ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА.
СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Примеры решения задач

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Теория колебаний является одним из основных разделов не только теоретической механики, но и механики в целом, ввиду ее большого теоретического и практического значения. Эта теория дает основную научную базу для проектирования и исследования любых материальных систем, в которых имеют место колебания, отрицательно сказывающиеся на работоспособности изделий в области машиностроения, станкостроения, транспортной техники, кораблестроения, авиации, ракетной техники и космонавтики, приборостроения, радиоэлектроники и во многих других областях науки и техники.

Знание основ теории колебаний совершенно необходимы студентам технических вузов, получающих инженерные специальности.

В учебном пособии приведены краткие сведения по аналитической механике, дано описание свободных (затухающих и незатухающих) колебаний системы с одной степенью свободы. Даны примеры решения задач на определение характера устойчивости равновесия систем и на исследование их свободных колебаний.

1. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

1.1. Связи материальной системы

Систему называют свободной, если координаты и скорости ее точек могут принимать произвольные значения. В противном случае система является несвободной.

Ограничения, наложенные на координаты и скорости точек системы, называются связями.

Обычно связи представляют тела (твердые или гибкие), с которыми соприкасаются точки системы. Конструктивно связи реализуются в виде шарниров, стержней, тросов, нитей, направляющих, поверхностей и т.д. В аналитической механике от конструктивного оформления связей отвлекаются и записывают связи в виде уравнений (или неравенств).

Каждая связь устанавливает какую-то зависимость между временем, координатами точек и их производными по времени, то есть каждой связи в прямоугольной системе координат Oxy соответствует уравнение (неравенство)

$$F(x_1,\ y_1,\ z_1,\ldots\ldots\ldots,x_n,\ y_n,\ z_n,\ldots\ldots\ldots,\dot{x}_1,\ \dot{y}_1,\ \dot{z}_1\ldots\ldots\ldots,\dot{x}_n,\ \dot{y}_n,\ \dot{z}_n \le 0,$$

где n — число точек системы.

Связи называют голономными (конечными или интегрируемыми), если их уравнения могут быть представлены в виде, не содержащим производных от координат точек по времени. В противном случае связи называют неголономными.

Неголономные связи ограничивают выбор величины и направления скоростей точек системы, т.е. вынуждают систему двигаться в некотором определенном направлении.

Связи называют стационарными (склерономными), если их уравнения не зависят главным образом от времени. В противном случае связи называют нестационарными (реономными).

В зависимости от того задаются уравнения связей равенствами или неравенствами, связи подразделяют на удерживающие (двусторонние) и неудерживающие (односторонние). Удерживающие связи описывают при помощи уравнений, а неудерживающие — при помощи неравенств.

В задачах механики реакции связей обычно не известны. Задают лишь способы осуществления связей. Определение реакций связей движущейся системы производят после описания ее движения, т.е. после составления и решения уравнений движения системы. Определение динамических реакций колебательных систем и связанные с этим расчеты прочности деталей и узлов машин является одной из важнейших задач динамики машин.

1.2. Возможные перемещения точки и системы. Возможная работа силы. Идеальные связи

Возможным перемещением точки $\delta\bar{r}$ называют воображаемое бесконечно малое перемещение точки $M\ (x,\ y,\ z)$, допускаемое в данный момент времени наложенными на точку связями.

$$\delta\bar{r} = \delta x\ \bar{i} + \delta y\bar{j} + \delta z\bar{k}; \qquad \delta\bar{r}\{\delta r,\ \delta y,\ \delta z\}$$

Вариации δx, δy, δz обусловлены только связями и вычисляются при неизменном времени t. Действительные перемещения $\delta\bar{r}$ $\{\delta r,\ \delta y,\ \delta z\}$, кроме связей, зависят от действующих на точку сил и вычисляются с учетом изменения их от времени.

Вектор $\delta\bar{r}$ направлен по касательной к кинематически возможной (допускаемой связями) траектории точки.

Возможным перемещением системы называют совокупность возможных перемещений всех ее точек

$$\delta\bar{r}_1\ ,\ \delta\bar{r}_2\ ,\ldots\ldots,\ \delta\bar{r}_n\ .$$

Работу, выполняемую силой на возможном перемещении точки ее приложения, называют возможной работой силы

$$\delta A = \bar{F}\delta\bar{r} = F_x\delta x + F_y\delta y + F_z\delta z\ ;$$

$$\bar{F}\{F_x, F_y, F_z\}.$$

Связи называют идеальными (совершенными), если сумма возможных работ их реакций равна нулю.

Условие идеальности связей имеет вид

$$\Sigma \bar{R}_k \delta \bar{r}_k = 0,$$

где $\bar{R}_k$ — реакция связи, наложенной на k-ую точку системы;
$\delta \bar{r}_k$ — возможное перемещение этой точки.

Идеальными связями являются абсолютно гладкие (без трения) опорные поверхности и плоскости, нерастяжимые (недеформируемые) стержни, нерастяжимые нити и т.д. Это те тела, упрощенные (идеализированные) представления о которых в виде “абсолютно твердых” и “абсолютно гладких” входят в состав основных допущений теоретической механики, представляющих первое приближение к действительности.

1.3. Число степеней свободы. Обобщенные координаты

Пусть мы имеем свободную систему, состоящую из n точек и подчиненную s стационарным, удерживающим и голономным связям.

Число независимых координат и перемещений точек системы определяют по формуле

$$N = 3n - s,$$

где s — число наложенных на систему связей.

Число независимых координат, однозначно определяющих положение системы в пространстве, называют числом степеней ее свободы.

Обобщенными координатами системы будем называть совокупность, независимых между собой геометрических параметров, которые однозначно определяют положение системы в пространстве.

Число обобщенных координат голономной системы равно числу степеней ее свободы.

Обобщенные координаты принято обозначать q_1, $q_2 \dots q_N$, где N — число степеней свободы системы.

1.4. Выражения возможных перемещений в обобщенных координатах

Выразим декартовы координаты точек системы через обобщенные координаты (в виде некоторых функций)

$$\begin{aligned} x_k &= x_k\,(q_1, \dots, q_N); \\ y_k &= y_k\,(q_1, \dots, q_N); \\ z_k &= z_k\,(q_1, \dots, q_N); \\ k &= 1,2,\dots,n. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Радиус-векторы всех точек системы также можно выразить через обобщенные координаты

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k\,(q_1, \dots, q_N); \tag{1.2}$$

Вектор $\delta\bar{r}_k$ можно вычислить по правилу составления полного дифференциала от функции многих переменных (при фиксированном значении времени t). По правилу составления полных дифференциалов получим

$$\delta\bar{r}_k = \Sigma\{\delta\bar{r}_k / \delta q_i\}\ \delta q_i \tag{1.3}$$

$$\Sigma\{\delta\bar{r}_k / \delta q_i\} = \{\delta x_k / \delta q_i\}\bar{i} + \{\delta y_k / \delta q_i\}\bar{j} + \{\delta z_k / \delta q_i\}\bar{k}\ ; \tag{1.4}$$

$$i = 1,2,\dots,n.$$

1.5. Обобщенные силы

Рассмотрим систему, подчиненную стационарным, удерживающим и голономным связям. Сообщим системе возможное перемещение ($\delta\bar{r}_1, \dots, \delta\bar{r}_n$) и вычислим сумму возможных работ, приложенных к ней активных сил ($\bar{F}_1, \dots, \bar{F}_n$). С учетом (1.3) получим

$$\Sigma\delta A_k = \Sigma\bar{F}_k\,\delta\bar{r}_k = \Sigma\bar{F}_k\,\{\Sigma\partial\bar{r}_k/\partial q_i\}\,\delta q_i = \Sigma\{\Sigma\bar{F}_k\,(\partial\bar{r}_k/\partial q_i)\}\,\delta q_i =$$

$$= \Sigma Q_i\,\delta q_i\,. \tag{1.5}$$

где $Q_1,\dots,Q_N$ — обобщенные силы при обобщенных координатах $q_1,\dots,q_N$.

Обобщенные силы определяют по формулам

$$Q_i = \Sigma \bar{F}_k \ (\partial \bar{r}_k / \partial q_i) \qquad (1.6)$$

Обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате данной системы называют коэффициент при вариации (приращении) этой обобщенной координаты в выражении для возможной работы сил этой системы.

1.6. Вычисление обобщенных сил

Первый способ

На основании (1.6) имеем

$$Q_i = \Sigma \bar{F}_k \ (\partial \bar{r}_k / \partial q_i) = \Sigma \ [F_{kx} \ (\partial x_k / \partial q_i) + F_{ky} \ (\partial y_k / \partial q_i) + F_{kz} \ (\partial z_k / \partial q_i)] \ . \qquad (1.7)$$

Частные производные $\partial x_k / \partial q_i$, $\partial y_k / \partial q_i$, $\partial z_k / \partial q_i$ находят с помощью зависимостей (1.1).

Второй способ

Этот способ наиболее удобен. Сообщим системе такое возможное перемещение, при котором вариации всех обобщенных координат, кроме одной (для которой определяют обобщенную силу), были равны нулю. Коэффициент при этой нулевой вариации в формуле для возможной работы всех активных сил дает нам искомую обобщенную силу.

Пусть $\delta q_1 \neq 0$; $\quad \delta q_2 = \ldots = \delta q_N = 0.$

$$\Sigma \delta A_k = \Sigma \delta A_k \ (q_1) = Q_1 \ \delta q_1.$$

$$Q_1 = \Sigma \delta A_k \ (q_1) \ / \delta q_1.$$

Аналогичным образом вычисляют остальные обобщенные силы.

Третий способ

Этот способ применяют только для консервативных систем.

