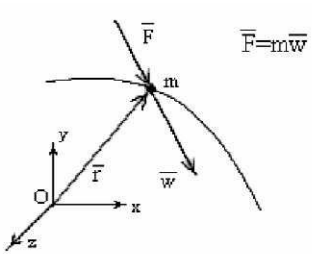
ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ
Учебно-методическое пособие

Содержание

§1. Динамика точки. Прямая и обратная задача

Второй закон Ньютона:



$$m\overline{w}=\overline{F}.$$

m – инертная масса точки;
$\overline{w}$ – ускорение;
$\overline{F}$ – сила.

Прямая задача динамики точки состоит в том, что по известному закону движения необходимо найти силу, вызвавшую это движение.

Обратная задача динамики точки состоит в том, что по известной силе необходимо найти закон движения точки.

Чтобы решить прямую и/или обратную задачу, необходимо записать второй закон Ньютона в проекциях на оси выбранной системы координат.

I. *Декартова прямоугольная система координат* $xOyz$.

$$\overline{r}=x\overline{i}+y\overline{j}+z\overline{k},$$

$$\overline{v}=\dot{x}\overline{i}+\dot{y}\overline{j}+\dot{z}\overline{k},$$

$$\overline{w}=\ddot{x}\overline{i}+\ddot{y}\overline{j}+\ddot{z}\overline{k},$$

где $\left.\begin{array}{l} x=x(t)\\ y=y(t)\\ z=z(t)\end{array}\right\}$ координаты точки.

$\overline{F}=F_x\overline{i}+F_y\overline{j}+F_z\overline{k}$ F_x, F_y, F_z – проекции вектора силы на оси Ox, Oy, Oz.

Так как сила в общем случае зависит от положения точки, скорости точки и времени, то

$$\begin{cases} m\ddot{x}=F_x(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\\ m\ddot{y}=F_y(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}),\\ m\ddot{z}=F_z(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z}). \end{cases} \qquad (1)$$

Это дифференциальные уравнения движения точки в декартовой системе координат.

II. *Цилиндрическая система координат* r, φ, z.

$\left.\begin{array}{l} r=r(t)\\ \varphi=\varphi(t)\\ z=z(t)\end{array}\right\}$ координаты точки.

$$\overline{v}=\frac{dr}{dt}\overline{r}^{o}+r\frac{d\varphi}{dt}\overline{\varphi}^{o}+\frac{dz}{dt}\overline{z}^{o}=\dot{r}\overline{r}^{o}+r\dot{\varphi}\overline{\varphi}^{o}+\dot{z}\overline{z}^{o},$$

$$\overline{w}=\left(\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)\overline{r}^o+\left(r\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\right)\overline{\varphi}^o+\frac{d^2z}{dt^2}\overline{z}^o.$$

F_r, F_φ, F_z – проекции вектора силы на оси $\overline{r}^o, \overline{\varphi}^o, \overline{z}^o$ цилиндрической системы координат.

$\overline{F}$ – зависит от положения, скорости, времени.

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\right)=F_r\left(t,r,\varphi,z,\dfrac{dr}{dt},\dfrac{d\varphi}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right), \\ m\left(r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}+2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt}\right)=F_\varphi\left(t,r,\varphi,z,\dfrac{dr}{dt},\dfrac{d\varphi}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right), \\ m\left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right)=F_z\left(t,r,\varphi,z,\dfrac{dr}{dt},\dfrac{d\varphi}{dt},\dfrac{dz}{dt}\right). \end{cases} \tag{2}$$

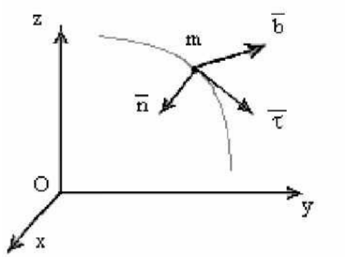
Это дифференциальные уравнения движения точки в цилиндрической системе координат

III. *Естественная система координат* $\overline{\tau}, \overline{n}, \overline{b}$.

$S=S(t)$ – дуговая координата.

$$\overline{v}=\frac{dS}{dt}\overline{\tau},$$

$$\overline{w}=\frac{d^2S}{dt^2}\overline{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\overline{n}+0\cdot\overline{b}.$$



F_τ, F_n, F_b – проекции вектора силы на оси естественного трехгранника.

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2S}{dt^2}=F_\tau\left(t,S,\dfrac{dS}{dt}\right), \\ m\dfrac{dS}{dt}\dfrac{1}{\rho}=F_n\left(t,S,\dfrac{dS}{dt}\right), \\ 0=F_b\left(t,S,\dfrac{dS}{dt}\right). \end{cases}$$

Это дифференциальные уравнения движения точки в осях естественного трехгранника.

§2. Момент инерции твердых тел

Моментом инерции J_z системы N материальных точек относительно оси z называется величина $J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2$. Момент инерции характеризует распределение масс материальных точек относительно этой оси.

r_k – расстояние от K-й точки до оси z. Момент инерции неотрицательная величина $J_z \geq 0$. Единицы измерения моментов инерции $\left[J_z\right] = кг \cdot м^2$ в СИ, $\left[J_z\right] = кг \cdot м \cdot с^2$ в технической системе единиц.

