

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ИССЛЕДОВАНИЕ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ
МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические рекомендации к выполнению
расчетно-графического задания

Введение

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей, изучающих курс теоретической механики. После раздела динамики материальной точки, иллюстрируются примеры составления дифференциальных уравнений движения точки при действии восстанавливающей силы пружины (комплект пружин). Простейший случай – прямолинейные колебания одного (нескольких) твердого (твердых) тела (тел), которое (которые) при поступательном движении можно считать материальной точкой.

Прямолинейные колебания материальной точки являются простейшим случаем колебаний механических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами, однако позволяют выяснить основные особенности этих движений: понятия собственной частоты колебаний, амплитуды, периода, влияния постоянной силы, сил сопротивления движению, гармонической возмущающей силы на колебательный процесс.

Практически во всех учебниках рассматриваются прямолинейные колебания материальной точки или по гладкой горизонтальной плоскости, или подвешенной на вертикальной пружине. В методических указаниях приведено 30 вариантов заданий и 60 вариантов численных значений, в которых груз (грузы) прикреплен (прикреплены) к комплектам пружин и совершают колебания вдоль гладких наклонных поверхностей. Такая задача сводится к расчетной схеме материальной точки, закрепленной на одной пружине эквивалентной жесткости, а гладкая наклонная плоскость вызывает уменьшение силы тяжести на величину $\sin \gamma$ (где γ - угол наклона плоскости к горизонту). Таким образом все варианты заданий сводятся по сути к одной расчетной схеме.

На простом примере студент осваивает методику построения расчетной схемы и составления дифференциальных уравнений, формулирования начальных условий и решения уравнений. Рассматривает свободные колебания без учета сил сопротивления движению, с учетом сил сопротивления, пропорциональных первой степени скорости, вынужденные колебания при действии гармонической вынуждающей силы без и с учетом сил сопротивления движению.

Аналитическое решение этих четырех задач известно, но студент должен получить и построить графики колебательных процессов и амплитудно-частотную характеристику для своего варианта. Для построения графиков предполагается использование инженерного пакета Mathcad.

Обычно выбор системы отсчета является прерогативой автора исследования, однако в методических целях студенту задано положительное направление оси x , в вариантах с двумя грузами приняты обозначения: присоединяемая масса m_2 изображена пунктиром, отсоединяемая – сплошной линией.

В методических указаниях приведены примеры выполнения задания с необходимыми пояснениями.

1 Методика упрощения расчетной схемы и составления дифференциальных уравнений движения

1.1 Эквивалентная жесткость комплекта пружин

В каждой задаче необходимо максимально упростить расчетную схему и комплект пружин заменить одной пружиной эквивалентной жесткости.

1.1.1 Параллельное соединение комплекта из двух пружин

Сопоставим две расчетные схемы: комплект из двух пружин жесткостью c_1 и c_2 , соединенных параллельно и схему, содержащую одну эквивалентную пружину жесткости c_3 (рис. 1.1).

Для исключения поворотов тела весом G , его присоединяют к комплекту пружин с помощью невесомой планки ближе к более жесткой пружине.

Расстояния a и b обратно пропорциональны жесткостям пружин $\frac{a}{b} = \frac{c_1}{c_2}$.

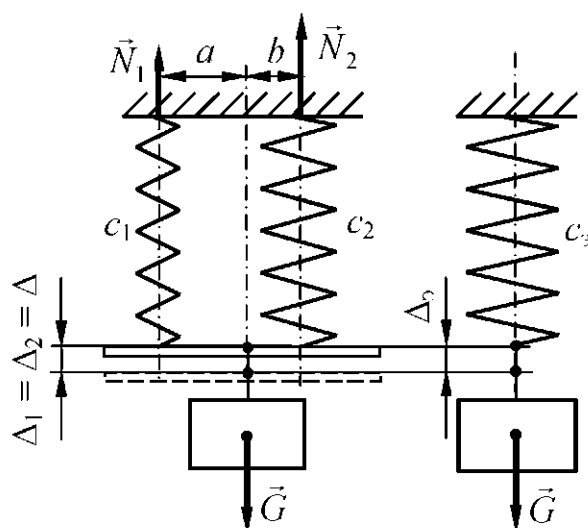


Рис. 1.1

Жесткость эквивалентной пружины найдем из условия, что перемещения груза под действием собственного веса в двух схемах будут одинаковыми.

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3; \quad \frac{N_1}{c_1} = \frac{N_2}{c_2} = \frac{P}{c_3}, \quad \text{т.к. } N_1 + N_2 = G, \quad \text{то } c_3 = c_1 + c_2. \quad (1.1)$$

1.1.2 Последовательное соединение комплекта из двух пружин

Сопоставим две расчетные схемы: комплект из двух пружин жесткостью c_1 и c_2 , соединенных последовательно и схему, содержащую одну эквивалентную пружину жесткости c_3 (рис. 1.2).

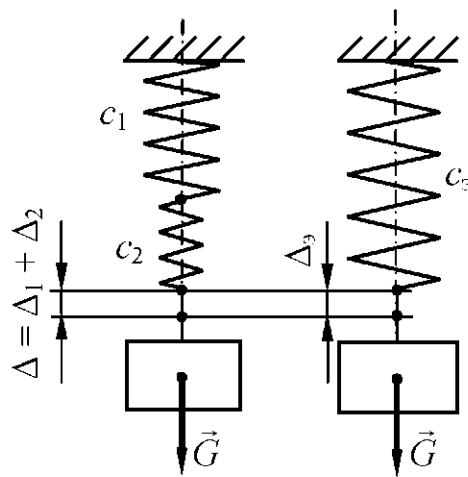


Рис. 1.2

Используя метод сечений, заключаем, что каждая из пружин растягивается весом груза G и деформируется на величину $\Delta_1 = \frac{G}{c_1}$ и $\Delta_2 = \frac{G}{c_2}$ соответственно. Тогда деформация пружины эквивалентной жесткости составит $\Delta_3 = \frac{G}{c_3}$.

Из условия, что $\Delta = \Delta_3$, $\frac{G}{c_1} + \frac{G}{c_2} = \frac{G}{c_3}$.

После сокращения на G , получаем $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} = \frac{1}{c_3}$, откуда $c_3 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2}$. (1.2)

1.1.3 Смешанный случай соединения комплекта пружин

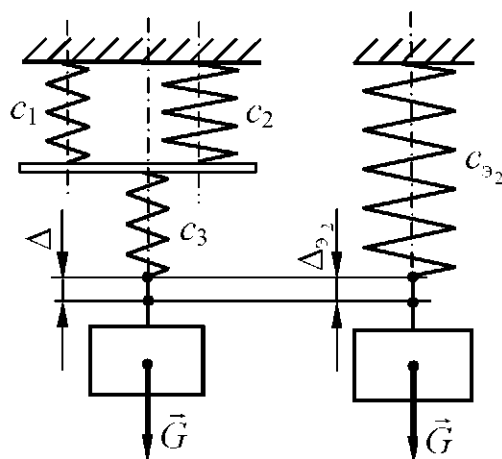


Рис. 1.3

$$c_{31} = c_1 + c_2; \quad c_{32} = \frac{(c_1 + c_2) c_3}{c_1 + c_2 + c_3}.$$

Далее приводится методика составления дифференциальных уравнений движения для конкретных случаев.

1.2 Груз на гладкой горизонтальной плоскости

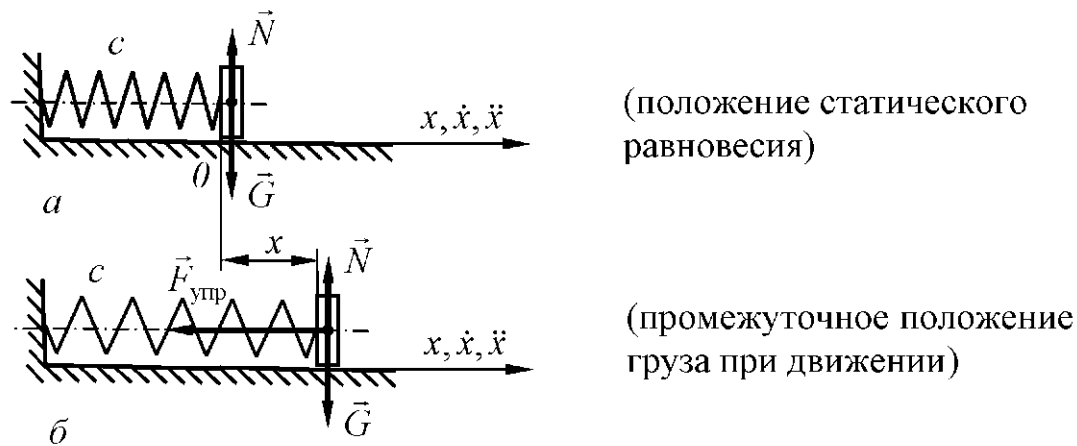


Рис. 1.4

Рассмотрим вначале статическое равновесие груза на гладкой горизонтальной плоскости (рис. 1.4, а). Из условия $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$ следует, что пружина не деформирована в положении статического равновесия груза. При смещении груза по гладкой поверхности будет возникать сила упругости пружины, всегда направленная в сторону, противоположную смещению. Начало координат (0 оси x) расположено в положении статического равновесия груза.

Общая методика вывода дифференциальных уравнений движения груза состоит в следующем. На расчетной схеме груз изображают смещенным из положения статического равновесия на некоторое расстояние x в положительном направлении оси (рис. 1.4, б). При этом начальные условия (начальное положение и направление начальной скорости) не учитываются. По закону Ньютона

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix} = -F_{\text{упр}} = -cx.$$

Уравнение приводим к каноническому виду

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad (1.3)$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$.

Для конкретных условий задачи необходимо сформулировать начальные условия. Для уравнения второго порядка их должно быть два. Эти условия накладывают ограничения на первую производную $\dot{x}$ и на саму переменную x :

при $t = 0$ 1) $x = x_0$; 2) $\dot{x} = \dot{x}_0$.

Начальные условия должны записываться с соответствующим знаком в принятой системе отсчета. Возможны следующие варианты:

$$x_0 = 0; \quad \dot{x}_0 \neq 0;$$

$$x_0 = -\Delta; \quad \dot{x}_0 = 0;$$

$$\begin{aligned}
x_0 &= +\Delta; \dot{x}_0 = 0; \\
x_0 &= -\Delta; \dot{x}_0 = -v_0; \\
x_0 &= -\Delta; \dot{x}_0 = +v_0; \\
x_0 &= +\Delta; \dot{x}_0 = -v_0; \\
x_0 &= +\Delta; \dot{x}_0 = +v_0.
\end{aligned}$$

Общее решение дифференциального уравнения (1.3) по методу Эйлера отыскивается в виде

$$x = Ae^{\lambda t},$$

где A - некоторая постоянная, λ - параметр, имеющий размерность $1/c$, t - время, измеряемое в c .

Тогда $\dot{x} = A\lambda e^{\lambda t}$, $\ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}$.

Подстановка решения в уравнение (1.3) дает следующее

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + k^2 Ae^{\lambda t} = 0$$

или

$$Ae^{\lambda t}(\lambda^2 + k^2) = 0.$$

Т.к. отыскивается $x \neq 0$, то $Ae^{\lambda t} \neq 0$, следовательно,

$$\lambda^2 + k^2 = 0. \quad (1.4)$$

Уравнение (1.4) называется характеристическим уравнением для дифференциального уравнения (1.3), корни которого

$$\lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-k^2} = \pm ki.$$

Тогда

$$x = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{+kit} + A_2 e^{-kit}, \quad (1.5)$$

где A_1, A_2 - некоторые постоянные.

В соответствии с формулами Эйлера

$$\sin kt = \frac{e^{+kit} - e^{-kit}}{2}; \quad \cos kt = \frac{e^{+kit} + e^{-kit}}{2}$$

выражение (1.5) может быть представлено в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (1.6)$$

где C_1 и C_2 - новые постоянные интегрирования.