Потенциальная энергия системы

$$\Pi = \Pi\ (x_1,\ y_1,\ z_1,\ldots,\ x_n,\ y_n,\ z_n) = \Pi\ (q_1,\ldots,q_n).$$

Проекции потенциальной силы на оси координат определяют по формулам

$$F_{kx} = (-\partial\Pi\ /\partial x_k)\ ,\ F_{ky} = (-\partial\Pi\ /\partial y_k)\ ,\ F_{kz} = (-\partial\Pi\ /\partial z_k). \qquad (1.8)$$

После преобразования (1.7) с помощью (1.8) для обобщенной потенциальной силы получим

$$Q_i = Q^n{}_i = (-\partial\Pi\ /\partial q_i) \qquad (1.9)$$

$$i=1,2,\ldots,n.$$

1.7. Уравнения Лагранжа 2-го рода. Методика составления этих уравнений

Уравнения Лагранжа 2-го рода являются наиболее универсальным инструментом исследования динамики голономных систем с конечным числом степеней свободы. Входящие в эти уравнения величины (обобщенные координаты q_i и обобщенные скорости $\dot{q}_i$), определяющие движение системы, непосредственно связаны с заданными (обобщенными) силами.

Уравнения Лагранжа 2-го рода имеют вид

$$d/dt\ \ (\partial T\ /\partial\dot{q}_i\ )\ -\ (\partial T\ /\partial q_i) = Q_i\ ;$$

$$i=1,2,\ldots,n,$$

где T — кинетическая энергия системы;

q_i — обобщенные координаты;

$\dot{q}_i$ — обобщенные скорости;

Q_i — обобщенные силы.

При изучении малых колебаний особую роль играют системы с идеальными связями, к которым приложены только потенциальные силы (консервативные системы).

В этом случае имеем

$$d/dt\ \ (\partial L\ /\partial\dot{q}_i\ )\ -\ (\partial L\ /\partial q_i) = 0\ ; \qquad (1.10)$$

где $L = T - \Pi$ — функция Лагранжа.

“Консерватизм” системы заключается в том, что ее полная механическая энергия остается постоянной во все время движения

$$E = T + \Pi = \mathrm{const}.$$

Составление уравнений Лагранжа для совершенно различных задач проводится в одной и той же последовательности (или по одному и тому же алгоритму).

1. Изобразить систему в произвольный момент времени. Приложить к точкам системы заданные (активные) силы. Силы трения следует отнести к активным силам.

2. Определить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты.

3. Вычислить кинетическую энергию системы и выразить ее через обобщенные координаты и обобщенные скорости.

4. Найти обобщенные силы системы при выбранных обобщенных координатах.

5. Выполнить математические операции, предусмотренные уравнениями Лагранжа 2-го рода.

6. Указать начальные условия (начальные значения обобщенных координат и скоростей).

7. Проинтегрировать составленные уравнения Лагранжа 2-го рода с учетом начальных условий.

2. СВОБОДНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ. ОБЩИЕ СВОЙСТВА КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ

2.1. Предварительные замечания

Одним из наиболее часто встречающихся в природе и технике устойчивых движений является колебательное движение системы около положения равновесия. Несмотря на различную физическую природу и различную сложность колебательных систем, многие свойства, характеризующие движение таких систем около положения равновесия, являются общими. Прежде всего необходимо установить, является ли состояние равновесия, в окрестности которого изучается движение системы, состоянием устойчивого равновесия.

2.2. Потенциальная энергия системы. Устойчивость равновесия консервативной системы. Теорема Лагранжа–Дирихле

Рассмотрим консервативную систему с голономными и стационарными связями, имеющую N степеней свободы.

Суждение об устойчивости или неустойчивости состояния равновесия консервативной системы можно получить, рассмотрев изменение потенциальной энергии системы около этого положения равновесия.

Потенциальная энергия системы является функцией ее обобщенных координат

$$\Pi = \Pi(q_1,\ldots,q_N).$$

Совместим начало отсчета каждой из обобщенных координат с положением равновесия системы. Разложим потенциальную энергию Π в ряд Маклорена в окрестности этого положения системы

$$\Pi = \Pi(0) + \Sigma(\partial\Pi/\partial q_i)\, q_i + 0{,}5\, \Sigma(\partial^2\Pi/\partial q_i\, \partial q_j)\, q_i\, q_j + \ldots \qquad (2.1)$$

Потенциальную энергию системы в положении равновесия можно принять равной нулю, так как ее значение определяют с точностью до произвольной постоянной

$$\Pi(0) = \Pi\,(0,\ldots,0) = 0.$$

Второй член ряда (2.1) содержит обобщенную силу, которая в рассматриваемом положении равна нулю

$$Q_i = -\delta\Pi/\delta q_i\big|_0 = 0.$$

$$i=1,2,\ldots,n\ .$$

Ряд (2.1) принимает вид

$$\Pi = 0{,}5\sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}\, q_i\, q_j, \qquad (2.2)$$

где $\quad c_{ij} = (\partial^2 П / \partial q_i \, \partial q_j);\qquad i,j=1,2,\ldots,n\ .\qquad (2.3)$

Постоянные c_{ij} называют коэффициентами жесткости.

Условие обращения в нуль обобщенных сил в положении равновесия системы означает, что потенциальная энергия $П$ в этом положении принимает экстремальное значение.

Условия устойчивости системы с конечным числом степеней свободы устанавливают теоремой Лагранжа – Дирихле.

Положение равновесия консервативной системы устойчиво, если потенциальная энергия системы в этом положении имеет минимум.

Эта теорема устанавливает достаточные условия устойчивости положения равновесия консервативных систем.

Для системы с одной степенью свободы имеем $(N = 1)$

$$П=0,5\, cq^2\ ,\qquad (2.4)\qquad\qquad Q = Q^п = \partial П / \partial q = -cq\ ,\qquad (2.5)$$

где c — обобщенный коэффициент жесткости (характеризует упругие свойства системы);

q — обобщенная координата.

В рассматриваемом случае существование минимума потенциальной энергии определяют условием

$$\partial^2 П / \partial q^2 > 0. \qquad (2.6)$$

Сделаем ряд замечаний, касающихся потенциальных сил.

Обычно встречается два типа потенциальных сил: 1) силы постоянные по величине и направлению, в частности, сила тяжести;

2) силы упругости пружин (упругих элементов).

Потенциальная энергия силы тяжести твердого тела

$$П = mgh,$$

где m — масса тела;

$g = 9,8$ [м/с^2] — ускорение силы тяжести;

h — расстояние по вертикали от начала отсчета до центра тяжести тела.

Еще одним типом потенциальных сил являются силы упругости пружин. Обычно рассматривают два вида пружин — линейную и спиральную. Потенциальная энергия пружины

$$П = 0{,}5cq^2 \ .$$

Для линейной пружины $c = c_x$ *[Н/м]* — жесткость пружины ($q = x$ — относительное перемещение концов пружины или ее деформация).

Для спиральной пружины $c = c_\varphi$ *[Нм/рад]* — угловая жесткость пружины (q=φ — угол относительного закручивания концов пружины).

2.3. Кинетическая энергия системы с одной степенью свободы. Обобщенная сила сопротивления среды

Кинетическая энергия с одной степенью свободы вычисляется по формуле

$$T = 0{,}5a(\dot{q})^2 \quad , \tag{2.7}$$

где a — коэффициент инерции (характеризует инертные свойства системы).

Коэффициент инерции системы имеет размерность массы или момента инерции.

Движение системы в реальных условиях происходит при наличии сил сопротивления, вызывающих рассеивание (диссипацию) механической энергии системы.

Предположим, что силы сопротивления, действующие на каждую точку системы, пропорциональны скорости

$$\overline{R}_к = \mu_k \, \overline{v}_k \ , \tag{2.8}$$

где m_k — коэффициент сопротивления движению k-ой точки системы;
$\overline{v}_k$ — скорость этой точки.

По определению обобщенной силы имеем

$$Q^c = \Sigma\overline{R}_k \ (\partial\overline{r}_k \ /\partial q) \ = -\Sigma\mu_k\overline{v}_k \ (\partial\overline{r}_k \ /\partial\overline{q}) \ = -(\partial Ф \ /\partial q), \tag{2.9}$$

$$\text{где} \quad Ф = 0.5 \ \mu_k \ \overline{v}^2_k \ . \tag{2.10}$$

Функцию $Ф$ называют функцией рассеивания (диссипативной функцией Рэлея). Эта функция по своей структуре аналогична кинетической энергии системы, только в ней вместо массы точек входят коэффициенты сопротивления.

Выражению для T соответствует выражение для Φ, а именно

$$\Phi = 0.5\mu \ (\dot{q})^2 , \qquad (2.11)$$

где μ — обобщенный коэффициент сопротивления среды.

С помощью (2.11) находим выражение для обобщенной силы сопротивления среды

$$Q^c = -(\partial T /\partial\dot{q}) = -\mu\dot{q}. \qquad (2.12)$$

2.4. Колебательная система и ее обобщенная сила

Материальную систему называют колебательной, если все ее обобщенные координаты или часть из них изменяются не монотонно, а имеют колебательный характер, т.е. принимают нулевые значения по крайней мере несколько раз.

Вывод дифференциальных уравнений колебаний системы может быть осуществлен при помощи общих теорем динамики или принципа Даламбера. Наиболее общий способ составления дифференциальных уравнений колебаний системы основан на применении уравнений Лагранжа 2-го рода.

Движение системы с одной степенью свободы описывают в обобщенных координатах одним уравнением Лагранжа

$$d /dt \ (\partial T /\partial\dot{q}) - (\partial\Phi /\partial \ q) = Q . \qquad (2.13)$$

Обобщенная сила в общем случае состоит из трех сил

$$Q = Q^{\text{п}} + Q^{\text{с}} + Q^{\text{в}} ,$$

где Q^n — потенциальная сила;
Q^c — сила сопротивления или диссипативная сила;
$Q^в$ — возмущающая сила.

