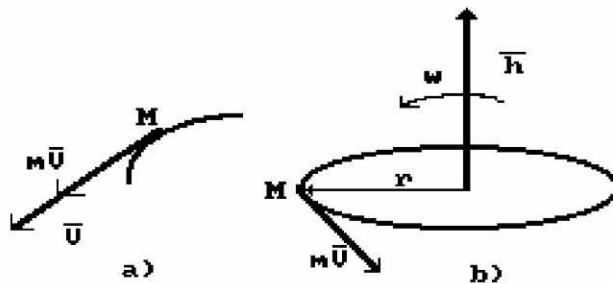


Рис. 56. Схема к определению понятий: а) количество движения $m\bar{V}$ материальной точки; б) кинетический момент кольца \bar{h}

Если постоянная Планка имеет размерность кинетического момента и если с ее помощью теоретически описывать поведение элементарных частиц, то эти частицы (в том числе и электрон), как и волчок, обязательно должны вращаться вокруг своих осей [5].

Поскольку электрон – локализованное в пространстве электромагнитное образование, обладающее отрицательным зарядом, то он должен иметь константу локализации. Обратим внимание на то, что в развернутой записи постоянной Планка (239) присутствует константа – скорость света С. Это значит, что оставшаяся совокупность символов $m \cdot r$ – тоже константа. Поскольку электрон имеет постоянную массу m_e , то $m_e \cdot r_e$ тоже константа. Назовём её константой локализации электрона и обозначим её через k_0 и запишем в следующем развернутом виде

$$k_0 = m_e \cdot r_e = \frac{m_e r_e^2 \omega_e}{r_e \omega_e} = \text{const}. \quad (240)$$

Поскольку $m_e r_e^2 \omega_e = h$ – постоянная Планка, а $r_e \omega_e = C$ – скорость света, то численная величина константы локализации электрона будет равна

$$k_0 = M_o = \frac{h}{C} = \frac{6,626176 \cdot 10^{-34}}{2,997925 \cdot 10^8} = 2,210254 \cdot 10^{-42} \text{ кг} \cdot \text{м} = \text{const}. \quad (241)$$

Разделим константу локализации электрона (241) на экспериментальную величину его массы $m_e = 9,109534 \cdot 10^{-31}$ кг = const. В результате будем иметь [5]

$$r_e = \frac{2,210254 \cdot 10^{-42}}{9,109534 \cdot 10^{-31}} = 2,426308 \cdot 10^{-12} \text{ м} = \text{const}. \quad (242)$$

Обратим внимание на то, что полученная величина совпадает с экспериментальной комптоновской длиной волны электрона. Такое совпадение не может быть случайным. Поскольку комптоновская длина волны определена в экспериментах взаимодействия рентгеновских фотонов с электронами, то у нас есть веские основания считать, что комптоновская длина волны электрона равна радиусу его вращения. Эти основания усиливаются физическим смыслом, следующим из размерности константы (241) локализации электрона. Она означает, что произведение радиуса электрона, как параметра его локали-

зации, на массу электрона - величина постоянная. В то время как произведение массы электрона на длину его волны λ не содержит никакого смысла локализации.

Поскольку радиус электрона – величина постоянная, то материальная плотность кольца электрона будет также постоянна.

$$\delta_{Ke} = \frac{m_e}{2\pi \cdot r_e} = \frac{9,109 \cdot 10^{-31}}{6,282 \cdot 2,426 \cdot 10^{-12}} = 5,977 \cdot 10^{-20} \text{ кг/м} = \text{const}, \quad (243)$$

Второй физический смысл константы локализации – постоянный момент M_0 сил, действующих во внутренней структуре электрона. Угловую скорость вращения кольца определим, используя постоянную Планка

$$\omega_e = \frac{h}{m_e r_e^2} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34}}{9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (2,426 \cdot 10^{-12})^2} = 1,236 \cdot 10^{20} \text{ с}^{-1} = \text{const}. \quad (244)$$

Мощность кольца электрона будет равна

$$P_e = M_0 \cdot \omega_e = 2,210 \cdot 10^{-42} \cdot 1,236 \cdot 10^{20} = 2,731 \cdot 10^{-22} \text{ кг} \cdot \text{м/с} = \text{const}. \quad (245)$$

Скорость точек кольца равна скорости света

$$V = P_e / m_e = 2,731 \cdot 10^{-22} / 9,109 \cdot 10^{-31} = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с} = C = \text{const}. \quad (246)$$

Исследования показали, что вторым приближением к реальной модели электрона является тор.

Тороидальная модель электрона

Итак, электрон в первом приближении имеет форму кольца. В качестве второго приближения к электромагнитной модели электрона рассмотрим тор. Для начала будем считать, что тор полый. Радиус окружности сечения тора (рис. 57) обозначим через ρ_e [5].

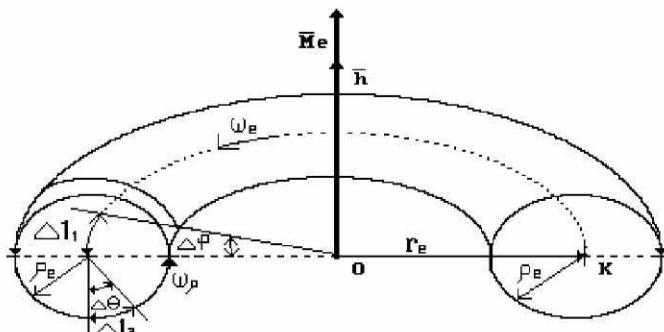


Рис. 57. Схема тороидальной модели электрона

Тогда площадь его поверхности определится по формуле

$$S_e = 2\pi\rho_e \cdot 2\pi r_e = 4\pi^2 \rho_e r_e. \quad (247)$$

Обозначим поверхностную плотность электромагнитной субстанции электрона δ_m . Тогда

$$\delta_m = \frac{m_e}{S_e} = \frac{m_e}{4\pi^2 \rho_e r_e}. \quad (248)$$

Определим момент инерции I_z полого тора. Из рис. 57 имеем

$$I_z = \sum \Delta m \cdot r_e^2. \quad (249)$$

$$\Delta m = 2\pi\rho_e \cdot \Delta l_1 \cdot \delta_m = 2\pi\rho_e \cdot \delta_m \cdot r_e \Delta\phi. \quad (250)$$

$$I_z = \int_0^{2\pi} \frac{m_e r_e^2}{2\pi} \cdot d\phi = m_e \cdot r_e^2. \quad (251)$$

Тороидальная модель электрона с совокупностью магнитных силовых линий, формирующих его магнитный момент, показана на рис. 58.