Для абсолютно твердого тела (АТТ)

$$J_z = \int\limits_{(M)} r^2 dm = \int\limits_{(V)} \rho(x,y,z) r^2 dv = \left(\underbrace{\rho = const = \frac{M}{V}}_{ЕСЛИ} \right) = \frac{M}{V} \int\limits_{(V)} r^2 dv,$$

где M – масса,

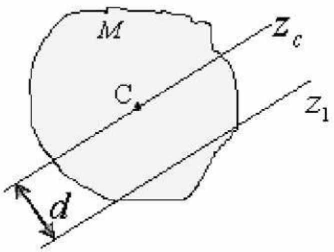
V – объем,

dv – элемент объема,

$\rho = \dfrac{M}{V}$ – плотность постоянная.

Теорема Штейнера (Гюйгенса):

$$J_{z_1} = J_{z_c} + Md^2.$$



M – масса тела,

z_c – ось, проходящая через центр масс,

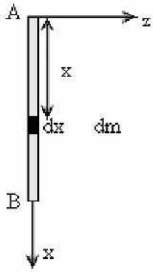
z_1 – ось параллельная z_c,

d – расстояние между осями.

Радиус инерции R относительно оси z – величина, удовлетворяющая равенству: $J_z = MR^2$.

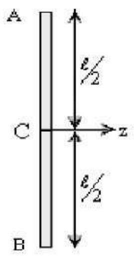
Центром масс системы N материальных точек (центром тяжести для однородного поля тяжести) называется точка C, радиус которой определяется формулой: $\bar{r}_C = \dfrac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + \cdots + m_N\bar{r}_N}{m_1 + m_2 + \cdots + m_N}$.

Задача 1. *Тонкий однородный стержень длиной ℓ и массой M. Вычислим момент инерции относительно оси z, перпендикулярной стержню и проходящей через конец A.*



$$J_z = \int_{(V)} \rho r^2 dv = \rho \int_{(V)} r^2 dv = \rho \int_0^{\ell} x^2 dx = \rho \frac{x^3}{3}\Bigg|_0^{\ell} = \rho \frac{\ell^3}{3} = \frac{M}{\ell}\frac{\ell^3}{3} = \frac{M\ell^2}{3},$$

т. к. $\rho = const = \dfrac{M}{\ell}$ – линейная плотность (масса единицы длины стержня). $r = x$; $dv = dx$ $(V) = \ell$.



Момент инерции относительно оси, перпендикулярной стрежню и проходящей через центр масс.

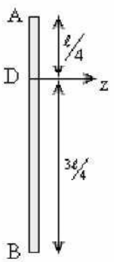
$$J_{z_C} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \rho x^2 dx = \frac{M}{\ell}\left(\frac{\ell^3}{3}\right)\Bigg|_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{M}{\ell}\left(\frac{\ell^3}{8\cdot 3} + \frac{\ell^3}{8\cdot 3}\right) = \frac{M\ell^2}{12}$$

и/или по теореме Штейнера:

$$J_{z_C} = J_{z_A} - Md^2 = \frac{M\ell^2}{3} - M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{M\ell^2}{3} - \frac{M\ell^2}{4} = \frac{M\ell^2}{12}.$$

Радиус инерции в первом случае $R^2 = \dfrac{\ell^2}{3} \Rightarrow R = \dfrac{\ell}{\sqrt{3}}$.

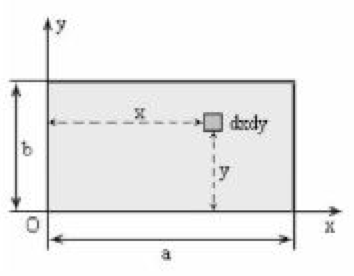
Радиус инерции во втором случае $R^2 = \dfrac{\ell^2}{12} \Rightarrow R = \dfrac{\ell}{2\sqrt{3}}$.



Момент инерции относительно оси, перпендикулярной стрежню и проходящей через точку D.

$$J_z = \frac{M\ell^2}{3} - M\left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = \frac{16M\ell^2}{48} - \frac{3M\ell^2}{48} = \frac{13M\ell^2}{48}.$$

Задача 2. *Однородная прямоугольная пластина размерами* $a \times b$ *и массой* M *. Вычислить момент инерции относительно оси Ox.*



Элементарная площадка $dS = dxdy$ обладает массой dm.

Плотность в плоском случае $\rho = const = \dfrac{M}{S} = \dfrac{M}{ab}$ – масса единицы площади.

$r = y$ – расстояние до оси x.

$dv = dS = dxdy$ – элементарный объем.

$V = S$ – объем ~ площадь.

$$J_x = \int\limits_{(M)} r^2 dm = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dv = \int\limits_{(S)} \rho y^2 dS = \rho \int\limits_{(S)} y^2 dS = \frac{M}{ab}\int\limits_0^a\int\limits_0^b y^2 dy dx = \frac{M}{ab}\int\limits_0^a\left(\int\limits_0^b y^2 dy\right)dx =$$

$$= \frac{M}{ab}\int\limits_0^a\left(\frac{y^3}{3}\Bigg|_0^b\right)dx = \frac{M}{ab}\int\limits_0^a \frac{b^3}{3}dx = \frac{M}{ab}\frac{b^3}{3}\int\limits_0^a dx = \frac{M}{a}\frac{b^2}{3}(x)\Bigg|_0^a = \frac{Mb^2}{3a}\cdot a = \frac{Mb^2}{3}$$ –

момент инерции относительно оси Ox, совпадающей со стороной пластинки.