Потенциальные силы зависят от положения системы, т.е. от ее обобщающих координат. Эти силы играют роль так называемых восстанавливающих сил. Они возникают при отклонении системы из положения равновесия и стремятся вернуть систему в это положение. Именно восстанавливающие силы обуславливают колебательные свойства систем.

Силы сопротивления зависят от скоростей точек системы и направлены противоположно этим скоростям. Эти силы препятствуют развитию колебаний. Системы, в которых действуют указанные силы, называют диссипативными системами.

Возмущающими силами называют силы, зависящие от времени. Они носят периодический или случайный характер.

В настоящем пособии мы будем рассматривать движение системы, находящейся под действием потенциальных сил и сил сопротивления среды.

2.5. Свободные колебания системы с одной степенью свободы

Если точкам системы, находящейся в состоянии устойчивого равновесия, сообщить малые отклонения и малые начальные скорости, то система будет совершать свободные колебания около этого положения равновесия.

Рассмотрим движение системы с одной степенью свободы, подчиненной голономным, идеальным, стационарным связям около положения устойчивого равновесия под действием только восстанавливающих сил.

Вблизи положения равновесия ее кинетическую и потенциальную энергию определяют по формулам

$$T=0.5a\dot{q}^2 , \qquad \Pi = 0.5cq^2 \qquad (a>0,q>0) .$$

Обобщенная потенциальная сила

$$Q = -(\partial \Pi / \partial q) = -c\ q.$$

Подставив эти выражения в уравнение Лагранжа (2.13), получим дифференциальное уравнение свободных колебаний системы

$$a\ddot{q} + cq = 0 \quad \text{или} \quad \ddot{q} + k^2 q = 0 , \qquad (2.15)$$

где $k^2 =(c/a)^{0.5}$ $[\ 1/c\ ]$.

Из характеристического уравнения $\lambda^2 + k^2 = 0$ находим его корни

$$\lambda_{1,2} = \pm\ ki, \text{ где } i = (-1)^{0.5}.$$

Общее решение дифференциального уравнения (2.15) в тригонометрической форме имеет вид

$$q = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \qquad (2.16)$$

откуда $\dot{q} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$. (2.17)

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находят из начальных условий:

при $t = 0,$ $q = q_0,$ $\dot{q} = \dot{q}_0.$

Учитывая q_0 в (2.16) и q_0 в (2.17), получим

$$C_1 = q_0; \qquad C_2 = \dot{q}_0 / k.$$

Общее решение в (2.16) можно представить в амплитудной форме при помощи подстановки

$$C_1 = A \sin \alpha, \qquad C_2 = A \cos \alpha, \qquad (2.17)$$

где A и α — новые постоянные интегрирования.

С учетом (2.17) решение (2.16) принимает вид

$$q = A \sin (kt + \alpha), \qquad (2.18)$$

где $A = (C_1^2 + C_2^2)^{0.5} = [q_0^2 + (q^{\cdot}_0 / k)^2]^{0.5};$ $\quad \text{tg}\alpha = C_1 / C_2 = q^{\cdot}_0 k / q_0.$ (2.19)

Постоянные A и α соответственно называют амплитудой и начальной фазой колебаний. Период свободных колебаний системы

$$T = 2\pi / k\ [c],$$

где $k[1/c]$ — частота этих колебаний.

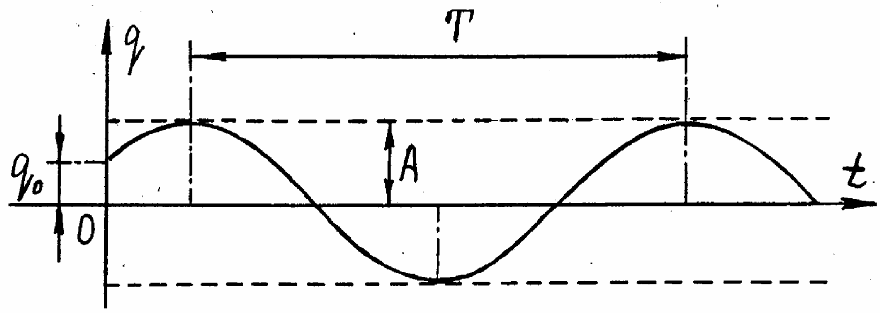


Рис. 1

На рисунке представлен график собственных гармонических колебаний системы с одной степенью свободы. Он представляет собой синусоиду.

Отметим следующие свойства свободных колебаний системы:

1. Свободные колебания системы представляют собой гармонические колебания.

2. Амплитуды колебаний точек системы, а также начальная фаза колебаний зависят от начальных условий.

3. Частота колебаний зависит от параметров системы, но не зависит от начальных условий, т.е. не зависит от начального возмущения, вызвавшего колебательный процесс.

2.6. Влияние сопротивления среды на свободные колебания системы

Выше мы считали, что рассеяния энергии при колебаниях не происходит, и ввиду этого был установлен незатухающий процесс свободных колебаний. Опыт показывает, что колебания системы, вызванные однократным возмущением, постепенно затухают. Причина затухания колебаний состоит в том, что на систему кроме упругих сил действуют силы сопротивления. На преодоление сил сопротивления непрерывно в необратимой форме расходуется работа, вследствие чего, постепенно убывает общий запас энергии и уменьшаются пиковые значения колебательного процесса.

Используя выражение (2.12) для обобщенной силы сопротивления

$$Q^c = -(\partial \Phi / \partial \dot{q}) = -\mu \dot{q},$$

и, добавляя эту силу к потенциальным силам, преобразуем уравнение Лагранжа (2.13) к виду

$$a\ddot{q} + \mu\ddot{q} + cq = 0$$

$$\text{или} \quad \ddot{q} + 2n\dot{q} + k^2 q = 0, \tag{2.20}$$

$$\text{где} \quad 2n = \mu/a \ [1/c].$$

Коэффициент n носит название коэффициента затухания.

Интегрирование уравнения (2.20) производим по общему правилу интегрирования линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm (n^2 - k^2)^{0.5} .$$

В зависимости от соотношения величин n и k могут быть три различных случая:

1. При $n < k$, то есть в случае малого сопротивления среды движение системы представляет собой затухающие колебания;
2. При $n > k$, то есть в случае большого сопротивления среды система совершает апериодическое движение;
3. При $n = k$ имеет место предельный случай апериодического движения системы.

Затухающие колебания ($n < k$)

Решение дифференциального уравнения (2.20) имеет вид

$$q = e^{-nt} (C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t), \qquad (2.21)$$

где $k_1 = (k^2 - n^2)^{0.5}$.

Выражая постоянные интегрирования через новые постоянные A и α, получим

$$q = Ae^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha). \qquad (2.22)$$

Нетрудно установить, что

$$C_1 = q_0; \quad C_2 = (\dot{q}_0 + n\, q_0) / k_1 , \qquad (2.23)$$

где $A = (C_1^2 + C_2^2)^{0.5} = [q_0^2 + \{(\dot{q}_0 + n\, q_0)/ k_1\}^2]^{0.5}$,

$$tg\alpha = C_1 / C_2 = q_0 k_1 / (\dot{q}_0 + n\, q_0) . \qquad (2.24)$$

Движение, соответствующее уравнению (2.22), имеет колебательный характер. График затухающих колебаний системы представлен на рис. 2.

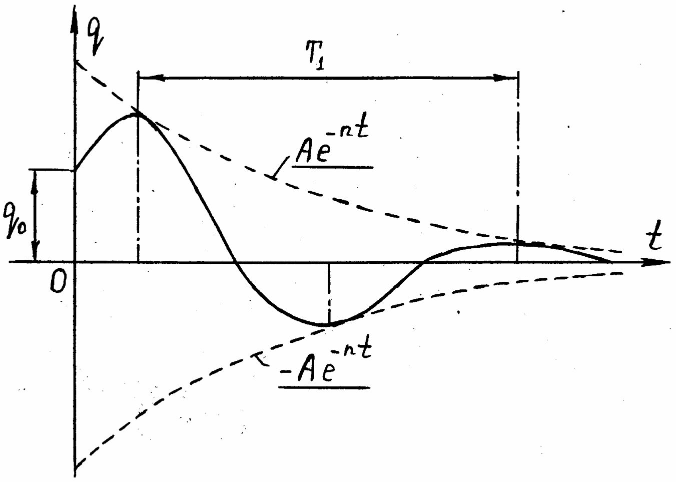


Рис. 2

Множитель e^{-nt} с течением времени уменьшается, а поэтому уменьшаются последовательные отклонения системы от ее положения равновесия.

Условный период затухающих колебаний

$$T_{зат} = 2\pi/k_1 = 2\pi\ /\ (k^2-n^2)^{0.5} = T\ /\ [1-(n/k)^2]^{0.5}\ . \qquad (2.25)$$

Отношение двух последовательных амплитудных (наибольших) отклонений системы от положения равновесия в одну сторону остается постоянным (декремент колебаний)

$$Д = q^{\max}_{i} /\ q^{\max}_{i+1} = Ae^{-nt}\ /\ Ae^{-n(t\ +T\ )} = e^{nT}\ .$$

Натуральный логарифм этого отношения называют логарифмическим декрементом колебаний

$$\eta = lnД = nT_1\ .$$

Апериодическое движение (n > k)

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$q = e^{-nt}\ (C_1 e^{k2t} + C_2 e^{-k2t}), \qquad (2.26)$$

где $k_2 = (n^2 - k^2)^{0.5}$.

В данном случае получаем

$$C_1 = [q_0\ (k_2+n) + \dot{q}_0]\ /2\ k_2\ ;\ C_2 = [q_0\ (k_2-n) - \dot{q}_0]\ /2\ k_2\ . \qquad (2.27)$$

График апериодического движения системы показан на рис. 3.