Формулу (1.6) можно представить в другом виде, если положить $C_1 = a \cos \delta$, $C_2 = a \sin \delta$, где a и δ - новые постоянные интегрирования, называемые амплитудой и начальной фазой. Тогда

$$x = a \cos \delta \cos kt + a \sin \delta \sin kt = a \sin(kt + \delta), \quad (1.7)$$

Удобнее определить постоянные интегрирования C_1 и C_2 в выражении (1.6), для этого продифференцируем его по переменной t , получим выражение для скорости груза

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt$$

и используя начальные условия задачи, составим два алгебраических уравнения относительно C_1 и C_2

1) При $t = 0$ $x = x_0$, т.е.

$$x_0 = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0;$$

2) При $t = 0$ $\dot{x} = \dot{x}_0$, т.е.

$$\dot{x}_0 = -C_1 \cdot k \cdot 0 + C_2 \cdot k \cdot 1,$$

откуда $C_1 = x_0$, $C_2 = \frac{\dot{x}_0}{k}$.

Решение уравнения (1.3) получено в виде

$$x = x_0 \cdot \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt,$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$.

График выражений (1.6, 1.7) имеет вид, представленный на рис. 1.5, а.

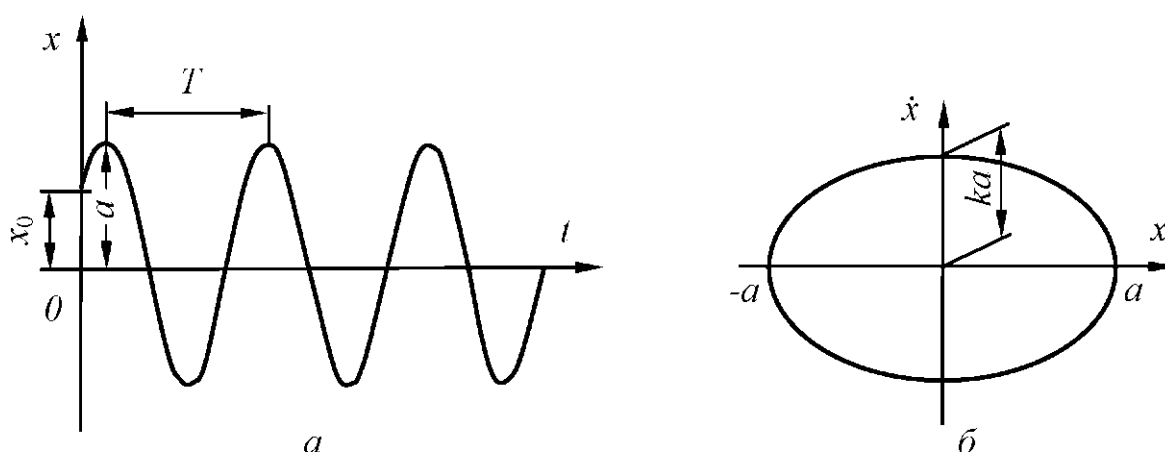


Рис. 1.5

Весьма удобным является изображение движения системы на фазовой плоскости. Фазовым портретом движения называется графическое изображение зависимости скорости движения от смещения. Уравнение (1.7) вместе с полученным из того же уравнения выражения для скорости

$$\dot{x} = ak \cos(kt + \delta)$$

представляет собой уравнение фазовой траектории в параметрической форме. Исключив параметр $(kt + \delta)$, найдем

$$x^2 + \frac{\dot{x}^2}{k^2} = a^2,$$

что является уравнением эллипса с полуосями, равными a и ka . Размеры эллипса зависят от начальных условий, определяющих амплитуду колебаний. Фазовый портрет движения показан на рис. 1.5, б.

1.3 Влияние постоянной силы на свободные колебания материальной точки

1.3.1 Выбор начала координат у нижнего конца недеформированной пружины

Рассмотрим влияние постоянной силы на свободные колебания материальной точки на примере колебаний груза с учетом силы тяжести (рис. 1.6).

Начало координат расположим у нижнего конца недеформированной пружины.

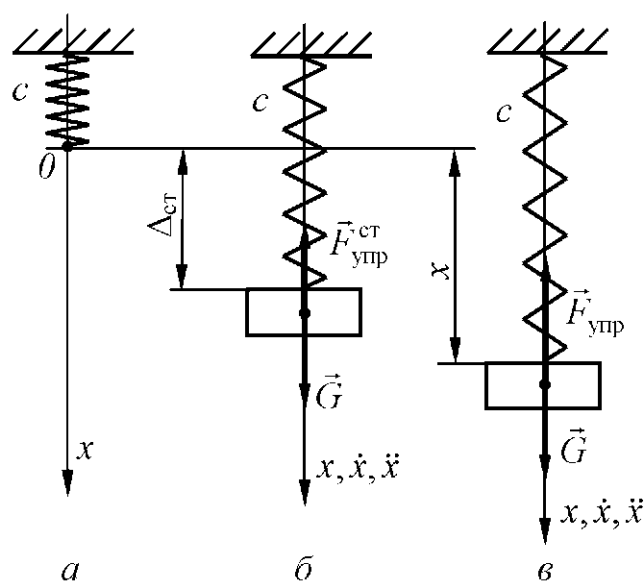


Рис. 1.6

Из условия статического равновесия (рис. 1.6, б) имеем

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad G - F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = 0,$$

где $F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = c\Delta_{\text{ст}}$, откуда

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{G}{c}.$$

Рассматривая расчетную схему (рис. 1.6, в) по закону Ньютона запишем

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = G - F_{\text{упр}},$$

где $F_{\text{упр}} = c\Delta = cx$.

$$m\ddot{x} = G - cx,$$

$$m\ddot{x} + cx = G,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{mg}{m}.$$

После сокращения на m получим

$$\ddot{x} + k^2x = g, \quad (1.8)$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$.

Уравнение (1.8) является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Его решение будем отыскивать в виде

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения $\ddot{x}_1 + k^2x_1 = 0$, $x_1 = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt$; x_2 – частное решение неоднородного уравнения (1.8), вид которого определяется видом правой части уравнения (1.8). В данном случае получаем

$$x_2 = A.$$

Значение A определяется при подстановке x_2 в уравнение (1.8)

$$k^2A = g,$$

$$A = \frac{g}{k^2}.$$

Тогда

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \frac{g}{k^2},$$

а значения постоянных интегрирования C_1 и C_2 определяются с использованием начальных условий задачи:

при $t = 0$ 1) $x = x_0$; 2) $\dot{x} = v_0$.

Выясним физический смысл частного решения

$$A = \frac{g}{k^2} = \frac{g}{c/m} = \frac{mg}{c} = \frac{G}{c} = \Delta_{\text{ст}}.$$

Значит

$$x = C_1 \sin kt + C_2 \cos kt + \Delta_{\text{ст}}.$$

Анализируя полученное уравнение, можем сделать вывод, что колебательный процесс будет происходить относительно положения статического равновесия груза.

1.3.2 Выбор начала координат в положении статического равновесия груза

Начало координат расположим в положении статического равновесия груза.

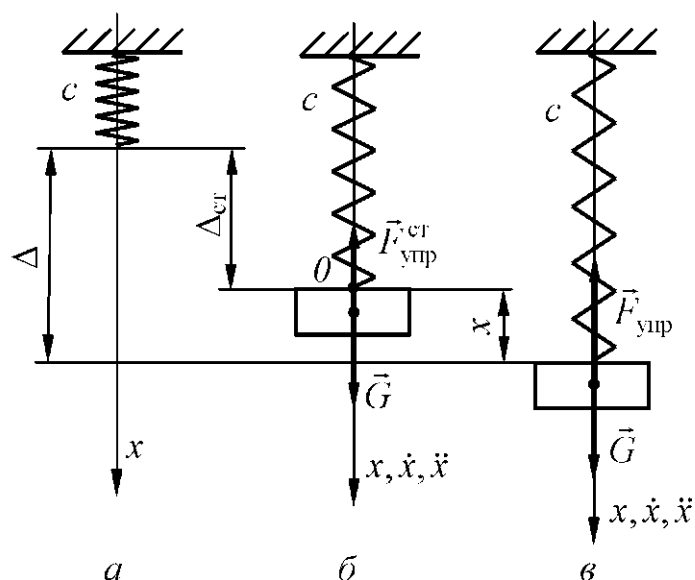


Рис. 1.7

Из условия статического равновесия (рис. 1.7, б) имеем

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad G - F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = 0,$$

где $F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = c\Delta_{\text{ст}}$.

Откуда

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{G}{c}.$$

Рассматривая динамическую расчетную схему (рис. 1.7, в), по закону Ньютона запишем

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = G - F_{\text{упр}},$$

где $F_{\text{упр}} = c\Delta = c(\Delta_{\text{ст}} + x)$.

$$m\ddot{x} = G - c\Delta_{\text{ст}} - cx,$$

$$m\ddot{x} + cx = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = 0,$$

или

$$\ddot{x} + k^2x = 0, \quad (1.8)$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$.

Рассмотрим пример решения задачи (рис. 1.8). Пройдя без начальной скорости по гладкой наклонной плоскости ($\alpha = 30^\circ$) расстояние $s = 0,1$ м, груз D массой $m = 4$ кг, ударяется о недеформированные последовательно

соединенные пружины, имеющие коэффициенты жесткости $c_1 = 48 \text{ Н/см}$ и $c_2 = 24 \text{ Н/см}$. Найти уравнение движения груза D с момента соприкосновения груза с системой пружин, предполагая, что при дальнейшем движении груз от пружин не отделяется. Движение груза отнести к оси x , приняв за начало отсчета положение покоя груза (положение статической деформации пружин).

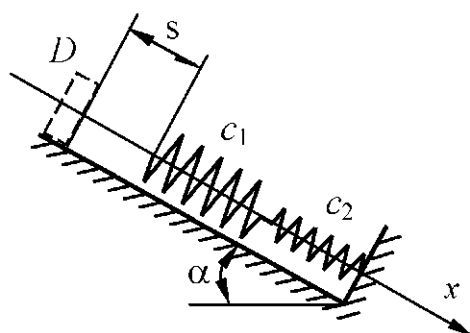


Рис. 1.8

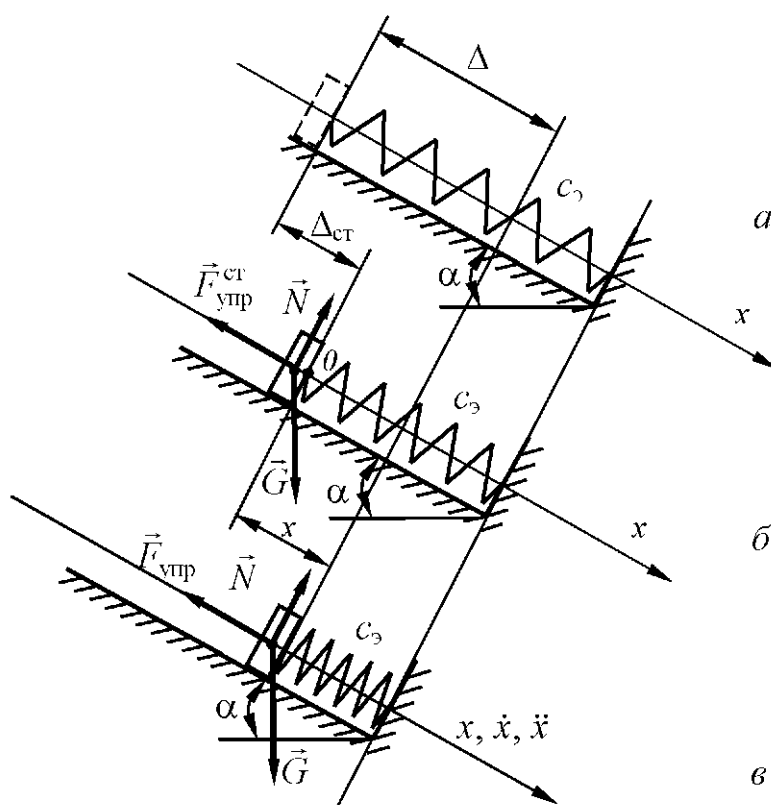


Рис. 1.9

Составляем расчетную схему с одной эквивалентной пружиной и определяем ее жесткость.

$$c_3 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{2400 \cdot 4800}{2400 + 4800} = 1600 \text{ Н/м}$$

Удобно, когда расчетная схема содержит три рисунка: 1 – пружина в свободном состоянии (рис. 1.9, а), 2 – груз в положении статического равновесия (рис. 1.9, б), 3 – груз в промежуточном положении при движении (рис. 1.9, в).