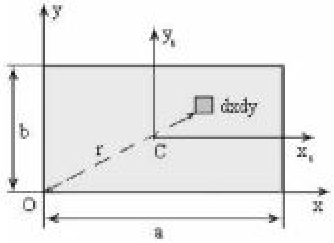
Аналогично можно вычислить момент инерции относительно оси Oy $J_y = \dfrac{Ma^2}{3}$.

Вычислить полярный момент J_o *– момент инерции относительно полюса O (оси, проходящей через полюс O перпендикулярно плоскости пластины).*

$$J_o = \int\limits_{(V)} \rho r^2 dv = \int\limits_0^a\int\limits_0^b \rho(x^2 + y^2) dy dx =$$

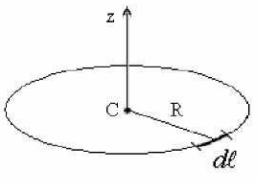
$$= \frac{M}{ab}\left[\int\limits_0^a\int\limits_0^b (x^2 + y^2) dy dx\right] = J_x + J_y = \frac{M}{3}(a^2 + b^2),$$

где r – расстояние от dv до полюса.



Самостоятельно вычислите J_{x_1}, J_{y_1}, J_c моменты инерции относительно осей проходящих через центр масс, и полярный момент инерции относительно центра C.

Задача 3. *Тонкое круглое однородное кольцо радиусом R и массой M. Вычислить J_z – момент инерции относительно оси Cz, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр*

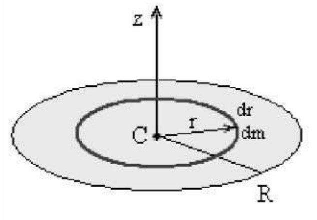


Разделим кольцо на элементарные отрезки длиной dl и массой dm_i. Расстояние от каждого такого отрезка до оси равно радиусу кольца $R_i=R$, тогда получим

$$J_z = J_c = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} R_i^2 dm_i = R^2 \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} dm_i = R^2 M.$$

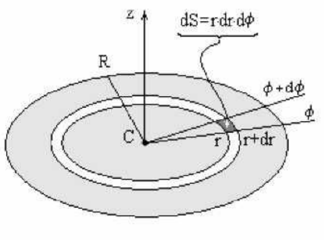
Радиус инерции кольца равен радиусу кольца (для оси z). Это верно и для тонкой цилиндрической оболочки массой M и радиусом R относительно ее оси.

Круглая однородная пластина (и/или цилиндр) радиусом R и массой M. Вычислить J_z – момент инерции относительно оси Cz перпендикулярной плоскости пластины и проходящей через ее центр.



Площадь выделенного элементарного кольца радиуса r и ширина dr равна $dS = 2\pi r dr$, а масса $dm = \rho 2\pi r dr$, где $\rho = \dfrac{M}{\pi R^2}$ – масса единицы площади пластины.

Тогда, применяя формулу для кольца $J_z = R^2 M$, получим для выделенного элементарного кольца $dJ_c = r^2 dm = 2\pi\rho r^3 dr$, а для всей пластины $J_c = J_z = 2\pi\rho\int_0^R r^3 dr = \pi\rho\dfrac{R^4}{2} = \dfrac{MR^2}{2}$ или используя двойной интеграл.



Так как $dS = dxdy = rdrd\varphi$, то, переходя к цилиндрическим координатам, получим.

$$J_z = \int_{(V)} \rho r^2 dv = \frac{M}{\pi R^2}\int_{(S)} r^2 ds =$$

$$= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2 r d\phi\, dr = \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R\left(\int_0^{2\pi} r^3 d\phi\right) dr =$$

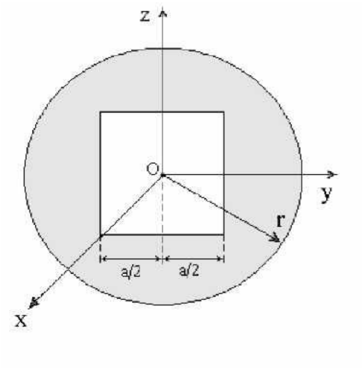
$$= \frac{M}{\pi R^2}\int_0^R r^3 2\pi\, dr = \frac{MR^2}{2}.$$

Задача 4. *Вычислить моменты инерции относительно осей координат* x, y, z *тонкой однородной круговой пластины радиуса* r, *внутри которой вырезан квадрат со стороной* a, *центры квадрата и круга совпадают.* M *–- масса пластины с вырезом.*

$J_x = J_x^{(1)} - J_x^{(2)}$,

где $J_x^{(1)}$ – момент инерции круга,

$J_x^{(2)}$ – момент инерции квадрата.