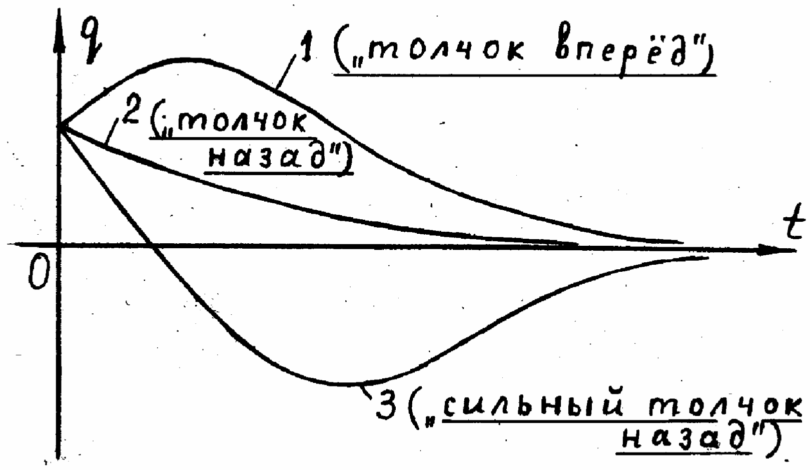


Рис. 3

Во всех случаях кривые 1, 2 и 3 движения системы являются затухающими и не колебательными.

Предельное апериодическое движение (n = k)

Решение дифференциального уравнения (2.20) имеет вид

$$q = e^{-nt}\ (C_1\ t + C_2). \qquad (2.28)$$

Нетрудно получить, что

$$C_1 = \dot{q}_0 + nq_0\ ; \qquad C_2 = q_0\ . \qquad (2.29)$$

Общий характер апериодического движения системы определяется тем, что при беспредельном возрастании времени t обобщенная координата q стремиться к нулю (рис. 3).

Рассмотрев влияние сопротивления, пропорционального скорости, на свободные колебания системы с одной степенью свободы, можно сделать следующие выводы:

1. Силы сопротивления вызывают непрерывное уменьшение энергии колеблющейся системы и как следствие — непрерывное уменьшение амплитуд свободных колебаний.

2. Малое сопротивление среды незначительно влияет на частоту и период свободных колебаний, однако, существенно влияет на убывание амплитуд, вызывая быстрое затухание колебаний.

3. При большом сопротивлении среды происходит апериодическое движение, то есть колебательный процесс отсутствует.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Задача 1

На неподвижный круглый цилиндр радиуса R, ось которого горизонтальна, положен однородный цилиндр массы m и радиуса r, ось которого также горизонтальна и перпендикулярна оси первого цилиндра. Определить условия устойчивого положения равновесия цилиндра.

Решение (рис. 4)

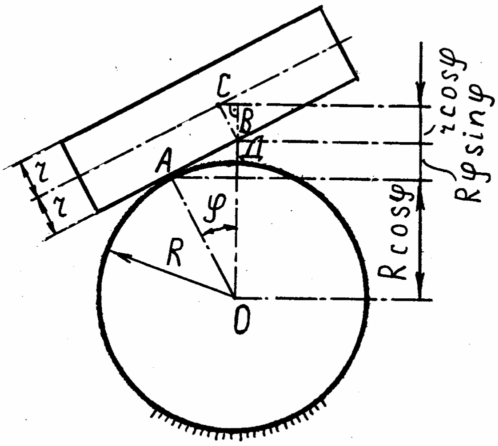


Рис. 4

Вертикальное перемещение точки приложения силы тяжести цилиндра

$$y_c=(R+r)-(R\cos\varphi+R\varphi\sin\varphi+r\cos\varphi),$$

где φ — обобщенная координата (малый угол).

Заметим, что $AB=AД=R\sin\varphi\approx R\varphi$.

Потенциальная энергия цилиндра

$$П = -mgy_c = -mg[(R + r)- -(R\cos\varphi + R\varphi\sin\varphi + r\cos\varphi)].$$

Положение равновесия определяем из уравнения

$$Q^n = -\partial П/\partial\varphi = mg(-R\sin\varphi + R\sin\varphi + R\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi) = = mg(R\varphi\cos\varphi - r\sin\varphi)=0.$$

Отсюда следует, что при $\varphi = 0$ система находится в равновесии.

В соответствии с теоремой Лагранжа – Дирихле имеем

$$(\partial^2 П/\partial\varphi^2)/_{\varphi=0} = mg(-r\cos\varphi + R\cos\varphi - R\varphi\sin\varphi)/_{\varphi=0} = mg(R - r).$$

При условии $R > r$ это значение положительно, то есть потенциальная энергия имеет минимум в положении равновесия $\varphi = 0$. Последнее неравенство есть достаточное условие устойчивости равновесия цилиндра.

Задача 2 (рис. 5)

Установить характер устойчивости равновесия грузов P и Q, из которых груз Q прикреплен к нити в точке $Д$, а груз P висит в точке C на кольце, надетом на нить.

Решение (рис. 5)

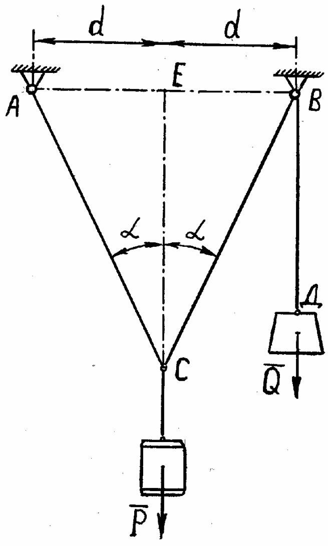


Рис. 5

В качестве обобщенной координаты возьмем угол α то есть $q = \alpha$.

Потенциальная энергия обоих грузов

$$П = -P(CE) + Q(AC + CB - AB) = - P(d \operatorname{ctg}\alpha) + 2Q(d/\sin\alpha - d).$$

Положение равновесия находим из уравнения

$$Q^n = -\partial П/\partial\varphi = -[Pd/\sin^2\alpha + 2Qd(-\cos\alpha/\sin^2\alpha)] = 0,$$

откуда $P = 2Q\cos\alpha = 2Q\cos\alpha^*$.

Для этого положения равновесия имеем ($\alpha = \alpha^*$)

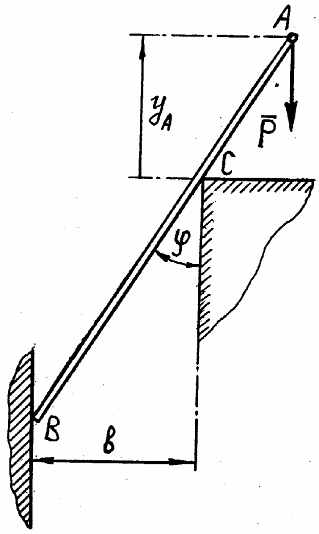
$$(\partial^2 П/\partial\varphi^2)\,|\,\alpha = \alpha^* = Pd\ (2\cos\alpha/\sin^3\alpha) - 2Qd[(-\sin\alpha\ \sin^2\alpha - -\cos\alpha\ 2\sin\alpha\ \cos\alpha)/\sin^3\alpha] = 2Qd/\sin\alpha > 0.$$

Приходим к выводу, что равновесие устойчивое.

Задача 3 (рис. 6)

Прямолинейный однородный стержень AB длиной l концом B упирается в гладкую стену, а точкой C — на угол другой стены. К концу A стержня прикреплен точечный груз массой m. Выяснить, будет ли положение равновесия стержня устойчивым.

Решение (рис. 6)



Ррис. 6

В качестве обобщенной координаты выбираем угол φ.

Потенциальная энергия груза

$$П = Py_c = P(l\cos\varphi - b\operatorname{ctg}\varphi);\quad P = mg.$$

В положении равновесия обобщенная сила системы равна нулю

$$Q^n = -\partial П/\partial\varphi = -P\ [-l\sin\varphi + b/\sin^2\varphi] = 0,$$

откуда $\sin\varphi = (b/l)^{1/3} = \sin\varphi^*$.

На основании теоремы Лагранжа-Дирихле выполним вычисления

$$(\partial^2 П/\partial\varphi^2)\big|_{\varphi = \varphi_*} = -P(-l\ \cos\varphi - 2b\ \cos\varphi/\ \sin^3\varphi)\big|_{\varphi = \varphi^*} =$$
$$= -3Pl\ \cos\varphi^* < 0\ .$$

Приходим к выводу, что положение равновесия стержня неустойчивое.

Задача 4 (рис. 7)

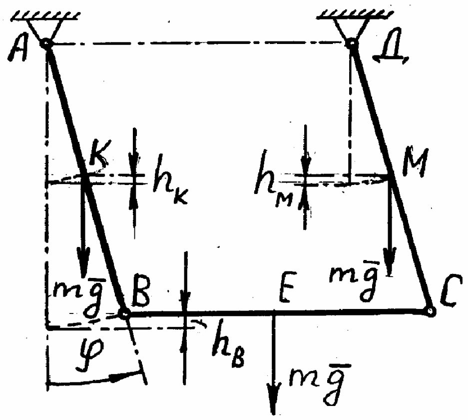


Рис. 7

Определить частоту свободных колебаний шарнирно-стержневой конструкции. Массы всех однородных стержней и их длины одинаковы.

Решение (рис. 7)

Примем за обобщенную координату системы угол, φ составленный стержнем *AB* с вертикалью.