Из условия статического равновесия (рис. 1.9, б) имеем

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad G \sin \alpha - F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = 0,$$

где $F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = c_3 \Delta_{\text{ст}}$.

Откуда

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{G \sin \alpha}{c_3}.$$

Уравнение движения груза (рис. 1.9, в) имеет вид

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix},$$

где

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = G \sin \alpha - F_{\text{упр}},$$

$$F_{\text{упр}} = c_3 \Delta = c_3 (\Delta_{\text{ст}} + x).$$

$$m\ddot{x} = G \sin \alpha - c_3 \Delta_{\text{ст}} - c_3 x,$$

$$m\ddot{x} + c_3 x = 0,$$

$$\ddot{x} + \frac{c_3}{m} x = 0.$$

Обозначим $k^2 = \frac{c_3}{m}$,

$$\ddot{x} + k^2 x = 0.$$

Сформулируем начальные условия задачи:

при $t = 0$ 1) $x = -\Delta_{\text{ст}}$; 2) $\dot{x} = v_0$.

Вычислим $\Delta_{\text{ст}}$ из условия статического равновесия

$$\Delta_{\text{ст}} = \frac{G \sin \alpha}{c_3} = \frac{4 \cdot 9,81 \cdot 0,5}{1600} = 0,0123 \text{ м}.$$

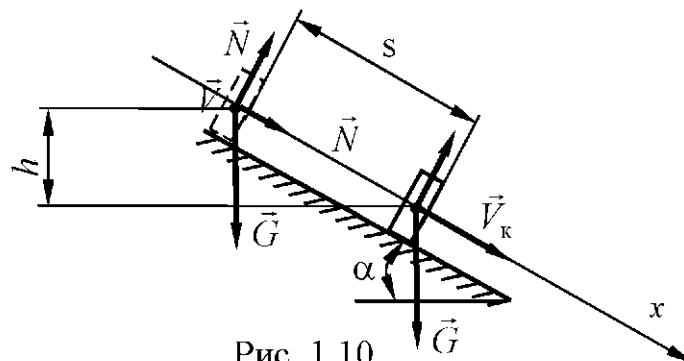


Рис. 1.10

Найдем v_0 из вспомогательной задачи (рис 1.10). Рассмотрим скольжение тела по гладкой наклонной плоскости на участке длиной s при $v_0 = 0$. Конечная скорость v_k на этом участке будет начальной для задачи о колебании груза на пружине. По теореме об изменении кинетической энергии

$$T_k - T_0 = \sum_{k=1}^n A_k ;$$

$$\frac{mv_k^2}{2} - 0 = Gh ;$$

$$\frac{mv_k^2}{2} = mgs \sin \alpha ;$$

$$v_k = \sqrt{2gs \sin \alpha} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 0,1 \cdot 0,5} = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Решение полученного дифференциального уравнения отыскиваем в виде

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt,$$

тогда

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt.$$

Используем начальные условия задачи:

при $t = 0$ 1) $x = -\Delta_{\text{ст}} = -0,0123$ м.

$$-\Delta_{\text{ст}} = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0, \text{ откуда } C_1 = -\Delta_{\text{ст}} = -0,0123 \text{ м.}$$

2) $\dot{x} = v_0 = 1$ м/с.

$$v_0 = -C_1 k \cdot 0 + C_2 k \cdot 1, \text{ откуда } C_2 = \frac{v_0}{k} = \frac{1}{\sqrt{1600/4}} = 0,05 \text{ м.}$$

Тогда уравнение колебательного движения запишем в виде

$$x = -\Delta_{\text{ст}} \cos kt + \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Подставив найденные численные значения коэффициентов, окончательно получим

$$x = -0,0123 \cos 20t + 0,05 \sin 20t, \text{ м.}$$

График полученной функции, график изменения скорости и фазовый портрет колебательного движения приведены в приложении А.

2 Затухающие колебания при наличии сил вязкого трения, пропорционального первой степени скорости

Силу вязкого трения создает гидравлический демпфер, устройство которого показано на рисунке 2.1. При перемещении поршня с калиброванными отверстиями 1 относительно цилиндра 2 создается сопротивление их относительному перемещению, пропорциональное первой степени скорости этого перемещения и направленная противоположно направлению вектора скорости $\vec{v}$, т.е. $\vec{F}_c = -\mu \vec{v}$, где μ - коэффициент вязкого сопротивления, зависящий от вязкости жидкости (масла) и диаметров

калибровочных отверстий, имеющий размерность $\left[\frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}} \right]$. При $\vec{v} = 0$ сила сопротивления равна нулю.

Методику составления и решения дифференциальных уравнений затухающих колебаний рассмотрим на примере.

Груз массой m закреплен на комплекте из двух одинаковых пружин жесткости c и демпферного устройства с коэффициентом вязкого сопротивления μ (рис. 2.2).

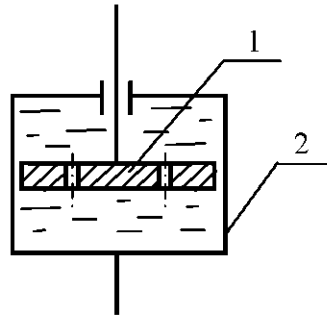


Рис. 2.1

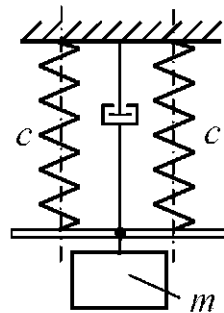


Рис. 2.2

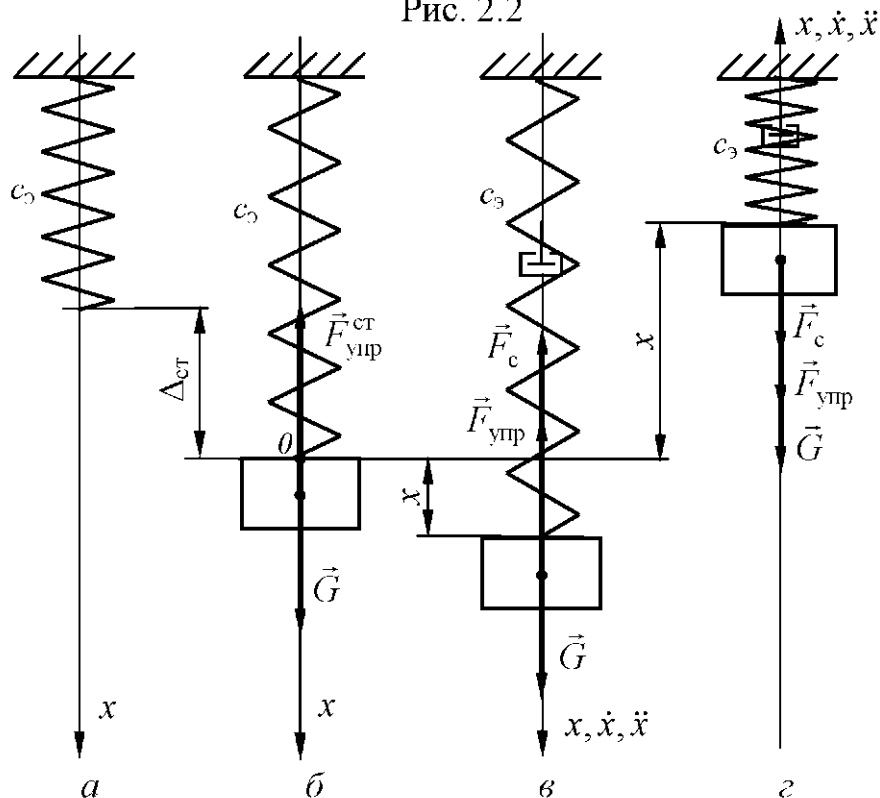


Рис. 2.3

При $t = 0$ груз выводят из равновесия на расстояние x_0 вверх или вниз и сообщают ему начальную скорость v_0 , направленную вверх или вниз.

Для составления расчетной схемы необходимо комплект пружин заменить одной пружиной эквивалентной жесткости, в данном случае $c_3 = c + c - 2c$.

На расчетной схеме (рис. 2.3) целесообразно показывать три рисунка: недеформированную пружину (рис. 2.3, а), груз в положении статического равновесия (рис. 2.3, б), груз в движении, смещенный в положительном направлении оси x на некоторое расстояние x (рис. 2.3, в) или (рис. 2.3, г).

На рис. 2.3, в ось x , начало которой выбрано в положении статического равновесия груза, направлена вниз, поэтому и для вывода уравнений груз необходимо показать смещенным вниз на текущее расстояние x , вниз направлены его скорость и ускорение.

На рис. 2.3, г положительное направление оси x принято вверх из положения статического равновесия груза, вверх направлена его скорость и ускорение. Такие расчетные схемы изображаются независимо от начальных условий задачи.

Условие статического равновесия в обоих случаях имеет вид:

$$\begin{aligned} F_{\text{упр}} &= G, \\ \text{или } c_3 \Delta_{\text{ст}} &= G, \\ \text{откуда } \Delta_{\text{ст}} &= \frac{G}{c_3}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Составляем дифференциальное уравнение движения груза, воспользовавшись схемой, представленной на рис. 2.3, в.

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{i=1}^n F_{ix}; \\ \sum_{i=1}^n F_{ix} &= G - F_{\text{упр}} - F_c; \\ F_{\text{упр}} &= c_3 \Delta = c_3 (\Delta_{\text{ст}} + x); \\ |F_c| &= \mu \dot{x}, \text{ направлена противоположно } \dot{x}; \\ m\ddot{x} &= G - c_3 \Delta_{\text{ст}} - c_3 x - \mu \dot{x}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

После выполнения сокращений с учетом (2.1) уравнение приводим к каноническому виду:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c_3}{m} x &= 0, \\ \text{или} \\ \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x &= 0, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\text{где } 2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c_3}{m}.$$

Выведем то же уравнение, воспользовавшись расчетной схемой, представленной на рис. 2.3, *г*.

Если координата $|x| > \Delta_{\text{ст}}$, то пружина будет сжата и это определит направление силы упругости $\vec{F}_{\text{упр}}$. Все силы показаны на рис. 2.3, *г* в соответствии с принятым направлением оси $x, \dot{x}, \ddot{x}$.

Если бы $|x| < \Delta_{\text{ст}}$, то пружина была бы растянута и направление $\vec{F}_{\text{упр}}$ было бы противоположно показанному на рис. 2.3, *г*.

Составляем дифференциальное уравнение движения груза

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \sum_{i=1}^n F_{ix}, \\ \sum_{i=1}^n F_{ix} &= -G - F_{\text{упр}} - F_c; \\ F_{\text{упр}} &= c_{\gamma} \Delta = c_{\gamma} (x - \Delta_{\text{ст}}). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Рекомендуем сопоставить выражения для $\vec{F}_{\text{упр}}$ (2.2) и (2.4).

$$|F_c| = \mu \dot{x}.$$

Получаем

$$m\ddot{x} = -G + c_{\gamma} \Delta_{\text{ст}} - c_{\gamma} x - \mu \dot{x}.$$

Приведя его к каноническому виду, получим то же дифференциальное уравнение затухающих колебаний груза

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

где $2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c_{\gamma}}{m}.$

Для интегрирования дифференциального уравнения второго порядка (2.3) необходимо сформулировать два начальных условия: значение самой переменной x и ее первой производной $\dot{x}$ в начальный момент времени (при $t = 0$):

1) $x = x_0$, 2) $\dot{x} = v_0$.

Значение x_0 и v_0 записываются со своими знаками в принятой системе координат.

Решение дифференциального уравнения (2.3) отыскиваем в виде

$$x = Ae^{\lambda t}, \text{ тогда } \dot{x} = A\lambda e^{\lambda t}, \ddot{x} = A\lambda^2 e^{\lambda t}.$$

Подставим решение в уравнение (2.3).

$$A\lambda^2 e^{\lambda t} + 2nA\lambda e^{\lambda t} + k^2 Ae^{\lambda t} = 0.$$

$$Ae^{\lambda t} (\lambda^2 + 2n\lambda + k^2) = 0.$$

Так как $x \neq 0$, то $Ae^{\lambda t} \neq 0$, значит

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0. \quad (2.5)$$

Это уравнение называется характеристическим уравнением дифференциального уравнения (2.3).