Определите J_Y, J_Z самостоятельно.

$$J_x^{(1)} = \frac{M^{(1)} r^2}{2}, \qquad J_x^{(2)} = \frac{M^{(2)} a^2}{6}.$$

Найдем массы круга и квадрата $M^{(1)}, M^{(2)}$ через M :

$$M = M^{(1)} - M^{(2)} = M^{(1)} - M^{(1)} \frac{a^2}{\pi r^2} =$$

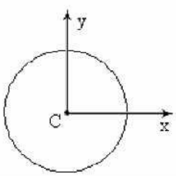
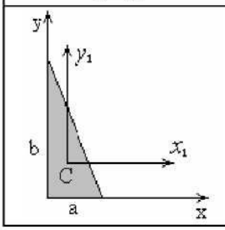
$$= M^{(1)} (1 - \frac{a^2}{\pi r^2}),$$

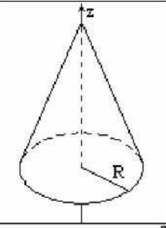
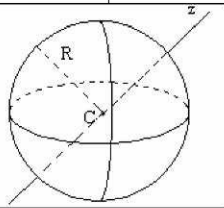
$$M^{(1)} = \frac{\pi r^2}{\pi r^2 - a^2} M,$$

$$M^{(2)} = M^{(1)} \frac{a^2}{\pi r^2} = \frac{a^2}{\pi r^2 - a^2} M,$$

$$J_x = \frac{3\pi r^4 - a^4}{6(\pi r^2 - a^2)} M.$$

Ещё несколько задач для самостоятельного решения:

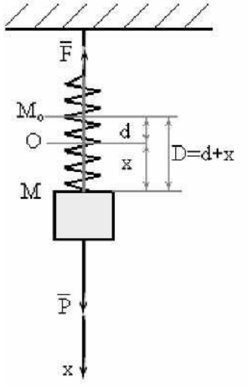
	Найти осевые моменты инерции J_x, J_y для однородного тонкого круглого диска радиуса R и массой M . Оси *Cx* и *Cy* проходят через центр диска и лежат в его плоскости.
	Найти J_x, J_y для треугольной пластины с катетами a и b и массой M , а также J_{x_1}, J_{y_1} .Точка С – центр масс треугольника.

	Прямой сплошной круглый конус массой M и радиусом основания R. Ось z направлена вдоль оси симметрии. Ответ $J_z = 0{,}3MR^2$.
	Сплошной шар массой M и радиусом R ось z направлена вдоль диаметра. Ответ $J_z = 0{,}4MR^2$.

§3. Колебательное движение.
Свободные колебания материальной точки

Задача № 1. *Груз весом P = 98 н подвешен к концу пружины, находившейся в начальный момент в покое в недеформированном состоянии, и отпущен без толчка. Найти уравнение колебания груза, если известно, что для деформации пружины на 1 см надо приложить к ней силу, модуль которой равен 14,4 н.*

Решение: Направим ось x по вертикали вниз. Точка O – начало отсчета в положении статического равновесия груза. В начальный момент груз подвешен к концу M_0 недеформированной пружины. В положении статического равновесия к грузу приложены силы: P – его вес, направленный по вертикали вниз, статическая сила упругости $F_{cm}=cd$, направленная вверх. Из условия равновесия груза следует: $P - F_{cm} = 0$ или $P - cd = 0$, откуда найдем $d=P/c$ – статическую деформацию пружины, c – коэффициент упругости пружины.



Начальные условия движения груза:

При $t = 0$: $x = x_0 = -\dfrac{P}{c}$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$,

$|\overline{F}| = cD$, где F – сила упругости, (направлена всегда противоположно смещению); D – смещение конца пружины из ненапряженного состояния, т. е. $D_x = MM_0 = d + x$.

Следовательно, $F_x = -c(d + x)$. (1)

Составим уравнение движения груза в проекции на ось x:

$$m\ddot{x} = P + F_x\,, \tag{2}$$

используя (1), получим из (2):

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = P - cd - cx\,. \tag{3}$$

Запишем дифференциальное уравнение (3) в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = 0\,, \tag{4}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{cg}{P}}$ – круговая частота колебаний (угловая частота).

Запишем характеристическое уравнение для (4) $\lambda^2 + k^2 = 0$.

Корни уравнения $\lambda_{1,2} = \pm ki$.

Решение уравнения (4) запишем в виде

$$x = c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt)\,. \tag{5}$$

Для определения постоянных интегрирования, вычислим скорость

$$\dot{x} = -c_1 k\sin(kt) + c_2 k\cos(kt)\,. \tag{6}$$

Подставим (5) и (6) в начальные условия $t = 0$ $x = x_0 = -\dfrac{P}{c}$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

Находим $c_1 = x_0 = -\dfrac{P}{c}$, $c_2 = 0$.

Уравнения движения груза примет вид $x = -\dfrac{P}{c}\cos(kt) = -\dfrac{P}{c}\cos(\sqrt{\dfrac{cg}{P}}t)$.

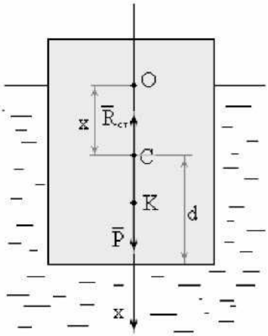
Подставляем численные значения $k = \sqrt{\dfrac{cg}{P}} = 12\ c^{-1}$, $\dfrac{P}{c} = 6{,}8\ см$.

Амплитуда колебаний $a = 6{,}8\ см$;
начальная фаза колебаний $\alpha = -\pi/2$;
круговая частота $k = 12\ c^{-1}$.

Период колебаний груза определяется по формуле $T = \dfrac{2\pi}{k} = 0.52\ c$.