Кинетическая энергия стержней *AB, BC* и *СД*

$$T = 0.5I_A\ \dot\varphi^2 + 0.5m\ V^2_E + 0.5\ I_Д\ \dot\varphi^2 = 0.5(5ml^2/3)\dot\varphi^2,$$

где $I_A = I_Д = ml^2/3$; $V_E = V_B = V_C = l\dot\varphi$,

$$l = AB = BC = ДC.$$

Потенциальная энергия системы равна потенциальной энергии трех стержней

$$П = mg\ h_k + mg\ h_E + mg\ h_M\ ,$$

где h_k , h_E , h_M — вертикальные перемещения точек приложения сил тяжести стержней при возвращении системы из отклоненного положения в положение статического равновесия, причем

$$h_k = h_M = 0.5l(1 - \cos\varphi) = 0.5l(2\ \sin^2 0.5\varphi) = 0.25l\ \varphi^2;$$
$$h_E = h_B = h_c = l(1 - \cos\varphi) = 0.5l(\sin^2 0.5\varphi) = 0.5l\ \varphi^2;$$

$\sin\varphi \approx \varphi$; φ — малый угол.

Окончательно получаем

$$П = mg\ (h_k + h_E + h_M) = 0{,}5(2mgl)\varphi^2 = 0.5cq^2\ .$$

Коэффициенты инерции и жесткости определяют из выражений для кинетической и потенциальной энергии системы

$$a = (5ml^2/3)\ ; \qquad c = 2mgl\ .$$

Частота и период свободных колебаний

$$k = (c/a)^{0.5} = (6g/5l)^{0.5}\ [1/c];\ T = 2\pi/k = 2\pi\ (5l/6g)^{0.5}\ [c].$$

Задача 5 (рис. 8)

Виброграф для записи горизонтальных колебаний фундаментов машин представляет собой стержень длины l с неподвижной горизонтальной осью O. К стержню прикреплен груз массой m и спиральная пружина с угловой жесткостью c_φ. При закручивании пружины на угол φ возникает восстанавливающий момент $M_в = c_\varphi\varphi$.

В вертикальном положении стержня пружина находится в ненапряженном состоянии. Определить период свободных колебаний вибрографа. Массой стержня пренебречь.

Решение (рис. 8)

Рассмотрим отклоненное положение вибрографа. Примем угол φ за обобщенную координату, то есть $q = \varphi$.

Кинетическая энергия системы

$$T = 0.5mV_A^2 = 0.5(ml^2/3)\dot\varphi^2 = 0.5(a)\ \dot\varphi^2,$$

где $V_A = l\ \dot\varphi$.

Вертикальное перемещение точки A приложения силы тяжести mg

$$h_A = l\ (1 - \cos\varphi) = 2\ \sin^2 0.5\varphi = 0.5\ l\varphi^2;$$

$sin\varphi \approx \varphi;$ φ — малый угол.

Потенциальная энергия системы

$$П = mg\ h_A + 0.5\ c_\varphi\varphi^2 = 0{,}5mgl\ \varphi^2 + 0.5\ c_\varphi\varphi^2 = 0.5(mgl + c_\varphi)\varphi^2 = 0.5c\varphi^2\ .$$

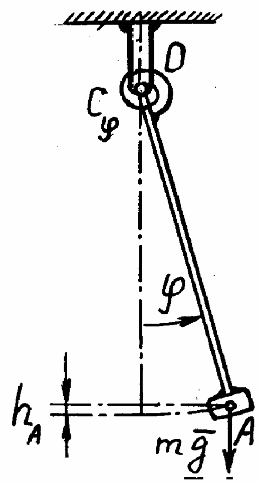


Рис. 8

Находим коэффициенты инерции и жесткости

$$a = ml^2; \quad c = mgl + c_\varphi.$$

Частота и период свободных колебаний

$$k = (c/a)^{0.5} = [(mgl + c_\varphi) / ml^2]^{0.5} \; [1/c] \; ;$$

$$T = 2\pi/k = 2\pi \; [ml^2 / (mgl + c_\varphi)]^{0.5} \; [c] \; .$$

Задача 6 (рис. 9)

Определить частоту и период свободных колебаний цилиндра радиуса *r,* который может катиться без скольжения по цилиндрической поверхности радиуса *R*.

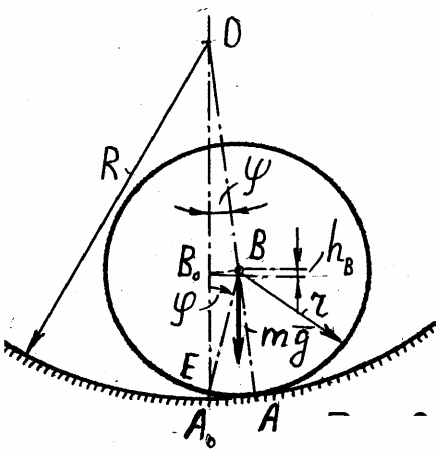


Рис. 9

Решение (рис. 9)

За обобщенную координату системы примем угол поворота цилиндра $q = \varphi$.

Кинетическая энергия цилиндра (точка A — его мгновенный центр скоростей)

$$T = 0.5mV_B^2 + 0.5I_B \; \dot\varphi^2 = $$
$$= 0.5(3mr^2/2)\dot\varphi^2 = 0.5a \; \dot\varphi^2 \; ,$$

где $V_B = r \; \dot\varphi \; ; \quad I_B = mr^2 /2$.

Вертикальное перемещение точки приложения силы тяжести цилиндра

$$h_B = (R - r) \; (1 - \cos\psi) = (R - r) \; 2 \sin^2 0.5\psi = 0.5 \; (R - r)\psi^2;$$

$\sin\psi$ » ψ; ψ — малый угол.

Установим зависимость между углами φ и ψ

$$S_B = \overset{\frown}{B_0B} = r\varphi = (R - r)\psi; \quad \psi = r\varphi /(R - r).$$

Потенциальная энергия цилиндра

$$П = mg \; h_B = 0{,}5mg \; (R - r)\psi^2 = 0.5mgr^2 \; (R - r \;)\varphi^2 = 0.5c\varphi^2.$$

С помощью выражений для T и $П$ определяем коэффициенты инерции и жесткости

$$a = 3mr^2 /2 \ ; \qquad c = mgr^2 /(R - r) \ .$$

Частота и период свободных колебаний

$$k = (c/a)^{0.5} = [(2g) /3(R - r)]^{0.5} \ [1/c] \ ;$$
$$T = 2\pi/k = 2\pi \ [3(R - r) / 2g]^{0.5} \ [c] \ .$$

Задача 7 (рис. 10)

Цилиндр радиуса r и массы m может катиться без скольжения по горизонтальной плоскости. Две одинаковые пружины жесткости c_1 прикреплены посредине его длины на расстоянии b от оси цилиндра; противоположные концы пружин закреплены. Определить период свободных колебаний цилиндра.

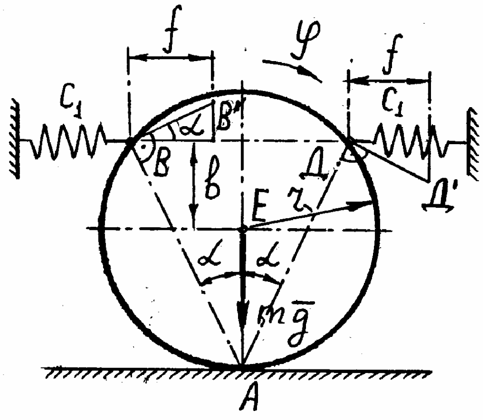


Рис. 10

Решение (рис. 10)

За обобщенную координату примем угол поворота цилиндра, то есть $q = \varphi$. Кинетическая энергия цилиндра (точка A — его мгновенный центр скоростей)

$T = 0.5a\ \dot{\varphi}^2$ (см. задачу 6);
$a = 3mr^2 /2$.

Потенциальную энергию системы определяет потенциальная энергия двух пружин

$$П = 2(0.5\ c_1 f^2)= 0.5c\varphi^2 \ .$$

Деформацию пружин находим по формуле

$$f = f_B = f_Д = (l \sin\varphi) \cos\alpha = (r+ b)\varphi;$$

$\sin\varphi \approx \varphi$; φ — малый угол; $l \cos\alpha = (r + b)$;

$$l = AB = AД;$$

$c = 2c_1 (r + b)^2$ (коэффициент жесткости системы).

Частота и период свободных колебаний

$$k = (c/a)^{0.5} = [4\ c_1 (r+b)^2 /3m\ r^2]^{0.5} = [2\ (r+b)/r]\ [c_1/3m]^{0.5}\ [1/c];$$

$$T = 2\pi/k = \pi[r/(r + b)]\,[3m/c_1]^{0.5}\ [c]\ .$$

Задача 8 (рис. 11)

Через блок радиуса R, имеющий горизонтальную ось вращения E, перекинута нерастяжимая нить. Конец A нити прикреплен к пружине, коэффициент жесткости которой c_1, а к другому ее концу b прикреплен груз массы m. Блок массы m_1 считать однородным диском. Определить уравнение движения груза, если в положении равновесия ему была сообщена начальная скорость v_0. Массами пружины и нити, а также трением пренебречь.

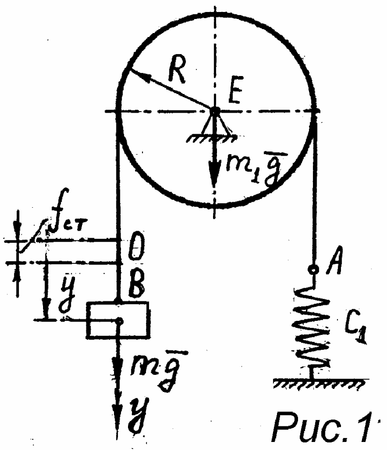


Рис. 11

Решение (рис. 11)

Примем за обобщенную координату системы вертикальное перемещение груза из положения его статического равновесия $q = y$.