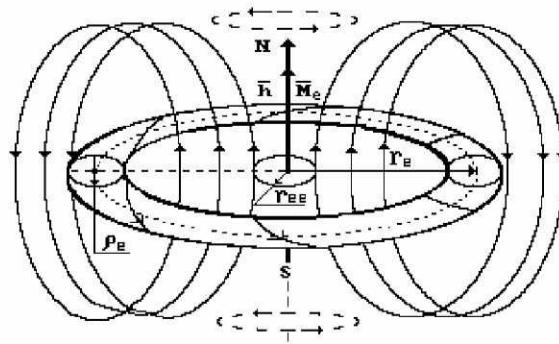


Рис. 58. Схема модели электрона (показана лишь часть магнитных силовых линий)

Поскольку электрон проявляет одновременно электрические и магнитные свойства и имеет кинетический момент, то у нас есть основания предполагать, что он имеет два вращения. Обычное вращение относительно оси симметрии с угловой частотой ω_e назовем кинетическим вращением, формирующим его кинетический момент h и кинетическую энергию E_K . И второе - вихревое вращение относительно кольцевой оси с угловой частотой ω_ρ (рис. 57). Назовем его потенциальным вращением, формирующим его потенциальную E_0 энергию и потенциальные свойства. Вполне естественно предположить, что сумма кинетической E_K и потенциальной E_0 энергий свободного электрона равна его фотонной энергии E_e . Посмотрим на возможность реализации нашего постулата. Кинетическая энергия вращения полого тора определится по формуле (рис. 57, 58) [5]

$$E_K = \frac{E_e}{2} = \frac{1}{2} \cdot I_z \cdot \omega_e^2 = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot r_e^2 \cdot \omega_e^2 = \frac{1}{2} h \omega_e. \quad (252)$$

Учитывая частоту $\omega_e = 1,236 \cdot 10^{20} c^{-1}$ (244), имеем

$$E_K = \frac{h \omega_e}{2} = \frac{6,626 \cdot 10^{-34} \cdot 1,236 \cdot 10^{20}}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 2,556 \cdot 10^5 eV = const. \quad (253)$$

Угловая скорость ω_ρ вращения поверхностной субстанции тора относительно его кольцевой оси связана с его угловой скоростью ω_e вращения относительно оси симметрии зависимостью

$$\omega_\rho = 2\pi\omega_e. \quad (254)$$

Поверхностная субстанция тора вращается относительно его кольцевой оси со скоростью света С, поэтому радиус сечения тора равен

$$\rho_e = \frac{C}{\omega_\rho} = \frac{2,998 \cdot 10^8}{7,763 \cdot 10^{20}} = 3,862 \cdot 10^{-13} \text{ м} = \text{const}. \quad (255)$$

Полагая, что вихревое вращение электрона генерирует его потенциальную энергию, имеем

$$E_o = \frac{1}{2}m_e \cdot \rho_e^2 \cdot \omega_\rho^2 = \frac{9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (3,862 \cdot 10^{-13})^2 \cdot (7,763 \cdot 10^{20})^2}{2 \cdot 1,602 \cdot 10^{-19}} = 2,555 \cdot 10^5 \text{ eV} = \text{const}. \quad (256)$$

Складывая кинетическую энергию электрона (253) с потенциальной (256), получим полную фотонную энергию электрона

$$E_e = m_e C^2 = \frac{9,109 \cdot 10^{-31} \cdot (2,998 \cdot 10^8)^2}{1,602 \cdot 10^{-19}} = 5,110 \cdot 10^5 \text{ eV} = \text{const}. \quad (257)$$

На этом мы остановимся и сообщим, что законы механодинамики синхронно с законами новой электродинамики описывают тороидальную структуру электрона. Подробности этой необычной информации можно прочитать в монографии «Начала физхимии микромира» [5].

11. ПРИНЦИПЫ МЕХАНОДИНАМИКИ

11.1. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)

Возможным перемещением системы называется любая совокупность бесконечно малых перемещений точек системы, допускаемых в данный момент всеми наложенными на систему связями. Возможное перемещение любой точки системы изображают элементарным вектором $\delta\vec{S}$, направленным в сторону перемещения. Сразу обращаем внимание на то, что при возможных элементарных перемещениях механической системы силы инерции близки к нулю и их можно не учитывать.

Пример. Рассмотрим возможные перемещения точек кривошипно-шатунного механизма (рис. 59).

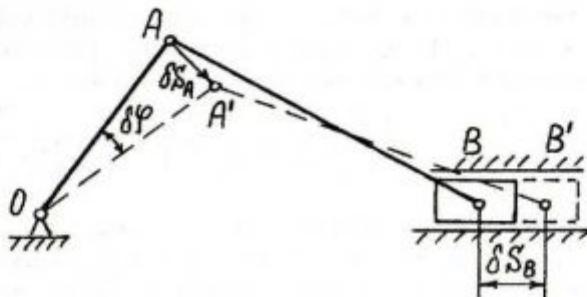


Рис. 59. Схема к анализу принципа возможных перемещений

Возможные перемещения точек системы должны быть такими, чтобы при этом все наложенные на систему связи сохранялись, так как иначе изменится вид рассматриваемой механической системы. Например, нельзя допустить или считать возможным перемещение точки А вдоль радиуса ОА на рис. 59 или перемещение точки В перпендикулярно стенкам цилиндра.

Из перечисленных требований вытекает, что число независимых между собой возможных перемещений системы равно числу её степеней свободы.

Перемещения точек А и В на рис. 59 взаимозависимые, поэтому кривошипно-шатунный механизм имеет одну степень свободы.

Другие примеры:

- материальная точка на плоскости имеет одну степень свободы, так как ее элементарные перемещения $\delta\bar{S}_1$ и $\delta\bar{S}_2$ вдоль перпендикулярных осей всегда можно представить одним перемещением $\delta\bar{S} = \delta\bar{S}_1 + \delta\bar{S}_2$;

- свободная точка имеет три степени свободы - перемещения вдоль координатных осей;

- свободное тело имеет шесть степеней свободы: три - перемещения вдоль координатных осей и три - вращения относительно этих осей.

Сущность применения принципа возможных перемещений для решения задач заключается в том, что он позволяет выразить условие равновесия системы в виде равенства нулю не сил, приложенных к системе, а их элементарных работ δA на всех возможных перемещениях системы.

Если к системе приложены активные силы \bar{F}_i^a и реакции связей \bar{N}_i , то принцип возможных перемещений запишется в общем виде так

$$\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^N = 0, \quad (258)$$

где $\sum \delta A_i^a$ - сумма элементарных работ активных сил; $\sum \delta A_i^N$ - сумма элементарных работ реакций связей.

В большей части задач механики рассматриваются системы с идеальными (неизменяемыми) связями и связями без трения, поэтому для систем с идеальными связями $\sum \delta A_i^N = 0$ и с учетом (258) имеем

$$\sum \delta A_i^a = 0 \quad (259)$$

- основное уравнение принципа возможных перемещений.