Задача № 2. *Найти уравнение свободных вертикальных колебаний судна весом P в спокойной воде. Площадь его сечения на уровне свободной поверхности воды считать не зависящей от колебаний и равной S. В начальный момент центру тяжести C, находившемуся в положении статического равновесия, была сообщена вертикально вниз скорость v_0. Вязкостью воды пренебречь. Удельный вес воды равен γ= 1 Т/м^3.*

Решение.



Направим ось x вертикально вниз; точка O – начало отсчета в положении равновесия центра тяжести C судна. При этом высота подводной части судна равна d.

К судну приложены: P – вес в центре тяжести C судна, $R_{ст}$ – нормальная статическая реакция воды в центре тяжести K объема воды, вытесненной судном.

Модуль $R_{ст}$ равен весу объема V воды, вытесненной судном, т.е. $R_{cm} = \gamma \cdot V = \gamma \cdot S \cdot d$, следовательно, условие статического равновесия имеет вид

$$P - \gamma S d = 0. \qquad (7)$$

Начальные условия движения центра тяжести C

$$\text{при } t = 0: \quad x = 0, \quad \dot{x} = v_0. \qquad (8)$$

Из-за наличия начальной скорости v_0 судно начинает двигаться вертикально вниз. Объем воды, вытесненной судном, равен $S(d + x)$. Значит, проекция на ось x нормальной реакции R равна

$$R_x = -\gamma S (d + x). \qquad (9)$$

Составим дифференциальное уравнение движения центра тяжести C в проекции на ось x $\qquad m\ddot{x} = P_x + R_x$.

Так как $P=P_x$, используя уравнения (1) и (3), получим $\qquad \dfrac{P}{g}\ddot{x} = -\gamma S x$.

Запишем уравнение свободных колебаний в каноническом виде:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \qquad (10)$$

где $\sqrt{\dfrac{g\gamma S}{P}} = k$ – круговая частота.

Запишем искомое решение уравнения (4) в виде

$$x = a\sin(kt+\alpha)\,, \tag{11}$$

где $a = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{k^2}}$ – амплитуда колебаний, $\alpha = arctg\frac{kx_0}{\dot{x}_0}$ – начальная фаза.

Используя начальные условия (2), найдем амплитуду и начальную фазу:

$$a = \frac{v_0}{k} = v_0\sqrt{\frac{P}{gS\gamma}}\,,\quad \alpha = 0\,. \tag{12}$$

Используя (6),(7) и (5), окончательно получим

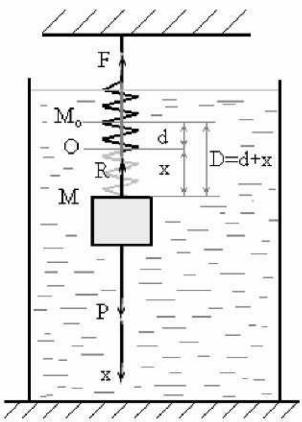
$$x = v_0\sqrt{\frac{P}{gS\gamma}}\sin\left(\sqrt{\frac{gS\gamma}{P}}t\right). \tag{13}$$

Период колебаний равен $T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{P}{gs\gamma}}$.

§4. Затухающие колебания

Задача № 1. *Груз весом P = 98 Н, подвешенный к концу пружины, движется в жидкости. Коэффициент жесткости пружины c=10 Н/см. Сила сопротивления движению пропорциональна первой степени скорости груза: R=βυ, где β=1,6 Нс/см. Найти уравнение движения груза, если в начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия вниз на 4 см и ему была сообщена вниз начальная скорость υ_0=4 см/с.*

Решение.



Направим ось x вертикально вниз по пружине, начало отсчета возьмем в положении статического равновесия.

Начальные условия движения груза:

$$t = 0,\quad x = x_0 = 4\ см,$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0 = 4\ см/с.$$

Изобразим груз в положении, когда пружина получит удлинение

$D = d + x.$

Сила упругости пружины, направленная вертикально вверх, равна

$$F_x = -c(d+x)\,. \tag{1}$$

Составим дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\ddot{x} = P + F_x + R_x\,.$$

Подставим в уравнение значения F_x и R_x:

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = P - cd - cx - \beta \upsilon_x \,. \tag{2}$$

В положении статического равновесия к грузу приложены силы: P – его вес, направленный по вертикали вниз, статическая сила упругости $F_{cm}=cd$, направленная вверх. Так как груз находится в равновесии, то

$$P - cd = 0\,. \tag{3}$$

Перепишем уравнение (2) в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = 0\,, \tag{4}$$

где $\upsilon_x = \dot{x}, \quad k = \sqrt{\dfrac{cg}{P}}, \quad n = \dfrac{\beta g}{2P}$, получаем k = *10* c^{-1}, n = *8* c^{-1}, таким образом, $n < k$.