Кинетическая энергия системы

$$T = 0.5mV_{гр}^2 + 0.5I_E\,\dot{\varphi}^2 =$$
$$0.5\,(m + 0.5m_1)\dot{y}^2 = 0.5a\,\dot{y}^2\ ,$$

где $V_{гр} = V_B = \dot{y};\quad I_E = mR^2/2;$

$\omega = V_B/R = \dot{y}/R = \dot{\varphi}.$

Потенциальная энергия складывается из потенциальной энергии тел и потенциальной энергии деформированной пружины

$$П = -mgy + \{0.5\,c_1\,(f_{CT} + y)^2 - 0.5\,c_1\,f_{CT}^2\}\ ,$$

где f_{CT} — статическая деформация пружины.

В положении статического равновесия системы имеем

$$(\partial П/\partial\varphi)_{y=0} = [-mg + c_1\,(f_{CT} + y)]_{y=0} = -mg + c_1\,f_{CT} = 0;$$

$$f_{СТ} = mg/\,c_1\ .$$

Окончательно имеем

$$П=-mgy+\{0.5c_1(mg/c_1+y)^2-0.5c_1(mg/c_1)^2\}=0.5c_1\ y^2=0.5cy^2.$$

На основании выражений для T и $П$ определяем коэффициенты инерции и жесткости системы

$$a = (m + 0.5m_1); \ c = c_1 .$$

Частота и период свободных колебаний

$$k = (c/a)^{0.5} = [(2c_1)/(2m + m_1)]^{0.5} \ [1/c] ;$$

$$T = 2\pi/k = 2\pi[(2m + m_1)/2c_1]^{0.5} \ [c] .$$

Уравнение свободных колебаний имеет вид

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

При $t = 0$, $y = y_0 = 0$, $y = y_0 = V_0$.

Постоянные интегрирования

$$C_1 = y_0 = 0, \ C_2 = \dot{y}_0 / k = V_0 /k.$$

Уравнение движения груза

$$y = V_0 /k(\sin kt).$$

Задача 9 (рис. 12)

Маятник состоит из жесткого стержня длины l, несущего массу m на своем конце. К стержню прикреплены две пружины жесткости c_1 каждая на расстоянии b от его нижнего конца; противоположные концы пружин закреплены. Пренебрегая массой стержня, найти частоту свободных колебаний маятника. Определить расстояние b, при котором вертикальное положение маятника устойчиво.

Решение (рис. 12)

Примем за обобщенную координату системы угол φ отклонения стержня от вертикали, то есть $q = \varphi$.

Кинетическая энергия системы

$$T = 0.5mV_A^2 = 0.5(ml^2)\dot{\varphi}^2 = 0.5a\dot{\varphi}^2 ,$$

где $V_A = l\dot{\varphi}$; $a = ml^2$.

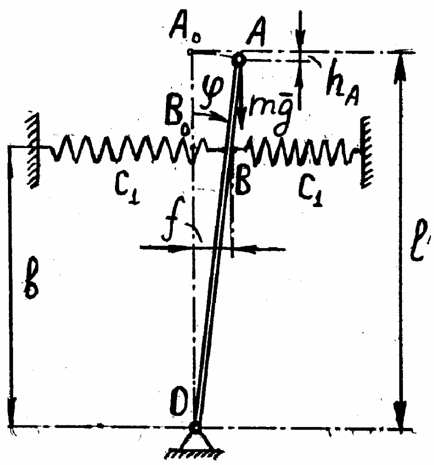


Рис. 12

Потенциальную энергию системы складывают из потенциальной энергии груза и двух пружин

$$П = -mg\ h_A + 2(0.5\ c_1 f^{\,2})\ .$$

Вертикальное перемещение точки приложения силы тяжести груза и деформацию пружин определяют по формулам

$$h_A = l(1 - \cos\varphi) = l2\sin^2 (\varphi/2) \approx l(\varphi^2 /2).$$

$$\sin\varphi \approx \varphi; \quad \varphi \text{ — малый угол;} \quad f = b\varphi.$$

Для потенциальной энергии системы получаем

$$П = -mg\ l(\varphi^2 /2) + c_1\ b^2\ \varphi^2 = 0.5c\varphi^2\ ,$$

$$\text{где } c = -mg\ l + 2c_1\ b^{\,2}\ .$$

Положение равновесия системы определяем из выражения

$$Q^п = -\partial П/\partial\varphi = -[2c_1\ b^{\,2} - mg\ l]\varphi = 0.$$

Итак, при $\varphi = \varphi^* = 0$ маятник находится в равновесии. Это положение будет устойчивым при выполнении условия

$$(\partial^2 П/\partial\varphi^2) > 0 \quad \text{или} \quad 2c_1\ b^{\,2} — mg\ l > 0$$

$$\text{откуда } b > (mgl/2c_1)^{0.5}\ .$$

Частота свободных колебаний

$$k = (c/a)^{0.5} = [(2c_1\ b^2 - mg\ l)\ /(ml^2)]^{0.5}\ [1/c]\ .$$

Задача 10 (рис. 13)

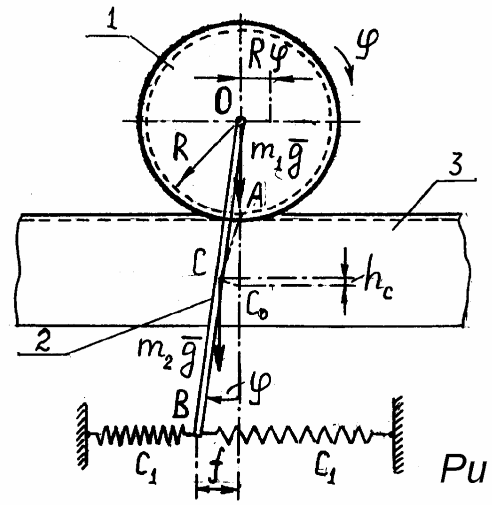


Рис. 13

Зубчатое колесо *1* радиуса R и массой m_1 жестко скреплено с водилом *2* длиной l и массой m_2. Колесо установлено на зубчатой рейке *3*. К свободному концу водила прикреплены без натяга две пружины жесткостью c_1 каждая. Определить частоту свободных колебаний системы.

Решение (рис. 4)

В качестве обобщенной координаты системы примем угол поворота колеса φ, считая его малым.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии колеса и водила, которые совершают плоско-параллельное движение.

Кинетическая энергия колеса

$$T_1 = 0.5m_1\, V_0^2 + 0.5I_0\, \dot{\varphi}^2 = (3/4)(m_1\, R^2)\, \dot{\varphi}^2 ,$$

где $V_0 = l\, \dot{\varphi}$; $I_0 = m_1\, R^2 /2$.

Кинетическая энергия водила

$$T_2 = 0.5I_A\, \dot{\varphi}^2 = 0.5[I_C + m_2\, (AC)^2]\, \dot{\varphi}^2 ,$$

где $I_C = m_2\, l^{\,2} /12$,

$$(AC)^2 = (AC_0)^2 + (CC_0)^2 = (0.5l - R)^2 + (0.5l\varphi)^2 \approx 0.5l - R.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = T_1 + T_2 = (3/4)(m_1\, R^2)\, \dot{\varphi}^2 + 0.5[(m_2\, l^2 /12) + m_2\, (0.5l - R)^2]\, \dot{\varphi}^2 = 0.5I_{ПР}\, \dot{\varphi}^2 ,$$

где $I_{ПР} = (3/2)(m_1\, R^2) + m_2\, [(l^2 /12) + (0.5l - R)^2].$

Потенциальная энергия системы складывается из потенциальной энергии водила и двух пружин

$$П = m_2\, gh_C + 2(0.5\, c_1\, f^{\,2}).$$

Найдем вертикальное перемещение точки C приложения силы тяжести водила и деформацию пружин. С помощью рис. 13 получаем

$$f = (l–R)\varphi; \quad \varphi \text{ — малый угол;}$$

$$h_C = 0.5l(1 - \cos\varphi) = 0.5l2\sin^2(\varphi/2) \approx l(\varphi/2)^2 .$$

Окончательно получаем

$$П = 0.5[0.5m_2\, g + 2\, c_1\, (l - R)]\varphi^2 = 0.5c_{ПР}\, \varphi^2 ,$$

где $c_{ПР} = 0.5m_2\, g + 2\, c_1\, (l - R).$

Коэффициенты инерции и жесткости системы

$$a = I_{\text{ПР}} , \quad c = c_{\text{ПР}} .$$

Частота свободных колебаний

$$k = (c/a)^{0.5} = \{[0.5m_2\, g + 2\, c_1\, (l - R)] \;/\; [(3/2)(m_1\, R^2) + $$
$$+ m_2\, (l^2/12) + m_2\, (0.5l - R)^2]\}^{0.5}\; [1/c]\; ;$$

Задача 11 (рис. 14)

Определить частоту собственных колебаний системы, расчетная схема которой представлена на рис. 14. Исходные данные: m_1 — масса рейки; m_2 — масса цилиндра; r — его радиус; c_1, c_2 — коэффициенты жесткости пружин; b — расстояние от оси цилиндра до точки закрепления вертикальной пружины. Проскальзывание рейки по цилиндру отсутствует.