В проекциях на оси координат уравнение принципа (259) запишется так

$$\sum \delta A_i^a = \sum (F_{ix}^a \cdot \delta x_i + F_{iy}^a \cdot \delta y_i + F_{iz}^a \cdot \delta z_i) = 0. \quad (260)$$

Для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении была равна нулю.

Таким образом, принцип возможных перемещений в наиболее общем виде устанавливает условия равновесия любой механической системы. При применении принципа возможных перемещений действие связей учитывается не путем введения неизвестных реакций, а путем учета перемещений, которые можно сообщить точкам системы при выводе ее из занимаемого положения. Эти перемещения называются возможными.

Значение принципа возможных перемещений состоит в том, что он дает в общей форме условие равновесия для любой механической системы, в отличие от методов геометрической статики, которые требуют рассмотрения равновесия каждого из тел системы в отдельности. Этот принцип позволяет исключить неизвестные реакции связей, когда они являются идеальными.

11.2. Порядок решения задач с использованием принципа возможных перемещений

1. Выбирают оси координат, связанные с телом, которые при возможных перемещениях системы остаются неподвижными.

2. Составляют условие равновесия в виде

$$\sum \delta A_i^a = \sum (F_{ix}^a \cdot \delta x_i + F_{iy}^a \cdot \delta y_i + F_{iz}^a \cdot \delta z_i) = 0. \quad (261)$$

3. Вычисляют проекции всех активных сил на выбранные оси.

4. Выражают координаты точек (x_i, y_i, z_i) приложения активных сил через какой-нибудь параметр, например, угол поворота системы.

5. Величины $\delta x_i, \delta y_i, \delta z_i$ находят дифференцированием координат x_i, y_i, z_i по выбранному параметру.

6. Если все координаты не удается выразить через один параметр сразу, то вводят несколько параметров и устанавливают зависимость между ними.

7. Полученные результаты подставляют в условие равновесия

$$\sum (F_{ix}^a \cdot \delta x_i + F_{iy}^a \cdot \delta y_i + F_{iz}^a \cdot \delta z_i) = 0 \Rightarrow \sum \delta A_i^a = 0. \quad (262)$$

Этими условиями можно пользоваться при наличии трения, включая силу трения в число активных сил. Этим же путем можно находить и реакции связей, если, отбросив связь, заменить ее соответствующей реакцией и включить ее в число активных сил.

Пример (рис. 60). Найти зависимость между \bar{P} и \bar{Q} в подъемном механизме, детали которого скрыты в коробке K, если известно, что при каждом повороте рукоятки $AB = l$ на угол $\varphi = 2\pi$ винт C выдвигается на величину s . Учитывая, что $\delta S_A = l\delta\varphi$ (рис. 60), составим уравнение принципа возможных перемещений (условие равновесия) в виде

$$P\bar{l}\delta\varphi - Q\delta S_c = 0.$$

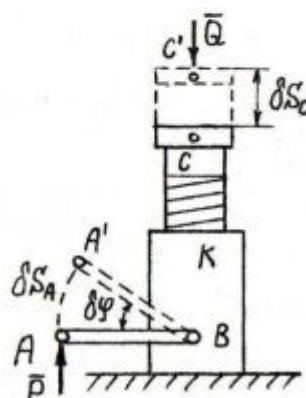


Рис. 60. Схема к примеру

Считая движения рукоятки АВ и винта С равномерными, имеем

$$\frac{\delta\phi}{2\pi} = \frac{\delta S_c}{s} \Rightarrow \delta\phi = \frac{2\pi\delta S_c}{s}.$$

Подставляя $\delta\phi$ в условие равновесия, находим

$$Q = \frac{2\pi \cdot I}{s} \cdot P.$$

Заметим, что методами геометрической статики эту несложную задачу вообще нельзя было бы решить, так как детали механизма неизвестны. Вместо суммы элементарных работ приложенных сил на возможных перемещениях системы можно брать сумму элементарных мощностей на возможных перемещениях точки системы.

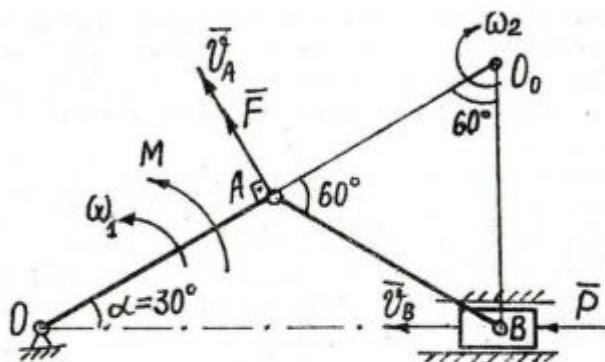


Рис. 61. Схема механизма

Пример (рис. 61).

Дано: $OA; V_A; \omega_1; \alpha; M$. Найти P .

Сумма мощностей $F \cdot V_A + P \cdot V_B = 0$, где

$$F = M / OA; V_A = \omega_1 \cdot OA; \omega_2 = V_A / AO_o; V_B = \omega_2 \cdot O_oB.$$

С учетом этого имеем

$$P = -F \cdot \frac{V_A}{V_B} = -\frac{M\omega_1}{O_oB\omega_2}.$$

12. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ МЕХАНОДИНАМИКИ

Это уравнение базируется на двух принципах: принципе возможных перемещений Лагранжа и главном принципе механодинамики. Принцип возможных перемещений дает общий метод решения задач статики. Главный принцип механодинамики позволяет использовать методы статики для решения задач динамики. Применяя эти два принципа одновременно, мы можем получить общий метод решения задач механодинамики.

Если мы рассматриваем систему с идеальными связями, то, прибавляя ко всем точкам системы кроме действующих на нее активных сил \bar{F}_i^a и реакций связей \bar{N}_i , соответствующие силы инерции $\bar{F}_i^{in} = m\ddot{b}_i$, согласно главному принципу механодинамики, получим систему сил, которая будет находиться в равновесии.

Далее, применяя ко всем силам принцип возможных перемещений, получим

$$\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^N + \sum \delta A_i^{in} = 0. \quad (263)$$

Так как связи идеальные, то $\sum \delta A_i^N = 0$, поэтому

$$\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^{in} = 0. \quad (264)$$

Это общее уравнение динамики. Из него вытекает *принцип Лагранжа*. **При движении системы с идеальными связями в каждый данный момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю. В аналитической форме уравнение имеет вид**

$$\sum [(F_{ix}^a + F_{ix}^{in}) \delta x_i + (F_{iy}^a + F_{iy}^{in}) \delta y_i + (F_{iz}^a + F_{iz}^{in}) \delta z_i] = 0 \Rightarrow \sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^{in} = 0. \quad (265)$$

Этот принцип позволяет составить дифференциальные уравнения движения любой механической системы. Если система представляет собой совокупность каких-нибудь твердых тел, то для составления уравнений нужно к действующим на каждое тело активным силам добавить приложенную в любом центре силу, равную главному вектору сил инерции и пару с моментом, равным главному моменту сил инерции относительно этого центра, а затем применить принцип возможных перемещений.