Запишем характеристическое уравнение для (4):

$$\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0, \quad \lambda_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2} = -n \pm i\sqrt{k^2 - n^2}\,.$$

Следовательно, уравнение движения груза имеет вид

$$x = e^{-nt}\left(c_1 \cos(\sqrt{k^2 - n^2}\,t) + c_2 \sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t)\right). \tag{5}$$

Используя начальные условия, получаем постоянные интегрирования

$$c_1 = x_0\,, \quad c_2 = \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}}\,.$$

Преобразуем полученное уравнение, определяя

$$x_0 = A\sin\alpha, \quad \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{\sqrt{k^2 - n^2}} = A\cos\alpha\,. \tag{6}$$

Теперь уравнение примет вид

$$x = Ae^{-nt}\sin(\sqrt{k^2 - n^2}\,t + \alpha)\,. \tag{7}$$

Движение груза является затухающим (т.к. при $t\to\infty$ $x\to 0$) с круговой частотой $k_c = \sqrt{k^2 - n^2}$. Подставив численные значения в формулы, находим $A=7{,}2$ *см*, $\alpha=0{,}59$ *рад*, $k_c=6$ c^{-1}.

Итак, груз совершает затухающие колебания по закону

$$x = 7{,}2e^{-8t}\sin(6t + 0{,}59)\ \text{см}\,. \tag{8}$$

Период колебаний равен $T_c = \dfrac{2\pi}{k_c} = 1{,}05\ c$.

Задача № 2. *Решить предыдущую задачу в предположении, что сила сопротивления движению равна $R=\beta\upsilon$, где $\beta=5{,}2$ Нс/см. В начальный момент груз был смещен из положения статического равновесия на 4 см, и ему была сообщена вверх начальная скорость $\upsilon_0=240$ см/с.*

Решение. Направим ось x вертикально вниз по пружине, начало отсчета возьмем в положении статического равновесия. В данном случае начальные условия движения груза имеют вид при $t=0 \begin{cases} x = x_0 = 4\ см \\ \dot{x} = \dot{x}_0 = -240\ см/с \end{cases}$.

Следуя решению предыдущей задачи, получим дифференциальное уравнение движения груза

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + kx = 0, \text{ где } \upsilon_x = \dot{x}, \quad k = \sqrt{\frac{cg}{P}}, \quad n = \frac{\beta g}{2P}.$$

Подставив численные значения, получаем $k=10\ c^{-1}$, $n=26\ c^{-1}$, таким образом, $n>k$ (случай большого сопротивления).

Запишем характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2n\lambda + k^2 = 0$, его корни равны $\lambda_1 = -n - \sqrt{n^2-k^2}$, $\lambda_2 = -n + \sqrt{k^2 - n^2}$.

Так как $n > k$, то корни λ_1 и λ_2 являются вещественными и отрицательными. Уравнение движения груза имеет вид

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{9}$$

Используя начальные условия, найдем постоянные интегрирования:

$$c_1 = -\frac{\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad c_2 = \frac{\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

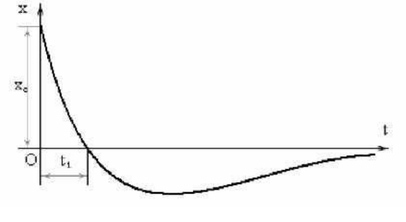
Перепишем уравнение (1) с учетом найденных значений:

$$x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\left[(\lambda_1 x_0 - \dot{x}_0)e^{\lambda_2 t} - (\lambda_2 x_0 - \dot{x}_0)e^{\lambda_1 t}\right]. \tag{10}$$

Воспользовавшись значениями λ_1 и λ_2 и гиперболическими функциями, запишем уравнение (2) в виде

$$x = \frac{e^{-nt}}{\sqrt{n^2-k^2}}\left[(\dot{x}_0 + nx_0)sh\sqrt{n^2-k^2} + x_0\sqrt{n^2-k^2}\,ch\sqrt{n^2-k^2}\,t\right]. \tag{11}$$

Движение груза является апериодическим и притом затухающим, т. к. при $t\to\infty$ $x\to 0$.



Подставим в (3) численные значения, получим $x = \frac{1}{6}e^{-26t}(29e^{-24t} - 5e^{24t})$

или $x = \frac{1}{3}e^{-26t}(12ch24t - 17sh24t)$

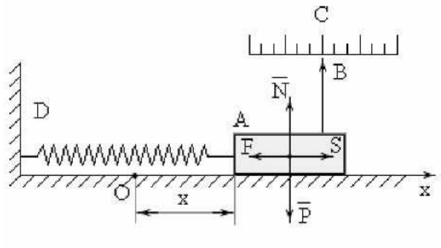
Выясним, переходит ли груз положение статического равновесия:

$\frac{1}{6}e^{-26t}(29e^{-24t} - 5e^{24t}) = 0$. Вычисляя, получаем t_1=0,037 с, $t_2=\infty$.

Значение t_1 соответствует переходу груза через положение статического равновесия, t_2 соответствует затуханию движения. Итак, в данной задаче груз проходит один раз через положение статического равновесия и затем асимптотически к нему приближается с другой стороны.

§5. Вынужденные колебания

Задача № 1. *На рисунке изображена схема прибора для измерения давления. К ползуну A весом P=196 Г прикреплена стрелка B, отмечающая показания на неподвижной шкале C. Ползун A, прикрепленный к концу пружины D, перемещается по горизонтальной идеально гладкой плоскости. К ползуну приложена горизонтальная сила S = H·sin(pt), где H = 1,6 кГ, p = 60 c^{-1}. Коэффициент упругости равен c = 2 кГ/см. В начальный момент ползун находился в покое, в положении статического равновесия.*



Определить:

1) *уравнение движения стрелки B в случае отсутствия силы сопротивления;*
2) *уравнение движения стрелки B при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости ползуна R=βυ, где β=25,6 Г с/см.*

Решение. Направим ось x по горизонтали вправо, взяв начало отсчета в положении ползуна, соответствующем недеформированной пружине.