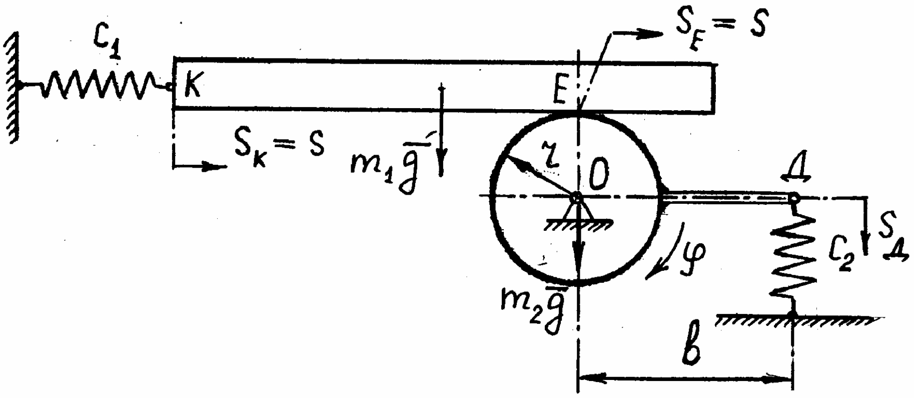


Рис. 14

Решение (рис. 14)

Примем за обобщенную координату системы горизонтальное перемещение рейки, то есть $q = s$.

Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии рейки и цилиндра

$$T = 0.5m_1\,\dot{s}^2 + 0.5I_0\,\dot{\varphi}^2 = (1/2)(m_1 + 0.5\,m_2)\,\dot{s}^2 = 0.5a\,\dot{s}^2,$$

где $\dot{s} = v$ — скорость рейки; $a = (1/2)(m_1 + 0.5\,m_2)$;

$$I_0 = m_2R^2/2.$$

Потенциальная энергия системы определяется потенциальной энергией обоих пружин

$$П = (0.5\,c_1\,s^2) + (0.5\,c_2\,f^{\,2}) = 0.5\,[c_1 + c_2\,(b/r)^2]s^2 = 0.5cs^2,$$

где $f = b\varphi = b(s/r)$ (деформация вертикальной пружины);
$\varphi = s_E /r = s/r$ (угол поворота цилиндра);
$s = s_K$ (деформация горизонтальной пружины);

$$c = [c_1 + c_2\ (b/r)^2].$$

Находим собственную частоту системы

$$k = (c/a)^{0.5} = \{[c_1 + c_2\ (b/r)^2]\ /\ (m_1 + 0.5\ m_2)\}^{0.5}\ [1/c]\ .$$

Задача 12 (рис. 15)

На рис. 15 представлена схема манипулятора для погрузки бревен в вагон. Стрела *OA* может вращаться вокруг оси шарнира *O* в вертикальной плоскости. Захватное устройство стрелы, массой которого следует пренебречь, удерживает бревно, принимаемое за однородный цилиндр радиуса r и массы M. Гидросистема привода стрелы представлена в виде пружины *ВД* жесткости c_1, прикрепленной на расстоянии *ОД* $= b$ от оси шарнира *O*. Стрелу манипулятора считать однородным стержнем длиной *OA* $= l$ и массой m. Составить дифференциальное уравнение свободных колебаний стрелы манипулятора с бревном около положения статического равновесия, соответствующего отклонению стрелы *OA* от вертикали на угол φ. Пружина *ВД* в этом положении расположена горизонтально.

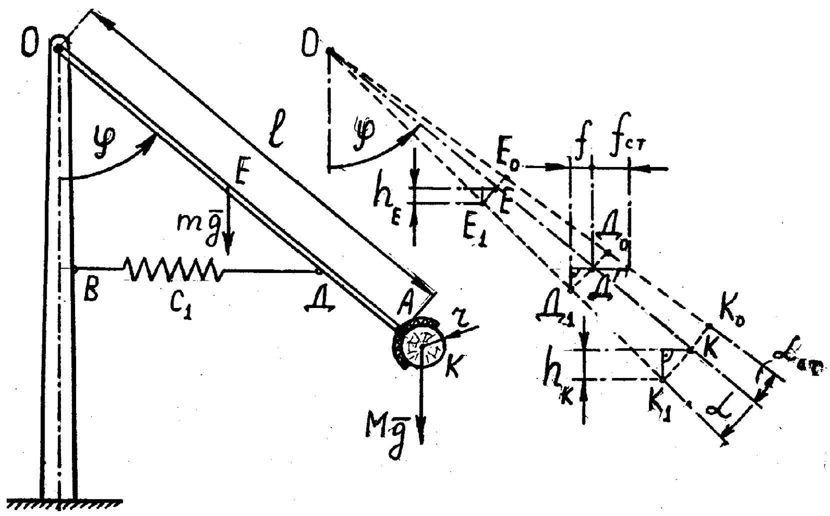


Рис. 15

Решение (рис. 15)

За обобщенную координату системы примем угол отклонения стрелы OA от положения статического равновесия, то есть $q = \alpha$.

Кинетическая энергия системы

$$T_1 = 0.5I_{0(стр)}\ \dot{\alpha}^2 + 0.5I_{0(бр)}\ \dot{\alpha}^2 = 0.5\ I_{пр}\ \dot{\alpha}^2 = 0.5\ a\dot{\alpha}^2\ ,$$

где $I_{пр} = I_{0(стр)} + I_{0(бр)} = a$ (коэффициент инерции системы);
$I_{0(стр)}$, $I_{0(бр)}$ — моменты инерции стрелы и бревна относительно оси шарнира O.

Заметим, что

$$I_{0(стр)} = ml^2/3; \quad I_{0(бр)} = I_{K(бр)} + M(l + r)^2 = (Mr^2)/2 + M(l + r)^2;$$

$$I_{K(бр)} = (Mr^2)/2; \quad I_{0(стр)} + I_{0(бр)} = ml^2/3 + (Mr^2)/2 + M(l+r)^2.$$

Потенциальная энергия стрелы складывается из потенциальной энергии стрелы, груза и пружины

$$П = -m\ gh_E - Mgh_K + 0,5\ c_1\ (f_{CT} + f)^2 - (0.5\ c_1\ f_{CT}^{\ 2}),$$

где h_E и h_K — вертикальные перемещения точек приложения сил тяжести стрелы и бревна при перемещении стрелы из отклоненного положения в положение статистического равновесия;
f_{CT} — статическая деформация пружины;
f — деформация пружины за счет отклонения стрелы от положения статического равновесия.

С помощью рис. 15 получаем ($ОД = b$)

$$h_E = EE_1 \sin\varphi = 0.5l\alpha \sin\varphi\ ;$$

$$h_K = KK_1 \sin\varphi = (l + r)\alpha \sin\varphi\ ;$$

$$f = ДД_1\ \cos\varphi = b\ \alpha\ \cos\varphi\ ,$$

где $EE_1 \approx \breve{EE}_1 = 0.5l\alpha;$
$AA_1 \approx \breve{AA}_1 = (l + r)\alpha;$
$ДД_1 \approx \breve{ДД}_1 = b\alpha;$
α — малый угол.

Далее находим

$$П = -mg0.5l\alpha\sin\varphi - Mg(l + r)\alpha\sin\varphi + 0.5\, c_1\, (f_{CT} + b\alpha\cos\varphi)^2 - -(0.5\, c_1\, f_{CT}^2).$$

В положении статического равновесия системы выполняется условие

$$(\partial П/\partial\alpha)_{\alpha=0} = 0.$$

На этом основании имеем

$$(\partial П/\partial\alpha)_{\alpha=0} = -g[0.5ml + M(l + r)]\sin\varphi + c_1\, f_{CT}\, b\, \cos\varphi = 0.$$

Для потенциальной энергии системы получаем окончательное выражение

$$П = 0.5(c_1\, b^2\, \cos^2\varphi)\alpha^2 = 0.5c\, \alpha^2\, ,$$

где $c = c_1\, b^2\, \cos^2\varphi$ коэффициент жесткости системы).

Подставляя полученные выражения для T и $П$ в уравнение Лагранжа, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний системы

$$a\ddot{\alpha} + c\alpha = 0 \quad или\ \ddot{\alpha} + k^2\alpha = 0,$$

Частота свободных колебаний системы

$$k = (c/a)^{0.5} = \{[c_1b^2cos^2\varphi]/[ml^2/3+(Mr^2)/2+M(l+r)^2]\}^{0.5}[1/c].$$

Задача 13 (рис. 16)

Лебедка крана, поднимавшего тросом пакет бревен массы m со скоростью V_0, была экстренно заторможена. Жесткость троса в момент остановки лебедки равна c. Составить уравнение движения пакета бревен вдоль вертикали после торможения.

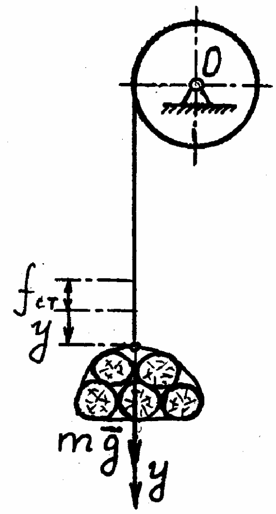


Рис. 16

Решение (рис. 16)

За обобщенную координату системы примем вертикальное перемещение центра масс пакета бревен, то есть $q = y$.

Кинетическую энергию пакета бревен определяют выражением

$$T = 0.5mV^2 = 0.5m\dot{y}^2 ,$$

где $V = \dot{y}$ — скорость этого пакета.

Потенциальная энергия системы состоит из потенциальной энергии пакета бревен и троса, рассматриваемого в качестве пружины

$$П = -mgy + 0.5\, c(y + f_{СТ})^2 - 0.5cf_{СТ}^2 .$$

Условие, выполняемое в положении статического равновесия системы, имеет вид

$$(\partial П/\partial y)_{y=0} = [-mg + c(y + f_{СТ})\,]_{y=0} = -mg + c\, f_{СТ} = 0.$$

Окончательно получаем

$$П = 0.5\, cy^2 .$$

После подстановки вычисленных значений T и $П$ в уравнение Лагранжа получим дифференциальное уравнение движения пучка бревен

$$\ddot{y} + k^2y = 0,$$

где $k = (c/m)^{0.5}$ $[1/c]$.

Решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt ,$$

Составим начальные условия движения пучка бревен.