13. МЕТОД ОБОБЩЁННЫХ КООРДИНАТ

13.1. Понятие об обобщённых координатах

Обобщенными (лагранжевыми) координатами данной механической системы называются такие независимые друг от друга параметры, при помощи которых можно в любой момент времени выразить декартовы координаты всех ее точек и таким образом определить положение этой системы.

Количество таких независимых параметров системы равно числу ее степеней свободы, а значит, и числу независимых между собой возможных перемещений системы. Геометрические связи уменьшают количество указанных параметров. Например, свободная точка A_i имеет три степени свободы и три независимых друг от друга возможных перемещения $\delta x, \delta y, \delta z$ (рис. 62) вдоль координатных осей.

Если точку А связать с другой неподвижной точкой О связью $OA = r$, то количество степеней свободы у точки А уменьшится на единицу и ее положение можно будет описать уже двумя параметрами: φ и ψ . При этом уравнение связи будет иметь вид $x_A^2 + y_A^2 + z_A^2 = r^2$ (уравнение сферы). Обобщенные параметры обозначаются буквой: $q_1, q_2, q_3, \dots, q_s$, где s - число степеней свободы системы. Следовательно, для точки А обобщенные параметры $q_1 = \varphi$ и $q_2 = \psi$.

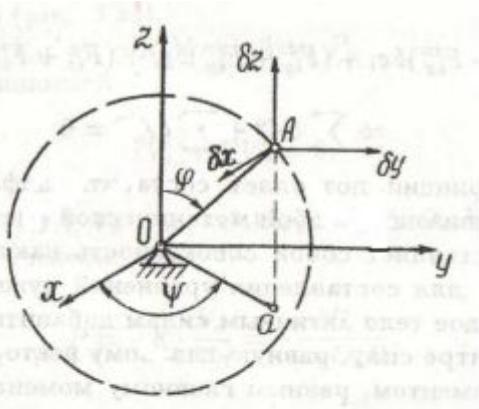


Рис. 62. Схема к анализу возможных перемещений точки А

Если на точку А (рис. 62) наложить еще одну связь, то у нее останется одна степень свободы и один обобщенный параметр, а именно $q_1 = \varphi$ и появятся два уравнения связи (рис. 62)

$$z_A^2 + y_A^2 = (OA)^2 = r^2$$

и

$$y_B = r \sin \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \cos^2 \varphi}.$$

Из изложенного следует, что свободная материальная точка имеет три степени свободы, а n таких точек - $3n$ степеней свободы. После объединения этих свободных точек с помощью связей в систему общее количество степеней свободы точек уменьшится на количество связей k между ними. Поэтому любая механическая система, состоящая из n точек, имеет $s = 3n - k$ степеней свободы.

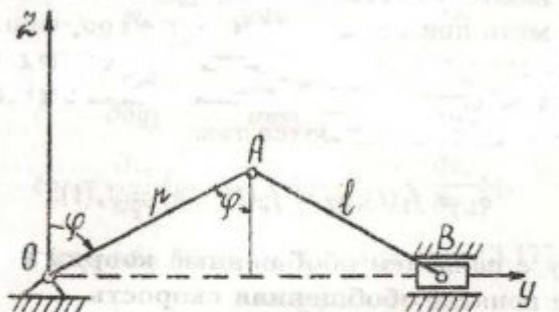


Рис. 63. Схема кривошипно-шатунного механизма

У кривошипно-шатунного механизма (рис. 63) точка А имеет две связи, точка В - три. Из этого следует, что $n = 2; k = 2 + 3 = 5$, тогда $s = 3 \cdot 2 - 5 = 1$.

Пример (рис. 64). Плоский математический маятник имеет очевидно одну ($s = 1$) степень свободы, поэтому его положение определяется одной обобщенной координатой q . Её роль здесь могут выполнить: угол $\varphi = q$, дуга $S_d = q$ и площадь $S_p = q$.

Координата x_M не определяет положение точки М однозначно, так как точка М может отклониться вправо и влево от оси ОХ и иметь при этом одну и ту же координату x_M . Поэтому x_M не может выполнить роль обобщенной координаты.

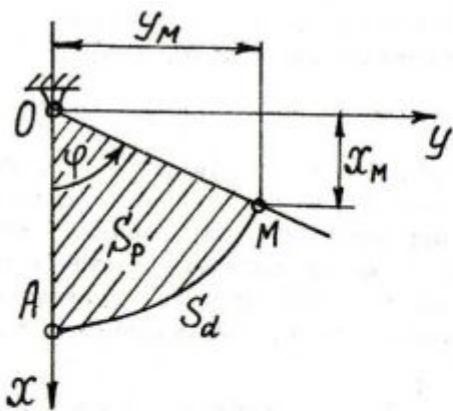


Рис. 64. Схема плоского математического маятника

Кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах записываются так:

$$q_1 = f_1(t); q_2 = f_2(t); \dots; q_s = f_s(t).$$

Наряду с понятием обобщенные координаты системы существует понятие обобщенная скорость.

1. Если q - линейная величина, то $\dot{q} = dq/dt$ - линейная скорость;
2. Если q - угол, то $\dot{q} = dq/dt$ - угловая скорость;
3. Если q - площадь, $\dot{q} = dq/dt$ - секториальная скорость.

13.2. Обобщенные силы

Сообщая системе независимое возможное перемещение, при котором у нее изменится только одна обобщенная координата q , найдем элементарную работу

$$\delta A = Q \delta q,$$

где Q - обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате q .

Здесь Q включает в себя все силы, действующие на систему на перемещении q . Как ее определить?

Если на точку M_i системы действует сила \bar{F} , то элементарная работа этой силы на элементарных изменениях $\delta x, \delta y, \delta z$ декартовых координат определится так

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i = F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z \quad (266)$$

Связь между приращениями декартовых и обобщенных координат устанавливается на основании того, что приращения (изменения, вариации) декартовых координат равны полным дифференциалам функций: $x_i(q_1, q_2, \dots, q_s); y_i(q_1, q_2, \dots, q_s); z_i(q_1, q_2, \dots, q_s)$ по s независимым переменным.

$$\begin{aligned}\delta x_i &= \frac{\partial x_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial x_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial q_s} \delta q_s; \\ \delta y_i &= \frac{\partial y_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial y_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial y_i}{\partial q_s} \delta q_s; \\ \delta z_i &= \frac{\partial z_i}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial z_i}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial z_i}{\partial q_s} \delta q_s.\end{aligned}$$

Заменяя вариации $\delta x_i, \delta y_i$ и δz_i в уравнении (266), имеем:

$$\begin{aligned}\delta A_i &= (F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_1}) \delta q_1 + (F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_2}) \delta q_2 + \\ &\quad \dots \\ &\quad + (F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}) \delta q_s.\end{aligned}\tag{267}$$

Просуммируем результаты в скобках и обозначим:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n (F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_1} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_1} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_1}) &= Q_1; \\ \sum_{i=1}^n (F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_2} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_2} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_2}) &= Q_2; \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n (F_{ix} \frac{\partial x_i}{\partial q_s} + F_{iy} \frac{\partial y_i}{\partial q_s} + F_{iz} \frac{\partial z_i}{\partial q_s}) &= Q_s.\end{aligned}\tag{268}$$

Тогда выражение элементарной работы сил системы в обобщенных координатах

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s,\tag{269}$$

где Q_1, Q_2, \dots, Q_s - обобщенные силы, являющиеся коэффициентами при приращениях обобщенных координат в выражении полной элементарной работы действующих на систему сил.