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Возможны три частных случая:

1. $k > n$ – соответствует затухающим колебаниям;
2. $k < n$ – апериодическое движение груза;
3. $k = n$ – также соответствует апериодическому движению груза.

Рассмотрим вид решения уравнения (2.3) при $k > n$. В этом случае

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{(k^2 - n^2) \cdot (-1)} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}.$$

Корни характеристического уравнения (2.5) комплексные и решение уравнения (2.3) необходимо записать в виде

$$\begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(-n+i\sqrt{k^2-n^2})t} + A_2 e^{(-n-i\sqrt{k^2-n^2})t} = \\ &= A_1 e^{-nt} \cdot e^{+i\sqrt{k^2-n^2} \cdot t} + A_2 e^{-nt} \cdot e^{-i\sqrt{k^2-n^2} \cdot t} = e^{-nt} \left(A_1 e^{+i\sqrt{k^2-n^2} \cdot t} + A_2 e^{-i\sqrt{k^2-n^2} \cdot t} \right), \end{aligned}$$

где A_1, A_2 – постоянные интегрирования.

Это решение с помощью формул Эйлера можно представить в виде

$$x = e^{-nt} \left(C_1 \cos(\sqrt{k^2 - n^2} t) + C_2 \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t) \right), \quad (2.6)$$

где C_1 и C_2 – новые постоянные интегрирования.

Выражение (2.6) удобно использовать для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 по начальным условиям задачи, но для анализа затухающих колебаний его удобно преобразовать и представить в более наглядном виде.

Положим $C_1 = a \sin \delta$, $C_2 = a \cos \delta$,

где a и δ – новые постоянные, тогда

$$\begin{aligned} x &= a e^{-nt} \left(\cos(\sqrt{k^2 - n^2} t) \cdot \sin \delta + \sin(\sqrt{k^2 - n^2} t) \cdot \cos \delta \right) = \\ &= a e^{-nt} \sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \delta) \end{aligned} \quad (2.7)$$

В выражении (2.7) коэффициент при $\sin(\sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \delta)$ представляет собой изменяющуюся по экспоненциальной зависимости амплитуду колебаний.

Частота затухающих колебаний $k_z = \sqrt{k^2 - n^2}$ меньше частоты собственных свободных колебаний.

Период затухающих колебаний $T_{\text{зк}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - n^2}}$ больше периода свободных колебаний $T = \frac{2\pi}{k}$.

В выражении (2.7) a – амплитуда колебаний, δ – начальная фаза колебаний.

График выражения (2.7) имеет вид, представленный на рис. 2.4, а. Фазовый портрет движения показан на рис. 2.4, б. Фазовые траектории в данном случае являются логарифмическими спиралями, свертывающимися в начале координат.

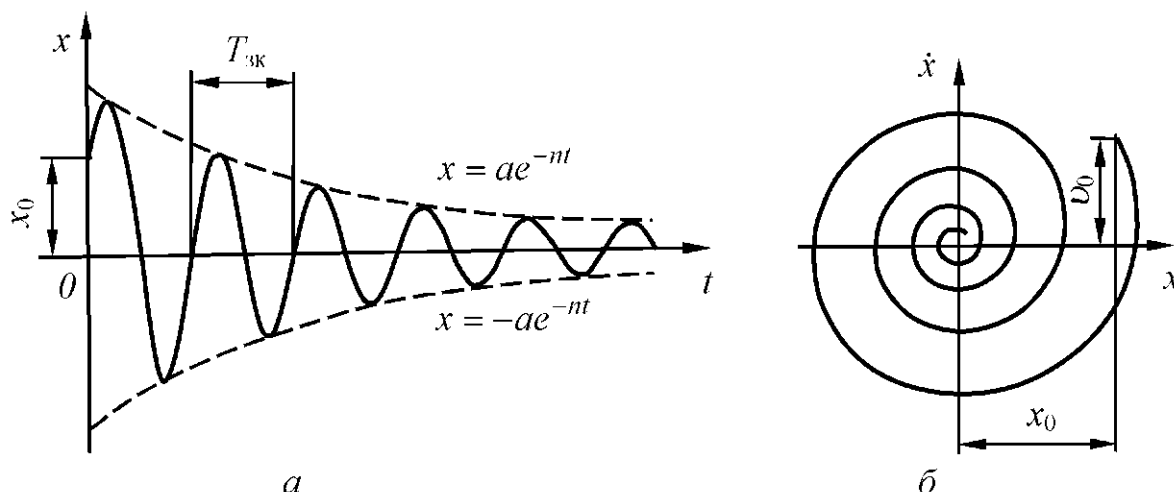


Рис. 2.4

Найдем постоянные интегрирования C_1 и C_2 , воспользовавшись решением в виде (2.6). Для этого необходимо иметь общее выражение для $\dot{x}$. Дифференцируем по t выражение (2.6):

$$\dot{x} = -ne^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right) + e^{-nt} \sqrt{k^2 - n^2} \left(-C_1 \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right).$$

При $t = 0$ $x = x_0$, т.е.

$$x_0 = 1 \cdot (C_1 + C_2 \cdot 0), \text{ откуда } C_1 = x_0.$$

При $t = 0$ $\dot{x} = v_0$, т.е.

$$v_0 = -n \cdot 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) + 1 \cdot \sqrt{k^2 - n^2} (-C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1), \text{ т.е.}$$

$$v_0 = -n \cdot C_1 + \sqrt{k^2 - n^2} \cdot C_2, \text{ тогда } C_2 = \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}.$$

Получаем окончательно:

$$x = e^{-nt} \left(x_0 \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + \frac{v_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right).$$

Рассмотрим вид решения уравнения (2.3) при $k < n$. В этом случае

$$\lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Корни характеристического уравнения (2.5) действительные и решение уравнения (2.3) необходимо записать в виде

$$\begin{aligned}
x &= A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} = A_1 e^{(-n+\sqrt{n^2-k^2})t} + A_2 e^{(-n-\sqrt{n^2-k^2})t} = \\
&= A_1 e^{-nt} \cdot e^{\sqrt{n^2-k^2} \cdot t} + A_2 e^{-nt} \cdot e^{-\sqrt{n^2-k^2} \cdot t} = e^{-nt} \left(A_1 e^{\sqrt{n^2-k^2} \cdot t} + A_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2} \cdot t} \right), \quad (2.8)
\end{aligned}$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий (при $t = 0$):

1) $x = x_0$, 2) $\dot{x} = v_0$.

Общее выражение для $\dot{x}$ имеет вид

$$\dot{x} = -ne^{-nt} \left(A_1 e^{\sqrt{n^2-k^2} \cdot t} + A_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2} \cdot t} \right) + e^{-nt} \sqrt{n^2-k^2} \left(A_1 e^{\sqrt{n^2-k^2} \cdot t} - A_2 e^{-\sqrt{n^2-k^2} \cdot t} \right).$$

Используем начальные условия

$$x_0 = 1 \cdot (A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1), \text{ откуда } A_1 = x_0 - A_2.$$

$$v_0 = -n \cdot 1 \cdot (A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 1) + \sqrt{n^2-k^2} (A_1 \cdot 1 - A_2 \cdot 1), \text{ откуда}$$

$$A_2 = \frac{v_0 - A_1(-n + \sqrt{n^2-k^2})}{-n - \sqrt{n^2-k^2}}.$$

Решение очевидно.

График выражения (2.8) может иметь один из следующих видов (рис. 2.5).

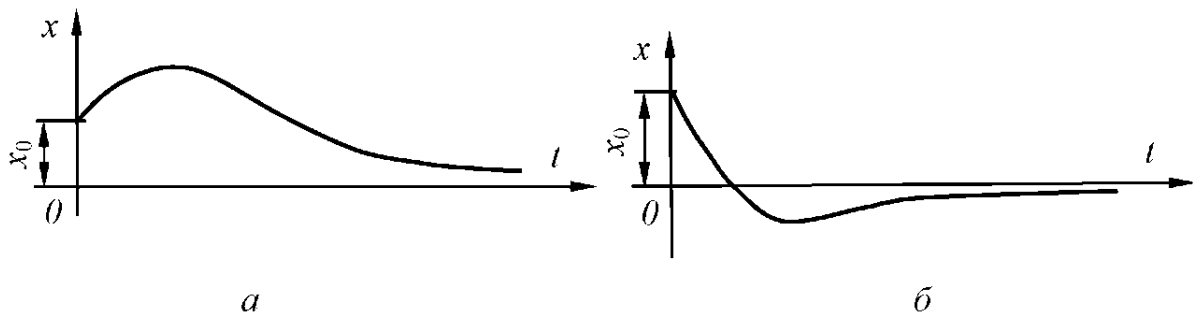


Рис. 2.5

$a - x_0 > 0, \dot{x}_0 > 0$; $b - x_0 > 0, \dot{x}_0 < 0$

Рассмотрим случай, когда $k = n$. Тогда

$$\lambda_{1,2} = -n.$$

Корни характеристического уравнения (2.5) кратные и решение уравнения (2.3) необходимо записать в виде

$$x = A_1 e^{\lambda t} + A_2 t e^{\lambda t} = A_1 e^{-nt} + A_2 t e^{-nt} = e^{-nt} (A_1 + A_2 t), \quad (2.9)$$

где A_1 и A_2 – постоянные интегрирования.

Сформулируем начальные условия:

при $t = 0$ 1) $x = x_0$; 2) $\dot{x} = v_0$.

Общее выражение для $\dot{x}$

$$\dot{x} = -ne^{-nt} (A_1 + A_2 t) + A_2 e^{-nt}.$$

Используем начальные условия

$$x_0 = 1 \cdot (A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 0), \text{ откуда } A_1 = x_0.$$

$$v_0 = -n \cdot 1 \cdot (A_1 \cdot 1 + A_2 \cdot 0) + 1 \cdot A_2, \text{ откуда } A_2 = v_0 + A_1 n.$$

Окончательно получаем:

$$x = e^{-nt} [x_0 + (v_0 + x_0 n)t].$$

График выражения (2.9) имеет один из видов, представленных на рис. 2.5.

Пример решения задачи с учетом сил вязкого трения. Груз D , массой $m = 1$ кг прикрепляют в середине абсолютно жесткого бруска AB , соединяющего концы двух одинаковых параллельных пружин, не сообщая начальной скорости; пружины не деформированы (рис 2.6). Коэффициенты жесткости пружин $c = 1,5$ Н/см. Сопротивление движению груза пропорционально скорости $F_c = 8v$, где v - скорость, $\alpha = 60^\circ$. Массой бруска AB и массой прикрепленной к бруску части демпфера пренебречь. Найти уравнение движения груза D с момента соприкосновения груза с системой пружин, предполагая, что при дальнейшем движении груз от пружин не отделяется. Движение груза отнести к оси x , приняв за начало отсчета положение покоя груза (положение статического равновесия).

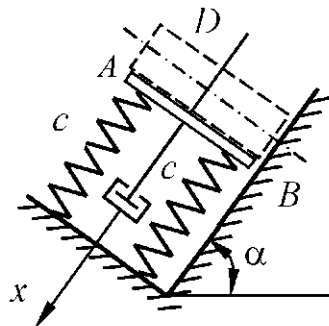


Рис. 2.6

Решение.

Комплект из двух одинаковых пружин заменяем одной пружиной эквивалентной жесткости $c_3 = 2c = 2 \cdot 150 = 300$ Н/м. Изображаем на расчетной схеме три рисунка (рис. 2.7).