При $t = 0$, $y = y_0 = 0,\ (\dot{y}) = (\dot{y}_0)= V_0$.

Находим постоянные интегрирования

$$C_1 = y_0 ;\quad C_2 = \dot{y}_0 / k = V_0 /k.$$

Движение пучка бревен подчиняется уравнению

$$y = (V_0 /k) \sin kt .$$

Задача 14 (рис. 17)

Цилиндр весом P, радиусом r и высотой h подвешен на пружине AB, верхний конец которой неподвижно закреплен. Жесткость пружины равна c. Цилиндр погружен в жидкость и в положении статического равновесия погружается на половину своей длины. Цилиндр был выведен из положения статического равновесия и в начальный момент времени был погружен на *2/3* своей высоты и затем опущен без начальной скорости. Определить закон движения цилиндра по вертикали, если не учитывать движения жидкости, а также сил трения цилиндра о жидкость.

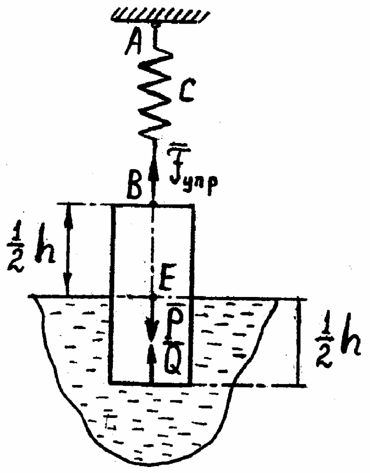


Рис. 17

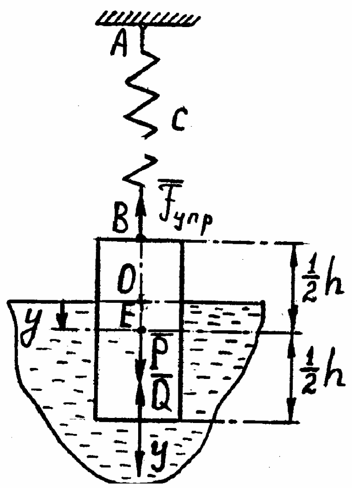


Рис. 18

Решение (рис. 17 и 18)

В положении статического равновесия сила тяжести цилиндра $m\bar{g}$ уравновешивается упругой силой пружины $\bar{F}_{CT}$ ($F_{CT} = cf_{CT}$, f_{CT} — статическая деформация пружины) и выталкивающей архимедовой силой $Q = \pi r^2\ (h/2)\gamma$ (γ — удельный вес жидкости)

$$mg = cf_{CT} + \pi r^2\ (h/2)\gamma\ .$$

Рассмотрим положение цилиндра в какой-нибудь момент времени t , когда его центр масс E смещен по вертикали от статического положения, принимаемого за начало отсчета, на величину y.

Дифференциальное уравнение цилиндра имеет вид

$$m\ddot{y} = mg - \pi r^2\ (h/2 + y)\gamma - c(f_{CT} + y).$$

Учитывая ранее полученное соотношение, получим дифференциальное уравнение свободных колебаний цилиндра

$$m\ddot{y} + (c + \pi r^2 \gamma)y = 0,$$

или $\ddot{y} + k^2 y = 0,$

где $$k = [(c + \pi r^2 \gamma)/m]^{0.5} \ [1/c].$$

Уравнение движения цилиндра

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt \ .$$

Запишем начальные условия:

$$t = 0; \quad y_0 = h/2 - h/3 = h/6 \ ; \quad \dot{y}_0 = v_0 = 0.$$

Находим постоянные интегрирования

$$C_1 = y_0 = h/6 \ ; \qquad C_2 = \dot{y}_0 /k = 0 \ ;$$

Окончательно имеем

$$y = (h \cos kt)/6.$$

Задача 15

Определить движение цилиндра в жидкости в предыдущей задаче, если учесть силу сопротивления жидкости, которое принять пропорционально первой степени скорости, то есть $R = \mu v$ (μ — коэффициент сопротивлению движения цилиндра). Определить условия, при котором движение цилиндра будет колебательным.

Решение

Дифференциальное уравнение движения цилиндра с учетом силы сопротивления имеет вид

$$m\ddot{y} + \mu\dot{y} + (c + \pi r^2 \gamma)y = 0, \quad (v = y).$$

где $2n = \mu/m \ [1/c] \ k = [(c + \pi r^2 \gamma)/m]^{0.5} \ [1/c].$

Составим характеристическое уравнение

$$\lambda^2 + 2n\mathrm{l} + k^2 = 0.$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm (n^2 - k^2)^{0.5} \ .$$

Для колебательного движения цилиндра необходимо выполнение условия

$$n<k \quad или \quad \mu/2m < [(c + \pi r^2 \gamma)/m]^{0.5} .$$

При выполнении указанного выше условия цилиндр будет совершать затухающие гармонические колебания по закону

$$y = Ae^{-nt} \sin (k_1 t + \alpha),$$
$$k_1 = (k^2 - n^2)^{0.5} .$$

Используя начальные условия (при $t=0$, $y=h/6$, $y_0 = v_0 = 0$), получим

$$A = (h/6) [k^2 / (k^2 - n^2)]^{0.5} ; tg \alpha = (k^2 - n^2)^{0.5} /n.$$

Задача 16 (рис. 19)

На жестком невесомом стержне длиной l подвешен груз массой m. На расстоянии b от оси стержня прикреплены две пружины жесткости c_1 каждая. Груз помещен в сосуд, заполненный вязкой жидкостью с коэффициентом вязкого трения k. Груз отвели от положения равновесия на угол φ_0 и отпустили без начальной скорости. Найти уравнение свободных колебаний стержня, собственную частоту, период и логарифмический декремент колебаний.

В расчете принять:

m = 10 кг; c = 0.1 Н/м; k = 50 Нс/м; l = 0.3м; b = 0.1м ; $\varphi_0 = 0.174$ $(\varphi_0 = 10^0)$.

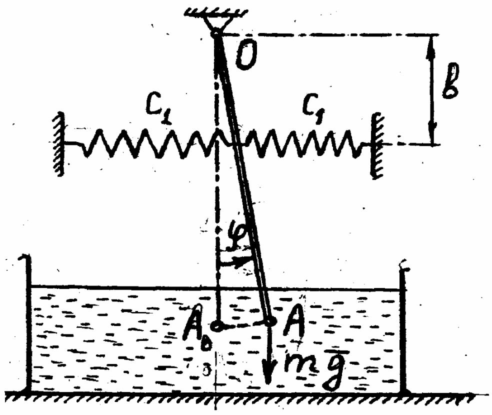


Рис. 19

Решение (рис. 19)

В качестве обобщенной координаты выберем угол φ отклонения стержня от вертикали, то есть $q = \varphi$.

Кинетическая и потенциальная энергии системы определяются по формулам (см. задачу 9)

$$T = 0.5\, a\, \dot{\varphi}^2\ ,\ \Pi = 0.5\, c\, \varphi^2\ ,$$

где $a = ml^2$ и $c = 2c_1 b^2 + mgl$ (коэффициенты инерции и жесткости системы).

Диссипативная функция системы

$$\Phi = 0.5kV_A^2 = 0.5kl^2\, \dot{\varphi}^2 = 0.5\mu\, \dot{\varphi}^2\ ,$$

где $V_A = l\dot{\varphi}$ и $\mu = kl^2$ (коэффициент сопротивления среды).

С помощью уравнения Лагранжа получаем дифференциальное уравнение свободных колебаний стержня

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

$$2n = \mu/a\ ;\ \ k = (c/a)^{0.5}\ .$$

После подстановки численных значений параметров в эти формулы получаем

$2n = k/m = 5$ [$1/c$]; $\qquad k = \{(2c_1 /m)\,(b/l)^2 + g/l\}^{0.5} = 5.72$ [$1/c$].

В данной задаче мы имеем случай малого сопротивления среды $(n < k)$.

Решение дифференциального уравнения имеет вид

$$\varphi = e^{-nt}\,(C_1 \cos k_1 t + C_2 \sin k_1 t),$$

где $\qquad k_1 = \{k^2 - n^2\}^{0.5} = 5.14$ [$1/c$].

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями.

При $\quad t = 0\ , \qquad \varphi = \varphi_0$ и $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}_0 = 0.$

Постоянные C_1 и C_2 находим по формулам

$$C_1 = \varphi_0 = 0.174;\ C_2 = (\dot{\varphi}_0 + n\varphi_0)/\ k_1 = \varphi_0\ n/\ k_1 = 0.174 \cdot 0.486.$$

Закон затухающих колебаний стержня

$$\varphi = \varphi_0\ e^{-nt}\ [\cos k_1 t + (n/\ k_1)\ \sin k_1 t]$$

или

$$\varphi = 0.174\ e^{-nt}\ [\cos k_1 t + (0.486)\ \sin k_1 t],$$

Период и логарифмический декремент затухающих колебаний

$$T_1 = 2\pi / k_1 = 1.22\ [c].$$

$$\eta = ln\ Д = n\ T_1 = 3.05.$$

Библиографический список

1. Яблонский А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А. А. Яблонский. М.: Высшая школа, 1972, 1978, 1985, 1998.
2. Бать М. Л. Теоретическая механика в примерах и задачах. Т.1/ М. Л. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. М.: Наука,1984. – 502 с.
3. Яблонский А. А. Курс теоретической механики./ А. А. Яблонский., В. М. Никифорова. Ч. 1. М: Высшая школа, 1984. – 368 с.
4. Бутенин Н. В. Курс теоретической механики./ Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин . Т. 1. М.: Наука, 1985. – 250 с.
5. Добронравов В. В. Курс теоретической механики./ В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. М.: Высшая школа, 1983. – 576 с.