Пример (рис. 65). На точку A_i действует сила \bar{F}_i .

Декартовы координаты точки A_i : $x_A = r \sin \varphi \cos \psi$; $y_A = r \sin \varphi \sin \psi$; $z_A = r \cos \varphi$;

Найти обобщенные силы Q_1 и Q_2 , соответствующие обобщенным координатам $q_1 = \varphi$ и $q_2 = \psi$. На основании уравнений (268) имеем:

$$\begin{aligned}Q_1 &= F_{ix} \frac{\partial x_A}{\partial q_1} + F_{iy} \frac{\partial y_A}{\partial q_1} + F_{iz} \frac{\partial z_A}{\partial q_1}; \\ Q_2 &= F_{ix} \frac{\partial x_A}{\partial q_2} + F_{iy} \frac{\partial y_A}{\partial q_2} + F_{iz} \frac{\partial z_A}{\partial q_2}.\end{aligned}$$

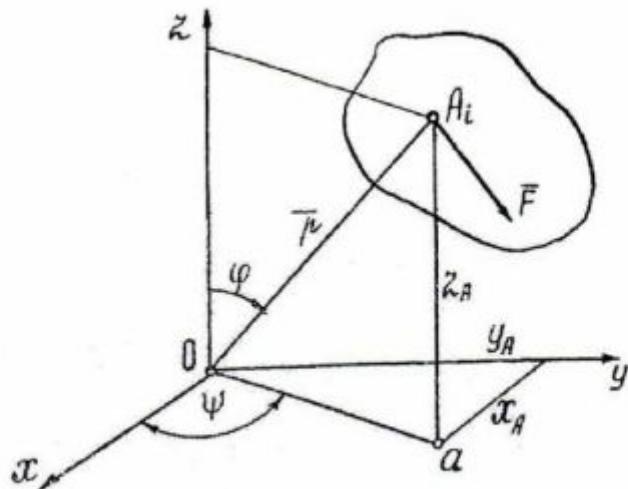


Рис. 65. Схема к определению обобщенных сил

После подстановки в эти уравнения частных производных от координат x_A, y_A, z_A точки A_i по обобщенным координатам $q_1 = \varphi$ и $q_2 = \psi$, получим

$$Q_1 = F_x r \cos \varphi \sin \psi + F_y r \cos \varphi \cos \psi + F_z r (-\sin \varphi); \\ Q_2 = F_y r \sin \varphi (-\sin \psi) + F_z r \sin \varphi \cos \psi.$$

Сумма (269) элементарных работ обобщенных сил Q_1 и Q_2 запишется так

$$\sum_{i=1}^n \delta A_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2.$$

Если у системы изменяется какая-нибудь одна обобщенная координата, например, q_1 , то $\delta q_1 \neq 0; \delta q_2 = \delta q_3 = \dots = 0$ и $\sum_{i=1}^n \delta A_i = Q_1 \delta q_1$, откуда $Q_1 = \sum \delta A_i / \delta q_1$. Таким образом, чтобы найти интересующую нас обобщенную силу Q_1 , нужно дать системе перемещение, соответствующее одной обобщенной координате q_1 , а все остальные обобщенные координаты оставить неизменными. Тогда обобщенная сила Q_1 будет равна ее элементарной работе по перемещению всех точек системы $\sum \delta A_i$, деленной на приращение δq_1 соответствующей обобщенной координаты q_1 .

$$Q_1 = \frac{\sum \delta A_i}{\delta q_1}. \quad (270)$$

Как видно, размерность обобщенной силы равна размерности работы, деленной на размерность соответствующей обобщенной координаты.

13.3. Обобщенные силы в потенциальном силовом поле

Если на систему действуют только потенциальные силы, то силовая функция в декартовых координатах $U = U(x, y, z)$, а в обобщенных координатах

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_s). \quad (271)$$

Тогда полный дифференциал функции (271) равен сумме элементарных работ потенциальных сил.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial U}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial U}{\partial q_s} \delta q_s = \sum \delta A_i. \quad (272)$$

Как видно, в данном случае:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = Q_1; \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = Q_2; \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial q_s} = Q_s. \quad (273)$$

Так как потенциальная энергия $E = -U$, то

$$Q_1 = -\frac{\partial E}{\partial q_1}; \quad Q_2 = -\frac{\partial E}{\partial q_2}; \quad \dots \quad Q_s = -\frac{\partial E}{\partial q_s}. \quad (274)$$

Если все действующие на систему силы потенциальны, то обобщенные силы равны частным производным от силовой функции U или взятым со знаком минус частным производным от потенциальной энергии E по соответствующим обобщенным координатам.

Условия равновесия системы в обобщенных координатах. Для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

1) в декартовых координатах

$$\sum \delta A_i = \sum (F_x \delta x + F_y \delta y + F_z \delta z) = 0$$

2) в обобщенных координатах

$$\sum \delta A_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s = 0.$$

Так как $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ - независимые между собой величины, то указанное условие будет выполнено при $\delta q_1 = \delta q_2 = \dots = \delta q_s = 0$ или при $Q_1 = 0; Q_2 = 0, \dots, Q_s = 0$.

Таким образом, для равновесия механической системы необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы, соответствующие выбранным обобщенным координатам, были равны нулю.

В случае потенциальных сил условие равновесия запишется так:

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0; \quad (275)$$

$$\frac{\partial E}{\partial q_1} = 0; \quad \frac{\partial E}{\partial q_2} = 0; \quad \dots \quad \frac{\partial E}{\partial q_s} = 0, \quad (276)$$

то есть при равновесии системы полный дифференциал функции U или E равен нулю:

$$dU(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0; \quad dE(q_1, q_2, \dots, q_s) = 0.$$

Таким образом, система, на которую действуют потенциальные силы, находится в равновесии в тех положениях, для которых силовая функция или потенциальная энергия системы имеют экстремумы (max или min) или, если ее потенциальная энергия постоянна.