Условие статического равновесия имеет вид:

$$F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = G \sin \alpha,$$

$$\text{или } c_3 \Delta_{\text{ст}} = G \sin \alpha,$$

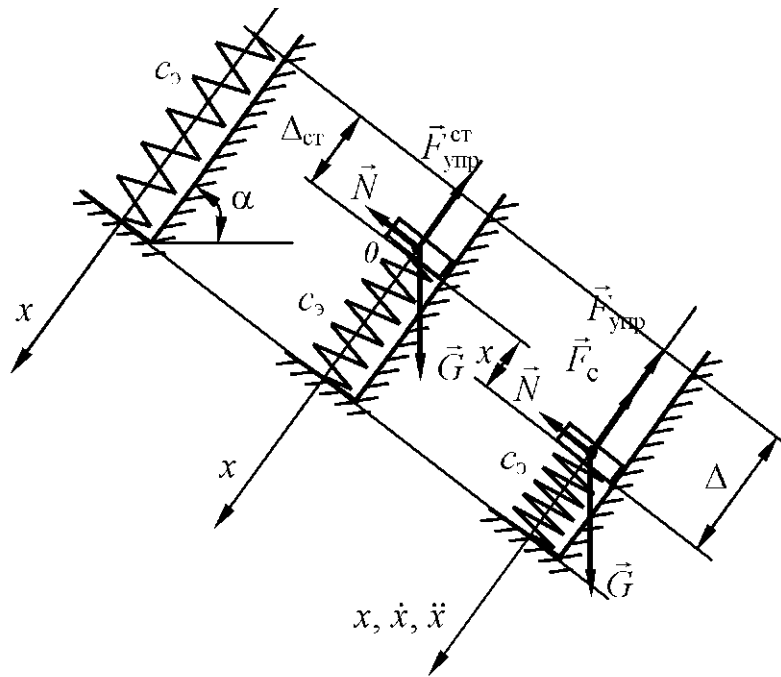


Рис. 2.7

$$\text{откуда } \Delta_{\text{ст}} = \frac{G \sin \alpha}{c_3} = \frac{1 \cdot 9,8 \cdot 0,866}{300} = 0,028 \text{ м.}$$

Дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix};$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = G \sin \alpha - F_{\text{упр}} - F_c;$$

$$F_{\text{упр}} = c_3 \Delta = c_3 (\Delta_{\text{ст}} + x);$$

$$|F_c| = \mu \dot{x}, \text{ направлена противоположно } \dot{x};$$

$$m\ddot{x} = G \sin \alpha - c_3 \Delta_{\text{ст}} - c_3 x - \mu \dot{x}.$$

После выполнения сокращений приводим уравнение к каноническому виду:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \dot{x} + \frac{c_3}{m} x = 0,$$

$$\text{или } \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0,$$

$$\text{где } 2n = \frac{\mu}{m} = \frac{8}{1} = 8 \text{ с}^{-1}, \quad k^2 = \frac{c_3}{m}, \text{ откуда } k = \sqrt{\frac{c_3}{m}} = \sqrt{\frac{300}{1}} \approx 17,3 \text{ с}^{-1}.$$

Получили $k > n$. Сформулируем начальные условия задачи: при $t = 0$ 1) $x = -\Delta_{\text{ст}}$; 2) $\dot{x} = v_0 = 0$.

Решение дифференциального уравнения будем отыскивать в виде $x = e^{-nt} (C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t)$. Дифференцируя выражение, получим

$$x = -ne^{-nt} \left(C_1 \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + C_2 \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right) + \\ + e^{-nt} \sqrt{k^2 - n^2} \left(-C_1 \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t + C_2 \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right).$$

Используем начальные условия задачи:

при $t = 0$ 1) $x = -\Delta_{\text{ст}}$

$$-\Delta_{\text{ст}} = 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0), \text{ откуда } C_1 = -\Delta_{\text{ст}} = -0,028 \text{ м.}$$

2) $\dot{x} = v_0 = 0$

$$0 = -n \cdot 1(C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) + 1 \cdot \sqrt{k^2 - n^2} (-C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1), \text{ откуда}$$

$$C_2 = \frac{nC_1}{\sqrt{k^2 - n^2}} = \frac{4 \cdot (-0,028)}{\sqrt{300 - 16}} = 0,0066 \text{ м.}$$

Тогда уравнение колебательного движения запишем в виде

$$x = e^{-nt} \left(-\Delta_{\text{ст}} \cos \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t - \frac{n\Delta_{\text{ст}}}{\sqrt{k^2 - n^2}} \sin \sqrt{k^2 - n^2} \cdot t \right).$$

Подставив найденные численные значения коэффициентов, окончательно получим

$$x = e^{-4t} (-0,028 \cos 16,85t - 0,0066 \sin 16,85t), \text{ м.}$$

График полученной функции, график изменения скорости и фазовый портрет колебательного движения приведены в приложении *В*.

3 Вынужденные колебания без учета сил сопротивления движению

В учебниках рассматриваются вынужденные колебания при действии гармонической вынуждающей силы. А в сборнике заданий для курсовых работ под редакцией А.А. Яблонского рассматриваются вынужденные колебания вследствие гармонического движения опоры пружины, то есть кинематического возбуждения колебаний.

Рассмотрим методику вывода уравнений движения груза на примере следующей задачи. В некоторый момент времени груз D , массой $m = 1$ кг, прикрепляют к концу A недеформированных последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости $c_1 = 12$ Н/см и $c_2 = 4$ Н/см и отпускают без начальной скорости. Одновременно ($t = 0$) другой конец пружин B начинает совершать движение по закону $\xi = 1,5 \sin 10t$, см $= 1,5 \cdot 10^{-2} \sin 10t$, м. Ось ξ направлена вдоль наклонной плоскости вниз ($\alpha = 30^\circ$) (рис. 3.1). Положение начала отсчета на оси ξ соответствует среднему положению точки B ($\xi = 0$). Начало отсчета оси x соответствует положению статического равновесия груза D .

Решение.

Условие статического равновесия (рис. 3.1, *б*):

Составляем расчетную схему с одной эквивалентной пружиной и определяем ее жесткость

$$c_3 = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2} = \frac{1200 \cdot 400}{1200 + 400} = 300 \text{ Н/м}.$$

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0;$$

$$G \sin \alpha - F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = 0;$$

$$F_{\text{упр}}^{\text{ст}} = c_3 \Delta_{\text{ст}},$$

$$\text{тогда } \Delta_{\text{ст}} = \frac{G \sin \alpha}{c_3} = \frac{1 \cdot 9,8 \cdot 0,5}{300} = 0,0164 \text{ м}.$$

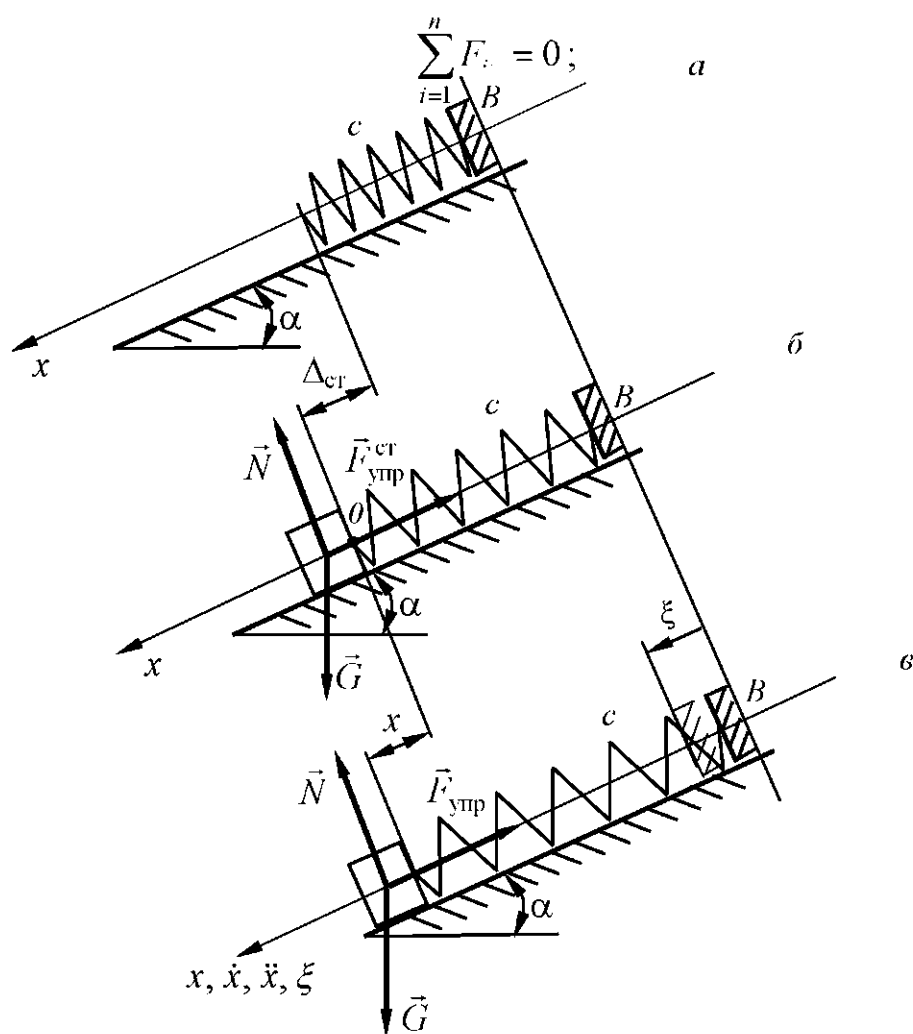


Рис. 3.1

Дифференциальное уравнение движения (рис. 3.1, в):

$$m\ddot{x} = \sum_{i=1}^n F_{ix},$$

где

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = G \sin \alpha - F_{\text{упр}},$$

$$F_{\text{упр}} = c\Delta = c(\Delta_{\text{ст}} + x - \xi);$$

Тогда

$$m\ddot{x} = G \sin \alpha - c\Delta_{\text{ст}} - cx + c\xi.$$

После выполнения сокращений уравнение приводим к каноническому виду:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m}x = \frac{c}{m}\xi,$$

или $\ddot{x} + k^2x = k^2\xi,$ (3.1)

где $k^2 = \frac{c}{m}$, k – собственная частота колебаний груза на пружине.

Подставляя в (3.1) значение заданной функции ξ , получим

$$\ddot{x} + k^2x = k^2 1,5 \cdot 10^{-2} \sin 10t.$$

Тогда в общем случае уравнение (а) запишем в виде

$$\ddot{x} + k^2x = k^2q \sin pt, \tag{3.2}$$

где p – частота перемещения опоры (внешнего возмущения).

Для интегрирования дифференциального уравнения необходимо сформулировать начальные условия задачи (при $t = 0$):

1) $x = -\Delta_{\text{ст}}$, 2) $\dot{x} = 0$.

В случае, если $p \neq k$ решение неоднородного дифференциального уравнения второго порядка (3.2) имеет вид:

$$x = x_1 + x_2,$$

где x_1 – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$\ddot{x}_1 + k^2x_1 = 0, \quad x_1 = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt;$$

x_2 – частное решение неоднородного уравнения, вид которого определяется видом правой части уравнения (3.2), в общем случае $x_2 = A \sin pt + B \cos pt$,

где A и B – некоторые постоянные, значения которых определяются подстановкой частного решения x_2 в неоднородное дифференциальное уравнение (3.2).

$$\dot{x}_2 = Ap \cos pt - Bp \sin pt$$

$$\ddot{x}_2 = -Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt.$$

$$-Ap^2 \sin pt - Bp^2 \cos pt + k^2(A \sin pt + B \cos pt) = q \sin pt$$

$$A(k^2 - p^2) \sin pt + B(k^2 - p^2) \cos pt = q \sin pt.$$

Коэффициенты при $\sin pt$ и при $\cos pt$ в левой и правой частях этого уравнения должны быть равны в любой момент времени.

$$A(k^2 - p^2) = q, \quad \text{откуда} \quad A = \frac{q}{k^2 - p^2}$$

$$B(k^2 - p^2) = 0, \text{ откуда } B = 0,$$

$$\text{тогда } x_2 = \frac{q}{k^2 - p^2} \sin pt.$$

Теперь решение уравнения (3.2) имеет вид

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + \frac{q}{k^2 - p^2} \sin pt \quad (3.3)$$

Это решение должно удовлетворять начальным условиям. Определим неизвестные постоянные интегрирования C_1 и C_2 , используя сформулированные выше начальные условия. Для этого необходимо знать зависимость $\dot{x} = \dot{x}(t)$. Дифференцируя выражение (3.3) получим

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt + \frac{qp}{k^2 - p^2} \cos pt \quad (3.4)$$

При $t = 0$, $x_0 = -\Delta_{\text{ст}}$,

$$-\Delta_{\text{ст}} = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 + \frac{q}{k^2 - p^2} \cdot 0, \text{ откуда } C_1 = -\Delta_{\text{ст}} = -0,0164 \text{ м.}$$

При $t = 0$, $\dot{x}_0 = 0$,

$$0 = -C_1 k \cdot 0 + C_2 k \cdot 1 + \frac{qp}{k^2 - p^2} \cdot 1, \text{ откуда}$$

$$C_2 = -\frac{qp}{k(k^2 - p^2)} = -\frac{4,5 \cdot 10}{17,3(17,3^2 - 10^2)} = -0,13 \text{ м.}$$

Теперь уравнение (20) запишем в виде

$$x = -\Delta_{\text{ст}} \cos kt - \frac{qp}{k(k^2 - p^2)} \sin kt + \frac{q}{k^2 - p^2} \sin pt. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) представляет собою закон движения груза D при заданных в задаче начальных условиях. После подстановки численных значений в уравнение колебательного процесса (3.5), получим конечное выражение

$$x = -0,0164 \cos 17,3t - 0,13 \sin 17,3t + 0,0225 \sin 10t, \text{ м.}$$

График полученной функции, график изменения скорости и амплитудно-частотная характеристика колебательной системы приведены в приложении В.