Начальные условия движения ползуна: при $t = 0 \quad x = 0, \dot{x} = 0$.

Изобразим ползун смещенным из положения равновесия вправо на x. При этом пружина растянется на D = x. К ползуну приложены силы: P – вес ползуна, N – нормальная реакция, сила S, сила упругости растянутой пружины F.

Составим дифференциальное уравнение движения ползуна в проекции на x:

$$m\ddot{x} = S_x + F_x \quad \text{или} \quad \ddot{x} = \frac{Hg}{P}\sin pt - \frac{cg}{P}x \text{, откуда}$$

$$\ddot{x} + k^2 x = k\sin pt, \tag{1}$$

где $k = \sqrt{\dfrac{cg}{P}}, \quad h = \dfrac{hg}{P}$. В данном случае k=100 c^{-1}, h=8000 $см/c^{-2}$.

Решая (1), найдем общее решение однородного уравнения в виде

$$x_1 = c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt)\,. \tag{2}$$

Частное решение уравнения (1) примем в виде $x_2 = A\sin(pt) + B\cos(pt)$, тогда

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt)\,. \tag{3}$$

Запишем общее решение уравнения (1), сложив (2) и (3):

$$x = c_1\cos(kt) + c_2\sin(kt) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt)\,. \tag{4}$$

Используя начальные условия, определим постоянные интегрирования:

$$c_1 = 0, \quad c_2 = -\frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2}\,.$$

Итак, уравнение движение стрелки

$$x = -\frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2}\sin(kt) + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin(pt)\,. \tag{5}$$

Подставив численные значения, получим

$$x = (-0{,}75\sin(100t) + 1{,}25\sin(60t))\ см\,. \tag{6}$$

Решим эту задачу с учетом силы сопротивления движению. К силам, ранее приложенным к ползуну, добавляется сила сопротивления движению R, направленная в сторону, противоположную скорости движения. $m\ddot{x} = S_x + F_x + R_x$ или $\ddot{x} = \frac{Hg}{P}\sin pt - \frac{cg}{P}x - \frac{\beta g}{P}\dot{x}$, откуда

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = k\sin pt, \tag{7}$$

где $k = \sqrt{\frac{cg}{P}}, \quad n = \frac{\beta g}{2P}, \quad h = \frac{hg}{P}$. В данном случае $k = 100\ с^{-1}$, $h = 80\ см\ с^{-2}$, $n = 64\ с^{-1}$, $p = 60\ с^{-1}$. Итак, $n < k$ и $p < k$.

$$\sqrt{k^2 - n^2} = 76{,}8 \quad a = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2p^2}} = 0{,}8 \quad \varepsilon = arctg\frac{2np}{k^2 - p^2} = 0{,}87\,.$$

А следовательно, выбирая частное решение в виде $x_2 = a\sin(pt - \varepsilon)$, получим

$$x = e^{-64t}(c_1\cos 76{,}8t + c_2\sin 76{,}8t) + 0{,}8\sin(60t - 0{,}87). \tag{8}$$

Используя начальные условия, определим постоянные интегрирования: $c_1 = 0{,}62$; $c_2 = 0{,}12$. Перепишем формулу (9):

$$x = e^{-64t}(0{,}62\cos 76{,}8t + 0{,}12\sin 76{,}8t) + 0{,}8\sin(60t - 0{,}87). \tag{9}$$

Введем обозначение: $0{,}62 = b\sin\alpha$; $0{,}12 = b\cos\alpha$, получим $b = 0{,}63$, $\alpha = 1{,}74$.

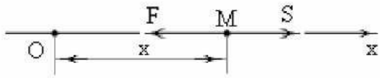
Итак, уравнение движения ползуна А и стрелки В имеет вид:

$$x = \left[0{,}63e^{-64t}\sin(76{,}8t + 1{,}74) + 0{,}8\sin(60t - 0{,}87)\right] см. \tag{10}$$

Первое слагаемое уравнения определят колебание стрелки с частотой свободных колебаний, которые быстро затухают благодаря наличию множителя e^{-64t}. Второе слагаемое уравнения определяет вынужденные колебания стрелки В.

§6. Резонанс

Задача № 1. *Определить уравнение движения материальной точки М весом Р=196 Г, движущейся вдоль оси x под действием силы упругости F и возмущающей силы S. Проекции этих сил на ось x равны:* $F_x = -cx$, $S_x = H\cdot\sin(pt)$, *где* $c = 2$ *кГ/см,* $H = 1{,}6$ *кГ,* $p = 101\ c^{-1}$. *В начальный момент точка находилась в покое в начале отсчета оси x. Силой сопротивления движению пренебречь.*



Решение. Запишем дифференциальное уравнение движения точки М в проекции на ось x $m\ddot{x} = F_x + S_x$ или $m\ddot{x} = -cx + H\sin pt$

$$\ddot{x} + k^2 x = h\sin pt\,, \tag{1}$$

где $k^2 = \dfrac{c}{m} = 10000\ c^{-1}$, $\quad p = 101\ c^{-1}$, $\quad h = \dfrac{H}{m} = 8000\ см/c^2$..