13.4. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа II рода)

Чтобы найти дифференциальные уравнения движения механической системы с геометрическими связями в обобщенных координатах, обратимся к общему уравнению динамики

$$\sum \delta A_i^a + \sum \delta A_i^n = 0. \quad (277)$$

Будем считать все связи, наложенные на систему, идеальными. Тогда в первую сумму войдут работы активных сил, а во вторую - сил инерции. Если система имеет s степеней свободы, то:

$$\sum \delta A_i^a = Q_1^a \delta q_1 + Q_2^a \delta q_2 + \dots + Q_s^a \delta q_s,$$

где $Q_1^a, Q_2^a, \dots, Q_s^a$ - обобщенные активные силы;

$$\sum \delta A_i^{in} = Q_1^{in} \delta q_1 + Q_2^{in} \delta q_2 + \dots + Q_s^{in} \delta q_s,$$

здесь $Q_1^{in}, Q_2^{in}, \dots, Q_s^{in}$ - обобщенные силы инерции.

Подставляя полученные данные в уравнение (272), имеем

$$(Q_1^a + Q_1^{in}) \delta q_1 + (Q_2^a + Q_2^{in}) \delta q_2 + \dots + (Q_s^a + Q_s^{in}) \delta q_s = 0. \quad (278)$$

Так как все $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ между собой не зависимы, то полученное равенство будет выполняться тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ в отдельности будет равен нулю.

$$Q_1^a + Q_1^{in} = 0; Q_2^a + Q_2^{in} = 0; \dots; Q_s^a + Q_s^{in} = 0. \quad (279)$$

Выразим силы инерции $Q_1^{in}, Q_2^{in}, \dots, Q_s^{in}$ через кинетическую энергию системы, то есть через массы m_i точек системы и их скорости V_i .

$$Q_1^{in} = \sum \bar{F}_i^{in} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = - \sum m_i \bar{a}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = - \sum m_i \frac{d \bar{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = - \sum m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) - \bar{V}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) \right]. \quad (280)$$

Учтем, что частная производная от \bar{r}_i по q_1 есть предел отношения частного приращения $\Delta \bar{r}_i$ к приращению Δq_1 .

Откуда в соответствии с правилом Лопитала

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} = \lim \frac{\Delta \bar{r}_i}{\partial q_1} = \lim \frac{d \bar{r}_i}{dt} = \lim \frac{\Delta \cdot (\frac{d \bar{r}_i}{dt})}{\Delta \cdot (dq_1/dt)} = \frac{\Delta \cdot (\frac{d \bar{r}_i}{dt})}{\Delta \cdot (dq_1/dt)} = \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_1}, \quad (281)$$

где \bar{V}_i - скорость i -той точки системы, определяемая радиусом-вектором \bar{r}_i ;
 $\dot{dq}_1/dt = \dot{q}_1$ - обобщенная скорость, соответствующая координате q_1 .

Операции полного дифференцирования по t и частного дифференцирования по q переместительны, что дает

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \right) = \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{d \bar{r}_i}{dt} \right) = \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial q_1}. \quad (282)$$

Теперь равенство (280) можно представить так

$$Q_1^{in} = - \sum m_i \left[\frac{d}{dt} \left(\bar{V}_i \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_1} \right) - \bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial q_1} \right]. \quad (283)$$

или

$$-Q_1^{in} = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sum \frac{m_i V_i^2}{2} \right). \quad (284)$$

Обозначим $\sum \frac{m_i V_i^2}{2} = E_k$ - кинетическая энергия системы. Тогда

$$-Q_1^{in} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1}. \quad (285)$$

Подставляя этот результат в уравнение (280) и учитывая все обобщенные координаты, имеем:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} &= Q_1^a; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_2} &= Q_2^a; \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_s} &= Q_s^a. \end{aligned} \quad (286)$$

Это и есть дифференциальные уравнения движения системы с геометрическими связями или уравнения Лагранжа II-го рода. Это - дифференциальные уравнения

ния второго порядка относительно обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_s . Число этих уравнений равно числу степеней свободы системы.

Если реакции связей оказываются известными, то они включаются в уравнения Лагранжа совместно с активными силами.

Уравнения Лагранжа дают единый и притом достаточно простой метод решения задач динамики. Преимущество этих уравнений в том, что их вид и число не зависят ни от количества тел (или точек), входящих в рассматриваемую систему, ни от того, как эти тела движутся.

При идеальных связях в правые части уравнений входят обобщенные активные силы и, следовательно, эти уравнения позволяют исключить из рассмотрения все наперед неизвестные реакции связей.

Основная задача механики в обобщенных координатах состоит в том, чтобы, зная обобщенные силы Q_1, Q_2, \dots, Q_s и начальные условия, найти закон движения системы в виде:

$$q_1 = f_1(t); \quad q_2 = f_2(t); \dots; q_s = f_s(t). \quad (287)$$

13.5. Случай потенциальных сил

Если все действующие на систему силы потенциальны то, учитывая, что

$$Q_1^a = -\frac{\partial E}{\partial q_1}; \quad Q_2^a = -\frac{\partial E}{\partial q_2}; \dots; Q_s^a = -\frac{\partial E}{\partial q_s}, \quad (288)$$

а также то, что потенциальная энергия зависит от обобщенных координат и не зависит от обобщенных скоростей, из уравнений (286) имеем

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_1} + \frac{\partial E}{\partial q_1} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (E_k - E)}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial (E_k - E)}{\partial q_1} = 0. \quad (289)$$

Подчеркнем, что это равенство справедливо потому, что потенциальная энергия зависит только от координат q_1, q_2, \dots, q_s и не зависит от обобщенных скоростей $\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_1} = 0$.

Введем функцию $L = E_k - E$. Это функция Лагранжа или кинетический потенциал. В случае потенциальных сил уравнения Лагранжа (281) примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_1} &= 0; \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_2} &= 0; \\ \dots \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_s} &= 0. \end{aligned} \quad (290)$$

Из этого следует, что если на систему действуют только потенциальные силы, то ее состояние определяется заданием только функции Лагранжа. Зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения системы. Уравнения Лагранжа удобны тем, что их можно использовать для изучения относительного и абсолютного движения любой механической системы с геометрическими связями независимо от количества точек или тел, входящих в систему.

13.6. Последовательность решения задач с помощью уравнений Лагранжа II-го рода

1) Изобразить механическую систему схематически; 2) установить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты; 3) показать на схеме все действующие силы (для систем с идеальными связями -- только активные); 4) вычислить обобщенные силы Q_i (при этом, чтобы избежать ошибок в знаках, каждое сообщаемое системе возможное перемещение должно быть направлено так, чтобы приращение соответствующей координаты было положительным); если перемещение изменяет две обобщенные координаты, то соответствующие ей обобщенные силы определяются по формулам:

$$\begin{aligned} Q_1 &= F_{ix} \frac{\partial x_A}{\partial q_1} + F_{iy} \frac{\partial y_A}{\partial q_1} + F_{iz} \frac{\partial z_A}{\partial q_1}; \\ Q_2 &= F_{ix} \frac{\partial x_A}{\partial q_2} + F_{iy} \frac{\partial y_A}{\partial q_2} + F_{iz} \frac{\partial z_A}{\partial q_2}. \end{aligned} \quad (291)$$

5) вычислить кинетическую энергию E_k системы и выразить ее через обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости \dot{q}_i , и подставить все вычисленные величины в конечные уравнения (291).