Контрольные задания

по теме “Колебания линейных механических систем с одной степенью свободы”:

I Получить уравнение движения груза массой m (m_1) или грузов массой m_1 и m_2 для следующих четырех случаев:

1. Грузу (грузам), находящемуся (находящимся) в равновесном состоянии, в некоторый момент времени ($t = 0$) добавляют (снимают) груз массой m_2 и сообщают начальную скорость v_0 , направленную вверх (вниз) (см. табл. 1). Действие силы F и силы вязкого сопротивления не учитывать.

2. Решить задачу п. 1, приняв, что на груз действует сила вязкого сопротивления, пропорциональная первой степени скорости груза $\vec{F}_c = -\mu\vec{v}$, где μ - коэффициент вязкого сопротивления (см. табл. 1). Рассмотреть случаи аperiodического движения, вычислив значения μ из условий: 1) $k = n$, 2) $k < n$, приняв $\mu_1 = 50 \cdot \mu$.

3. Решить задачу п. 1, приняв, что груз (грузы) начинает (начинают) движение из состояния статического равновесия под действием силы, изменяющейся по закону $F = A \sin \omega t$. Амплитуда A и частота возмущающей силы ω приведены в табл. 1. Силой вязкого сопротивления пренебречь.

4. Решить задачу п. 3 при наличии силы вязкого сопротивления при трех полученных в п. 2 значениях μ .

Указание: начало отсчета совместить с положением статического равновесия груза (грузов).

II Для п.п. 1,2 построить графики колебаний механической системы и изменения скорости с течением времени, фазовые портреты движения.

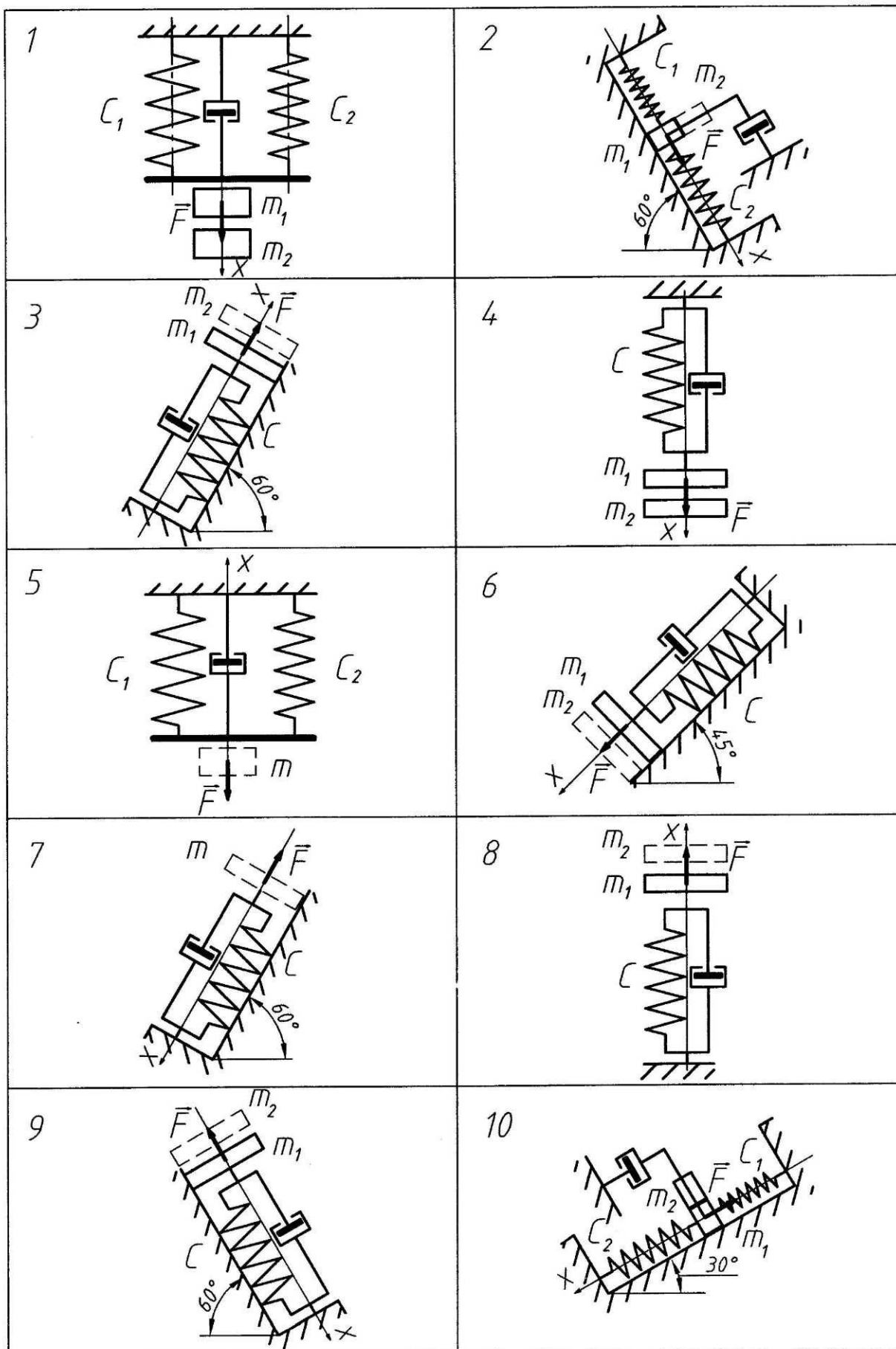
Для п.п. 3,4 построить графики колебаний механической системы и изменения скорости с течением времени, фазовый портрет движения, амплитудно-частотную характеристику колебательной системы.

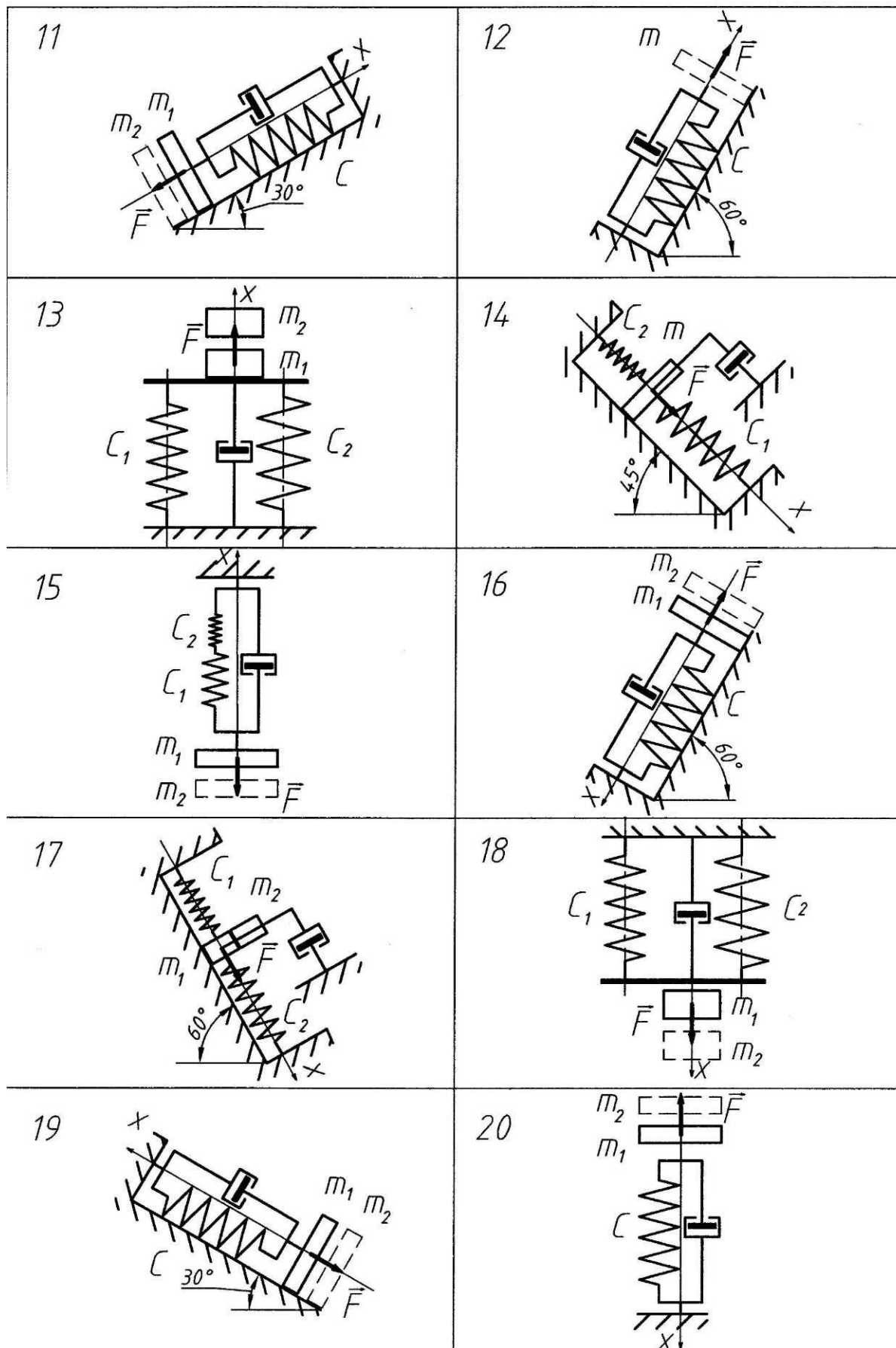
Таблица 1 – Исходные данные к вариантам заданий

№ вар.	№ рис.	c (c_1), Н/м	c_2 , Н/м	m (m_1), кг	m_2 , кг	v_0^* , м/с	$\mu, \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$	A , кН	ω , с ⁻¹
1	6	700	-	2,6	1,4	1	12	0,025	7
2	15	3600	1800	4	2	-1	14	0,02	18
3	2	1800	1200	3	2	0,4	20	0,015	5
4	9	900	-	2,5	1,5	-0,5	16	0,012	18
5	19	4200	-	7	9	0	8	0,026	4
6	1	1200	1600	8	6	-0,6	14	0,035	20
7	10	1000	2400	4	3	2	16	0,018	10
8	3	950	-	3	5	-0,75	10	0,015	8
9	11	1800	-	4	6	1	8	0,02	4
10	17	4200	1400	3,5	2,5	0	6	0,025	12
11	13	400	800	4	2	-0,6	4	0,035	6
12	26	2600	-	8	5	-0,8	20	0,022	8
13	21	1200	3600	2	1	-0,5	8	0,01	12
14	4	1800	-	8,5	3,5	-0,6	12	0,024	14
15	25	4200	-	7	5	3	18	0,035	8
16	24	1850	950	6	8	0,4	16	0,04	4