Если заданы начальные условия и известны силы, приложенные к системе, то после интегрирования полученных уравнений будет найден закон движения системы в виде:

$$q_1 = f_1(t); \quad q_2 = f_2(t); \dots \quad q_s = f_s(t). \quad (292)$$

Если закон задан, то составленные уравнения позволяют определить силы, действующие на систему. Когда они являются потенциальными, то вместо обобщенных сил определяют потенциальную энергию системы, выразив ее через обобщенные координаты.

Затем определяют кинетическую энергию системы и составляют функцию Лагранжа $L = E_k - E$. Подставляя L в уравнения (285) и интегрируя их, находят искомый результат.

14. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ ЯВЛЕНИЙ

14.1. Общие сведения о гироскопах

Гироскопом называют твердое тело, вращающееся вокруг оси, направление которой в пространстве может изменяться со временем.

В гироскопических приборах гироскопы обычно закрепляют в кольцевом подвесе так, чтобы при любом повороте гироскопа его центр масс оставался неподвижным (рис. 66).

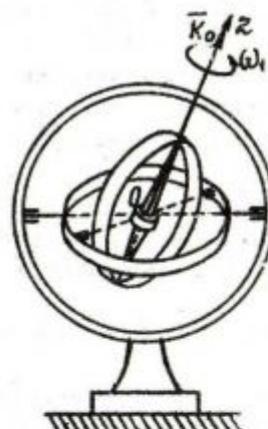


Рис. 66. Схема гироскопа

Гироскопы имеют очень большую угловую скорость собственного вращения ω вокруг своей оси симметрии, что дает возможность не учитывать (в первом приближении) другие вращения. Кинетический момент гироскопа \bar{K}_o относительно его неподвижной точки О направлен по оси OZ в ту же сторону, куда и вектор $\bar{\omega}_1$.

$$\bar{K}_o = \bar{K}_z = I_z \bar{\omega}_1, \quad (293)$$

где I_z - момент инерции гироскопа относительно оси его симметрии.

Свободный гироскоп. Гироскоп, закрепленный так, что его центр тяжести неподвижен, а ось может совершать любой поворот вокруг этого центра, называется свободным (рис. 66). Пренебрегая трением в осях, имеем

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \sum \bar{m}_o (\bar{F}_i) = 0 \quad (294)$$

и $\bar{K}_o = const$ - условие равновесия.

Поскольку вектор \bar{K}_o направлен все время по оси гироскопа, то отсюда следует, что **ось свободного гироскопа сохраняет неизменное направление в пространстве по отношению к инерциальной (звездной) системе отсчета**. Кинетический момент гироскопа определится по формуле

$$K_o = K_z = I_z \cdot \omega_1. \quad (295)$$

14.2. Действие силы на ось гироскопа

Пусть на ось быстро вращающегося гироскопа действует сила \bar{F} (рис. 67), тогда $M_0 = F \cdot h$ и по теореме моментов имеем

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{M}_o \Rightarrow \frac{d(\bar{OB})}{dt} = \bar{M}_o, \quad (296)$$

где В - конец вектора \bar{K}_o .

Учитывая, что $\frac{d(\bar{OB})}{dt} = \bar{V}_B$, получаем $\bar{V}_B = \bar{M}_o$.

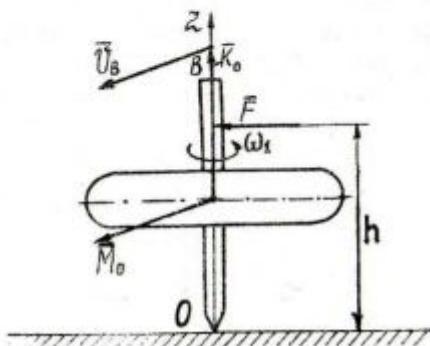


Рис. 67. Схема действия силы на ось гироскопа

Скорость конца вектора кинетического момента тела относительно центра О равняется по модулю и по направлению главному моменту внешних сил относительно того же центра (теорема Резаля). Следовательно, при действии силы \bar{F} на ось гироскопа точка В, а с нею и ось гироскопа, будет перемещаться по направлению вектора \bar{M}_o .

Таким образом, если на ось быстро вращающегося гироскопа подействует сила, то ось начнет отклоняться не в сторону действия силы, а по направлению, которое имеет вектор \bar{M}_o момента этой силы относительно неподвижной точки О гироскопа, то есть, перпендикулярно силе \bar{F} . Когда действие силы \bar{F} прекращается, то $\bar{M}_o = 0$ и $\bar{V}_B = 0$, и ось гироскопа возвращается в исходное положение.

Если сила действует кратковременно (толчок), то ось гироскопа практически не изменяет своего направления. В этом проявляется свойство устойчивости оси быстро вращающегося гироскопа.

14.3. Регулярная прецессия тяжелого гироскопа

Если неподвижная точка О гироскопа (рис. 68) не совпадает с центром тяжести С, то на ось гироскопа все время действует сила, которая по доказанной выше теореме Резаля будет отклонять ось гироскопа OZ_1 не вниз, а по направлению $\bar{m}_o(\bar{P})$, то есть по направлению, перпендикулярному плоскости OZ_1Z_2 , в результате ось гироскопа начнет вращаться вокруг вертикальной оси OZ_2 , описывая коническую поверхность. Такое движение оси гироскопа называется прецесссией (рис. 68).

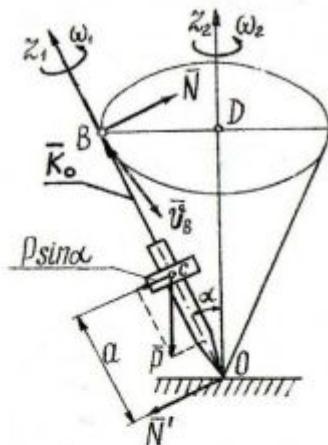


Рис. 68. Схема к анализу прецессии гироскопа

Найдем угловую скорость прецессии ω_2 . Введем обозначение $OC = a$. Учтем, что $V_B = M_o$ и $M_o = m_o(\bar{P}) = P \cdot a \sin \alpha$. С другой стороны $V_B = \omega_2 BD = \omega_2 OB \sin \alpha = \omega_2 K_o \sin \alpha$, так как $\overline{OB} = \overline{K}_o$. Поскольку $K_o = K_{z1} = I_{z1} \cdot \omega_1$, то $V_B = I_{z1} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \sin \alpha$. Следовательно, равенство $V_B = M_o$ дает $I_{z1} \cdot \omega_1 \cdot \omega_2 \sin \alpha = P \cdot a \cdot \sin \alpha$, откуда

$$\omega_2 = \frac{P \cdot a}{I_{z1} \cdot \omega_1}. \quad (297)$$

Так как ω_1 велика, то угловая скорость ω_2 прецессии будет величиной малой.