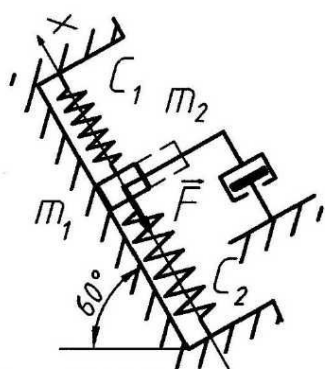
17	8	1400	-	5	2	-0,25	22	0,012	10
18	14	1350	900	3	-	2	6	0,02	8
19	16	400	-	2,4	1,6	-2	4	0,02	7
20	18	1200	1800	1	2	2	12	0,015	10
21	23	900	-	2	1	0,8	6	0,02	12
22	7	400	-	2	-	1,5	4	0,02	5
23	20	1200	-	4	2	1	8	0,022	14
24	5	500	300	2	-	2	6	0,035	16
25	22	2400	4800	3	1	0,4	8	0,015	20
26	28	1600	-	4	-	2	4	0,02	8
27	30	1200	3600	3	-	0,8	12	0,01	6
28	12	800	-	2	-	-0,4	6	0,015	12
29	27	1200	600	2	-	-0,6	10	0,025	14
30	29	400	200	3	-	1	4	0,02	5
31	9	1600	-	5	3	0,6	12	0,02	10
32	3	1000	-	2	3	1	8	0,014	14
33	21	2400	-	4	2	-2	4	0,01	20
34	6	1050	-	3	2	-2	12	0,024	8
35	23	300	-	2	1	-0,3	4	0,01	18
36	1	900	600	3	2	0,8	10	0,015	8
37	10	3600	2400	4	2	0	12	0,022	6
38	16	1500	-	3,6	1,4	0,4	6	0,012	16
39	11	4200	-	8	6	-0,2	24	0,01	18
40	8	600	-	2	4	0,8	8	0,024	12
41	2	1200	3600	1	2	2	9	0,015	10
42	26	800	-	4	2	1	6	0,03	5
43	19	6400	-	10	6	0,4	20	0,035	16
44	24	2550	2000	8	5	-1	20	0,02	12
45	14	1800	900	2	-	-0,4	4	0,014	16
46	4	4400	-	9	2	2	9	0,022	6
47	25	800	-	1,6	2,4	-0,5	6	0,015	10
48	17	1600	4800	3	1	0	18	0,01	20
49	15	2000	1200	2	1	-0,6	4	0,012	6
50	12	3200	-	8	-	1,6	12	0,024	5
51	20	500	-	2	3	-0,8	4	0,01	18
52	28	2400	-	6	-	-1,4	14	0,02	14
53	18	300	900	3,2	2,8	-0,6	8	0,022	7
54	22	600	1800	1	2	2	4	0,01	12
55	13	3600	2400	10	5	1	24	0,02	20
56	30	600	1200	2	-	2	10	0,014	9
57	5	2400	1200	9	-	0,4	20	0,025	16
58	7	1500	-	5	-	-2	8	0,015	12
59	29	900	1800	9	-	2	18	0,03	16
60	27	2800	1200	4	-	-2	4	0,01	8

* Примечание. Знак «+» соответствует положительному направлению вектора скорости u_0 . Знак «-» - отрицательному направлению.

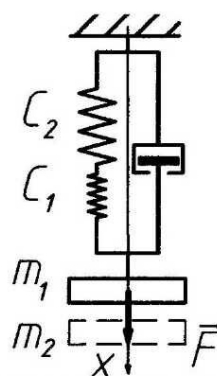




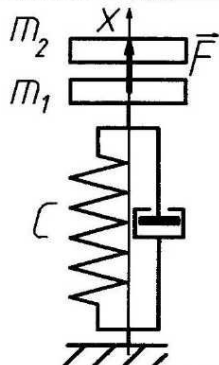
21



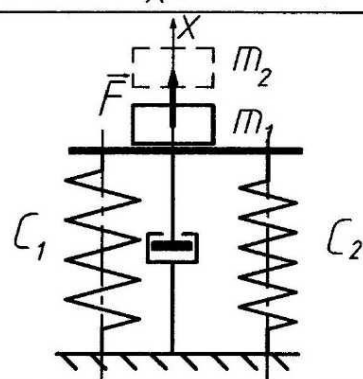
22



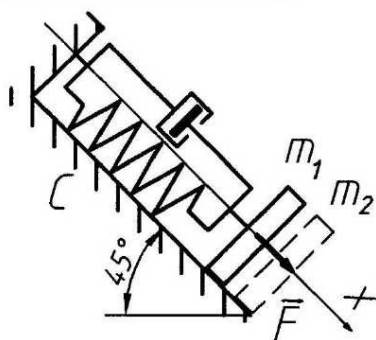
23



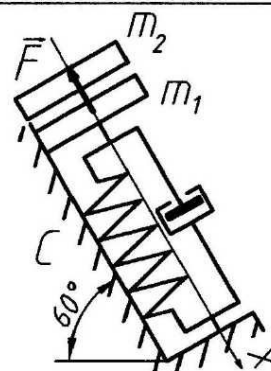
24



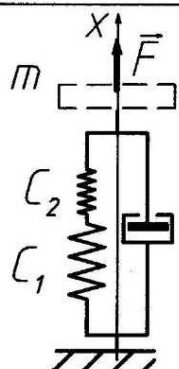
25



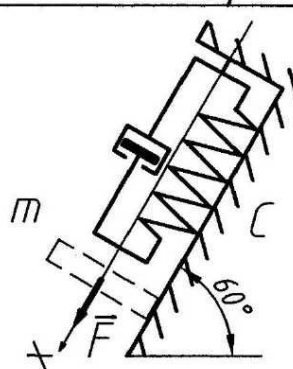
26



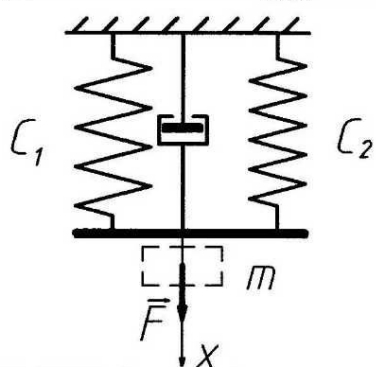
27



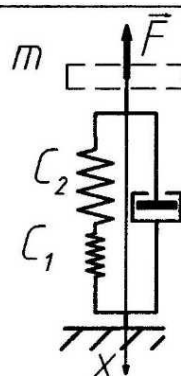
28



29



30

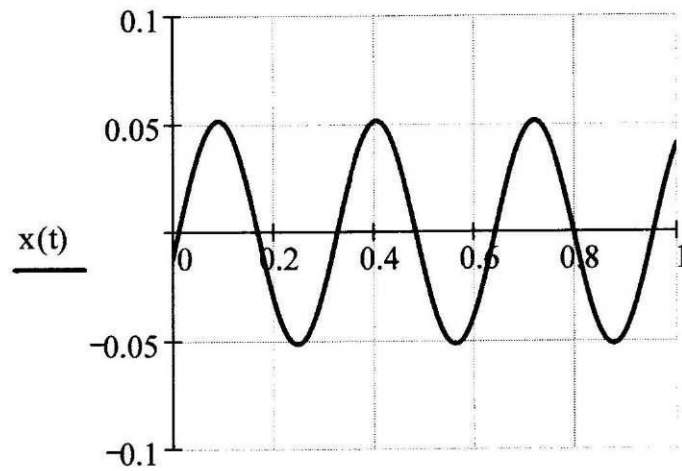


Свободные колебания

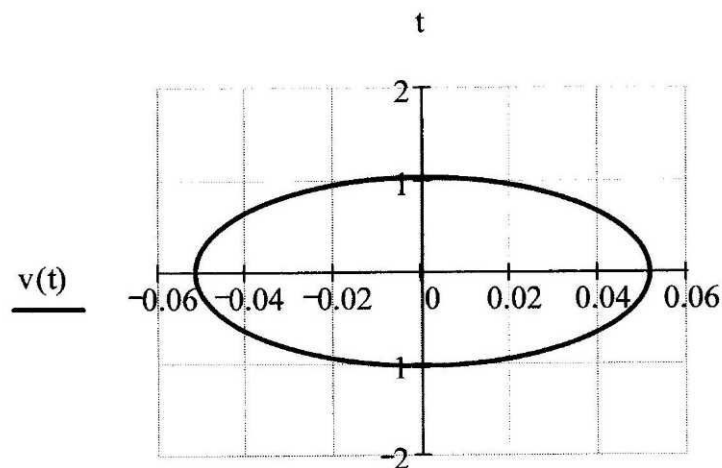
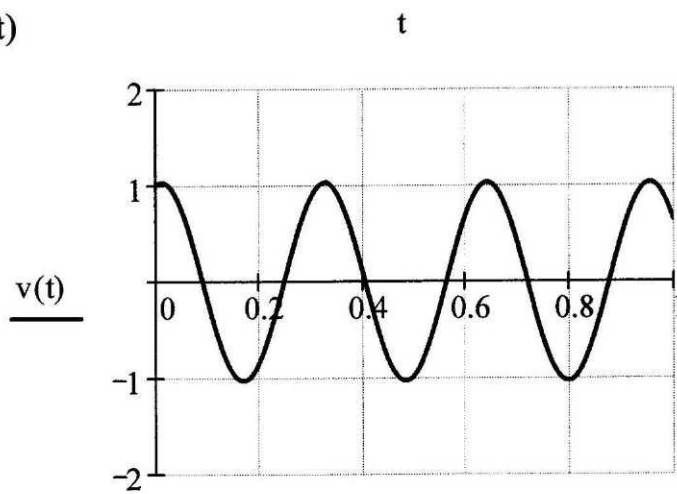
Пример построения графика колебаний материальной точки, графика изменения скорости с течением времени, фазового портрета движения

$$t := 0, 0.001 \dots 1$$

$$x(t) := -0.0123 \cdot \cos(20 \cdot t) + 0.05 \cdot \sin(20 \cdot t)$$



$$v(t) := \frac{d}{dt}x(t)$$

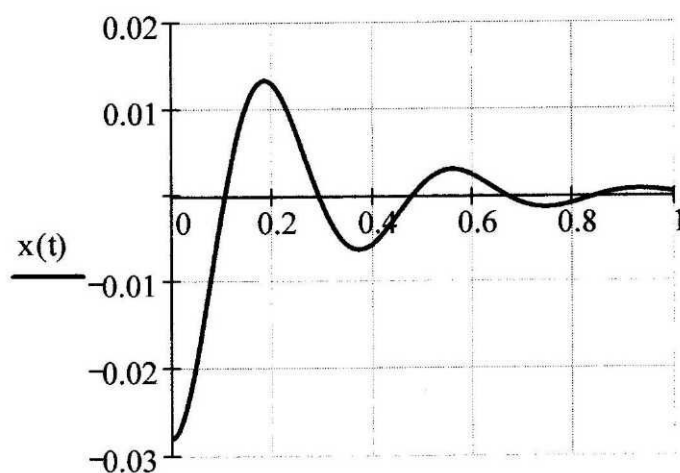


Затухающие колебания при наличии сил вязкого трения

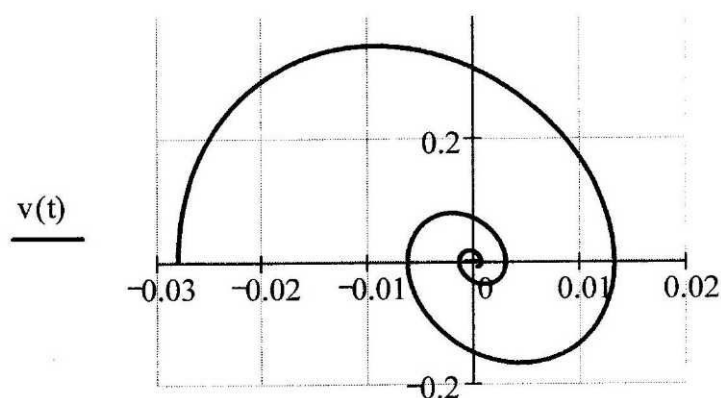
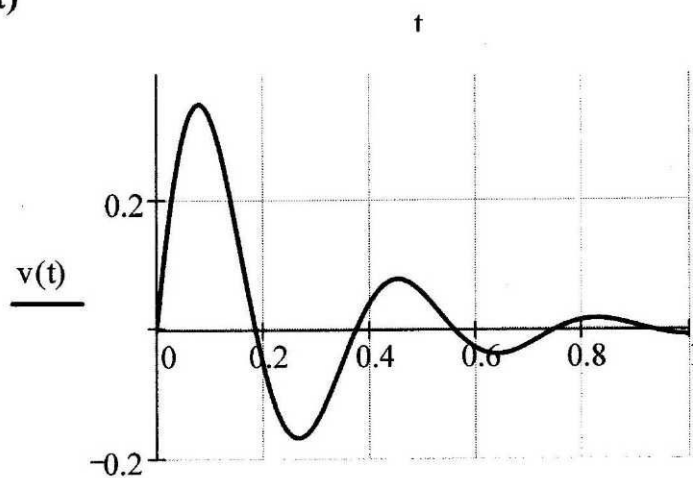
Пример построения графика колебаний материальной точки, графика изменения скорости с течением времени, фазового портрета движения