Период прецессии оси Земли в силу того, что равнодействующая сил притяжения Солнца и Луны не проходит через центр масс Земли (из-за ее не шарообразной формы) равен примерно 26000 лет.

14.4. Гироскопический момент

Так как $\omega_2 \ll \omega_1$ и $V_B = I_{z1} \omega_1 \cdot \omega_2 \sin \alpha = M_o = m_o(\bar{P})$, то момент M_o создает реактивную пару сил N и N' , которая стремится совместить ось вращения OZ_1 с осью OZ_2 (рис. 66). За счет этой пары у быстровращающегося прецессирующего волчка ось вращения принимает вертикальное положение.

Пара сил NN' называется гироскопической парой, а ее момент M_{gir} - гироскопическим моментом. Так как по модулю $M_{gir} = M_o$, то

$$M_{gir} = I_{z1} \omega_1 \cdot \omega_2 \sin \alpha. \quad (298)$$

Отсюда следует правило Н.Е. Жуковского. Если быстро вращающемуся гироскопу сообщить вынужденное прецессионное движение, то на подшипники, в которых закреплена ось гироскопа, будет действовать пара сил с моментом M_{gir} , стремящимся кратчайшим путем установить ось его собственного вращения параллельно оси прецессии так, чтобы направления векторов ω_1 и ω_2 при этом совпали.

Кроме давления на подшипники гироскопический момент может вызвать движение того тела, с которым скреплены эти подшипники, если это движение допускается наложенным связями. Это обязательно надо учитывать.

У массивных и быстро вращающихся механизмов сельхозмашин тоже возникает гироскопический момент. Гироскопический момент вращающегося молотильного барабана комбайна настолько велик, что при резком повороте этого комбайна с включенной молотилкой может произойти поломка подшипников вала молотильного барабана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бурдун Г.Д. Справочник по международной системе единиц. Издательство стандартов. М. 1977. 232с.
2. Лачуга Ю.Ф., Ксендзов В.А. Теоретическая механика. М.: «Колос», Высшая школа, 2000.
3. Бутенин Н.В. и др. Курс теоретической механики. В двух томах.- СПб.: Издательство «Лань», 2004.-730 с.
4. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. 14-е изд. М.: Высшая школа. 2004.-416 с.
5. Канарев Ф.М. Начала физхимии микромира. 12-е издание. Краснодар, 2010. 754 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МЕХАНОДИНАМИКА

1. Введение	1
1.1. Общие сведения о механодинамике	1
1.2. Классификация движений и последовательность решения задач механодинамики	2
2. Законы механодинамики	2
2.1. Основной закон механодинамики	2
2.2. Главный принцип механодинамики	3
2.3. Первый закон механодинамики	5
2.4. Второй закон механодинамики	8
2.5. Третий закон механодинамики	9
2.6. Четвёртый закон механодинамики	10
2.7. Пятый закон механодинамики	11
3. Механодинамика криволинейного движения материальной точки	12
3.1. Механодинамика ускоренного движения материальной точки	12
3.2. Механодинамика равномерного движения материальной точки	14
3.3. Механодинамика замедленного движения материальной точки	15
4. Сложное движение материальной точки	16
5. Колебательное движение материальной точки	25
5.1. Свободные колебания	25
5.2. Затухающие колебания	27
5.3. Вынужденные колебания. Резонанс	29
6. Общие теоремы механодинамики	31
6.1. О количестве движения точки	31
6.2. Теорема об изменении количества движения материальной точки	32
6.3. Ударная сила	35
6.4. Момент количества движения материальной точки	34
6.5.. Теорема моментов относительно центра	35
6.6. Закон сохранения момента количества движения (кинетического момента)	36

7. Приложение общих теорем механодинамики к теории удара	37
7.1. Основные определения	37
7.2. Общие теоремы удара	38
7.3. Теорема об изменении главного момента количества движения при ударе	38
7.4. Частные случаи удара	39
7.5. Удар по вращающемуся телу	40
8. Работа, мощность, энергия	41
8.1. Работа силы	41
8.2. Мощность	43
8.3. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки	44
8.4. Потенциальное силовое поле	45
8.5. Понятие о потенциальной энергии	46
8.6. Закон сохранения энергии	46
8.7. Теорема об изменении кинетической энергии материальной точки в относительном движении	47
8.8. Примеры гравитационных задач	47
9. Механодинамика механической системы	49
9.1. Масса системы. Центр масс	49
9.2. Момент инерции тела относительно оси	50
9.3. Моменты инерции некоторых однородных тел	52
9.4. Момент инерции тел относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса)	53
9.5. Физический маятник	54
9.6. Экспериментальное определение момента инерции тел	55
9.7. Дифференциальные уравнения движения центра масс механической системы	63
9.8. Количество движения механической системы	68
9.9. Теорема об изменении количества движения механической системы	69
9.10. Закон сохранения количества движения механической системы	71
9.11. Главный момент количества движения механической системы	71
9.12. Теорема об изменении главного момента количества движения механической системы (теорема моментов)	72
9.13. Теорема моментов относительно центра масс	73
9.14. Закон сохранения главного момента количества движения	74
9.15. Кинетическая энергия системы	75
9.16. Кинетическая энергия тела при разных видах его движения	75
9.17. Теорема об изменении кинетической энергии системы	77
9.18. Приложение общих теорем динамики к динамике твердого тела	78
10. Работа законов механодинамики в микромире	80
10.1. Теория электрона	80
11. Принципы механики	84
11.1. Принцип возможных перемещений (принцип Лагранжа)	84
11.2. Порядок решения задач с использованием принципа возможных перемещений	86
12. Общее уравнение механодинамики	88
13. Метод обобщенных координат	88
13.1. Понятия об обобщённых координатах	88
13.2.. Обобщенные силы	90
13.3. Обобщённые силы в потенциальном поле	93
13.4. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнение Лагранжа II рода)	94
13.5. Случай потенциальных сил	96
13.6. Последовательность решения задач с помощью уравнений Лагранжа II ро-	97

да	98
14. Элементы теории гироскопических явлений	98
14.1. Общие сведения о гироскопах	99
14.2. Действие силы на ось гироскопа	99
14.3. Регулярная прецессия тяжелого гироскопа	100
14.4. Гироскопический момент	101
Литература	