$$t := 0, 0.001 \dots 1$$

$$x(t) := e^{-4t} \cdot [(-0.028) \cdot \cos(16.85 \cdot t) - 0.0066 \cdot \sin(16.85 \cdot t)]$$



$$v(t) := \frac{d}{dt}x(t)$$

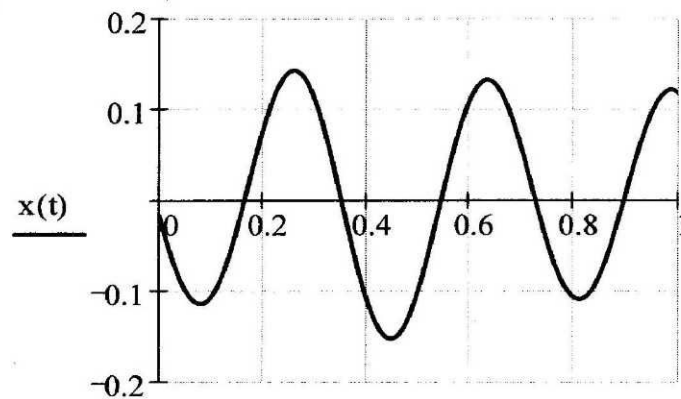


Приложение В

Вынужденные колебания без учета сил сопротивления движению
Пример построения графика колебаний материальной точки, графика
изменения скорости с течением времени, амплитудно-частотной хар-ки

$$t := 0, 0.001 \dots 1$$

$$x(t) := -0.0164 \cdot \cos(17.3 \cdot t) - 0.13 \cdot \sin(17.3 \cdot t) + 0.0225 \cdot \sin(10 \cdot t)$$



$$v(t) := \frac{d}{dt}x(t)$$

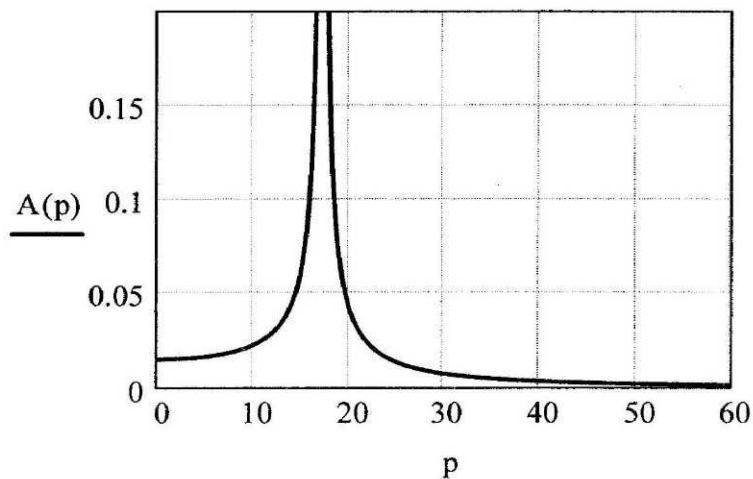
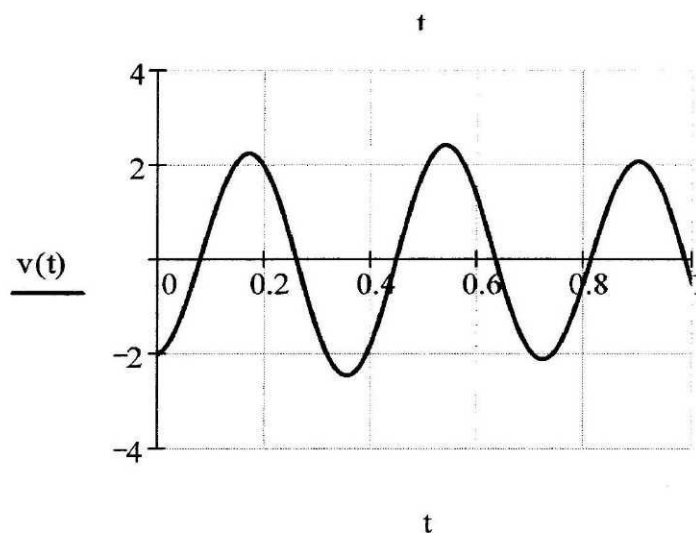
$$c := 300 \quad m := 1$$

$$k := \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$p := 0, 0.1 \dots 60$$

$$:= k^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{-2}$$

$$A(p) := \frac{q}{|k^2 - p^2|}$$

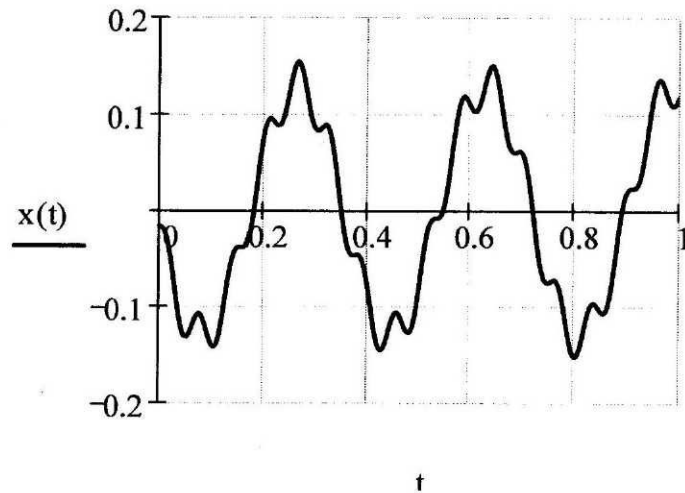


Приложение В

Вынужденные колебания без учета сил сопротивления движению
Пример построения графика колебаний материальной точки, графика
изменения скорости с течением времени, амплитудно-частотной хар-ки

$$t := 0, 0.001 \dots 1$$

$$x(t) := -0.0164 \cdot \cos(17.3 \cdot t) - 0.13 \cdot \sin(17.3 \cdot t) + 0.0225 \cdot \sin(100 \cdot t)$$



$$v(t) := \frac{d}{dt} x(t)$$

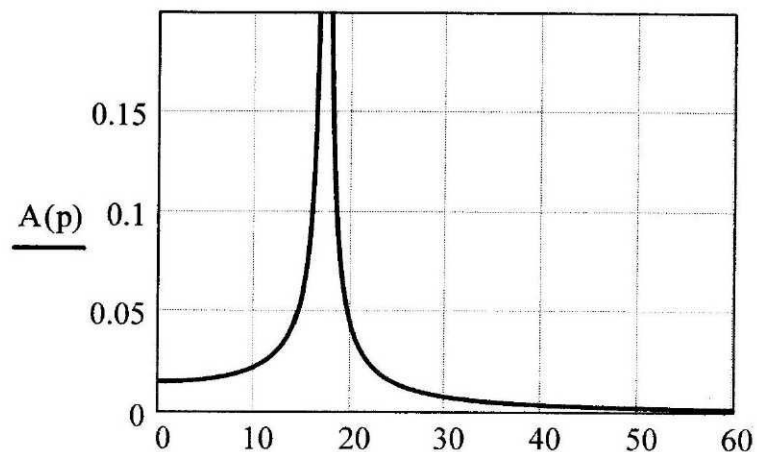
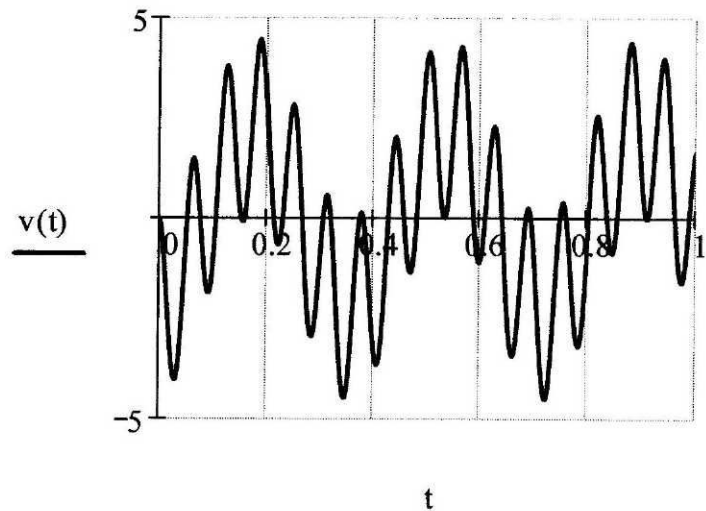
$$c := 300 \quad m := 1$$

$$k := \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$p := 0, 0.1 \dots 60$$

$$q := k^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{-2}$$

$$A(p) := \frac{q}{|k^2 - p^2|}$$



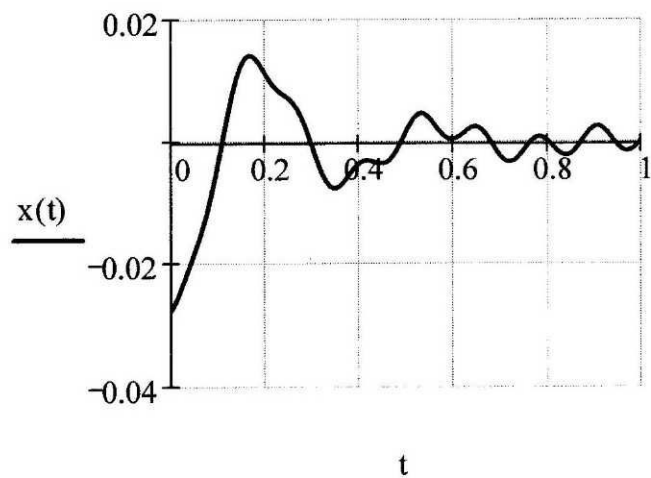
Приложение Г

Вынужденные колебания при наличии сил сопротивления движению
Пример построения графика колебаний материальной точки, графика
изменения скорости с течением времени, амплитудно-частотной хар-ки

$$t := 0, 0.001 \dots 1 \quad k := 17.3 \quad p := 50 \quad n := 4$$

$$q := k^2 \cdot 1.5 \cdot 10^{-2} \quad \beta := \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot n \cdot p}{k^2 - p^2}\right) \quad A := \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot p^2}}$$

$$x(t) := e^{-nt} \cdot [(-0.028) \cdot \cos(16.85 \cdot t) - 0.0066 \cdot \sin(16.85 \cdot t)] + A \cdot \sin(p \cdot t - \beta)$$

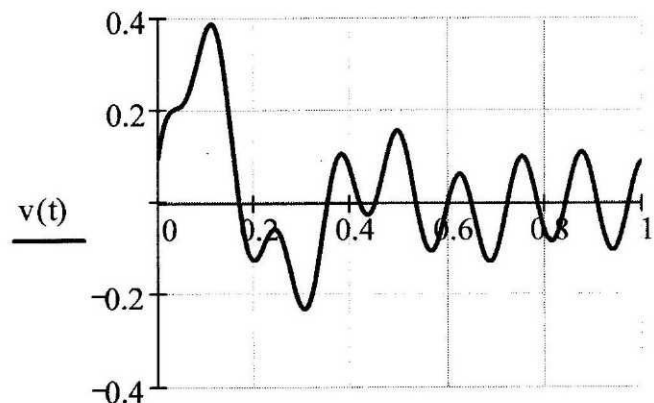


$$v(t) := \frac{d}{dt}x(t)$$

$$c := 300 \quad m := 1$$

$$k := \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$p := 0, 0.1 \dots 60$$



$$A(p) := \frac{q}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 \cdot n^2 \cdot p^2}}$$