В данном случае колебания происходят вблизи резонанса (резонанс имеет место при p=k) в зоне вынужденных колебаний большой частоты (p>k).

Значит, решение принимает вид

$$x = -\frac{p}{k}\frac{h}{k^2 - p^2}\sin kt + \frac{h}{k^2 - p^2}\sin pt\,. \tag{2}$$

Как следует из уравнения, искомое движение является результатом наложения двух гармонических колебаний, происходящих с почти равными круговыми частотами свободных k и вынужденных p колебаний. Т. к. $k \approx p$, то будем считать

$$\frac{p}{k} \approx 1, \quad p + k \approx 2k \approx 2p. \tag{3}$$

Используя первое соотношение (3), перепишем уравнение (2), $x \approx \dfrac{h}{(k-p)(k+p)}(\sin pt - \sin kt)$.

Используя второе соотношение (3), перепишем уравнение:

$$x = \frac{h}{2k(k-p)}(\sin pt - \sin kt)\,. \tag{4}$$

Преобразовав выражение, получим

$$x = a(t)\cos pt\,, \tag{5}$$

где $a(t)=\dfrac{h}{k(k-p)}\sin\dfrac{p-k}{2}t$. При $k \approx p$ $a(t)$ является медленно изменяющейся периодической функцией с периодом

$$T_a=\frac{4\pi}{|p-k|}. \qquad (6)$$

Как следует из уравнения (5), движение происходит с круговой частотой p, поэтому период колебаний равен

$$T=\frac{2\pi}{p}. \qquad (7)$$

Так как $k \approx p$, то $T_a >> T$, причем $\dfrac{T_a}{T}=\dfrac{2p}{|p-k|}$.

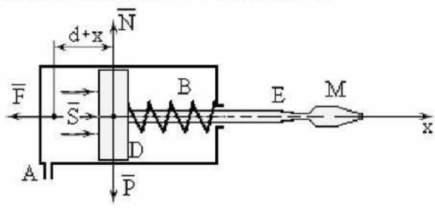
Подставляя численные значения, получим

$$x=a(t)\cos(101\cdot t), \quad \text{где} \quad a(t)=-80\sin\frac{t}{2} \quad T_a=12{,}56\ c, \quad T=0{,}063\ c.$$

Задача № 2. *Пневматический отбойный молоток приводится в движение сжатым воздухом, поступающим в корпус молотка через шланг A. Давление воздуха, приложенное к поршню D молотка, изменяется согласно уравнению*

$$S=H_0+H_1\cos(pt)+H_3\cos(3pt),$$

где p, H_0, H_1, H_3 – постоянные величины. В корпус молотка вмонтирована пружина B с коэффициентом жесткости c. Пружина упирается левым концом в поршень, а правым – в корпус молотка. Поршень D соединен штоком E с бойком M.



Определить уравнение вынужденных колебаний поршня при работе молотка вхолостую. Массой штока E, бойка M и пружины B, а также силой сопротивления пренебречь.

Решение.

Направим ось x по горизонтали направо, взяв начало отсчета в положении статического равновесия поршня под действием силы H_0 и силы упругости пружины $F_{ст}$. В этом положении пружина сжата на d силой H_0. При этом возникает сила упругости пружины $F_{ст}$ = cd. Запишем условие равновесия поршня в проекции на ось x: $H_0-cd=0$.

Изобразим поршень смещенным из нуля направо на x, при этом проекция на ось x возникшей силы упругости F равна:

$$F_x = -cd_x = -c(d+x). \qquad (8)$$

Кроме того, к поршню приложены силы: P – вес, N – нормальная реакция корпуса, S – сила давления сжатого воздуха.

Составим дифференциальное уравнение движения поршня D: $m\ddot{x} = S_x + F_x$.

Учитывая (1) и закон изменения S, находим

$$\frac{P}{g}\ddot{x} = H_0 + H_1\cos(pt) + H_3\cos(3pt) - cd - cx.$$

Учитывая условие равновесия, запишем уравнение вынужденных колебаний поршня в виде

$$\ddot{x} + k^2 x = h_1\cos(pt) + h_3\cos(3pt), \qquad (9)$$

где $k = \sqrt{\dfrac{cg}{P}}, \quad h_1 = \dfrac{H_1 g}{P}, \quad h_3 = \dfrac{H_3 g}{P}.$

Найдем частное решение уравнения (2) в виде

$$x_2 = A_1\sin(pt) + B_1\cos(pt) + A_2\sin(3pt) + B_2\cos(3pt). \qquad (10)$$

Коэффициенты A_1, B_1, A_2, B_2 найдем, вычислив первую и вторую производные от x_2 и подставив найденные выражения в (2), а затем приравняв коэффициенты, стоящие в правой и левой частях уравнения при синусе и косинусе. В результате получим

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{h_1}{k^2 - p^2}, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = \frac{h_3}{k^2 - 9p^2}.$$

Подставив эти коэффициенты в (3), находим искомое уравнение вынужденных колебаний поршня:

$$x_2 = \frac{h_1}{k^2 - p^2}\cos(pt) + \frac{h_3}{k^2 - p^2}\cos(3pt).$$

В случае k = p наступают резонансные колебания первого порядка.

В случае k = 3p наступают резонансные колебания третьего порядка.

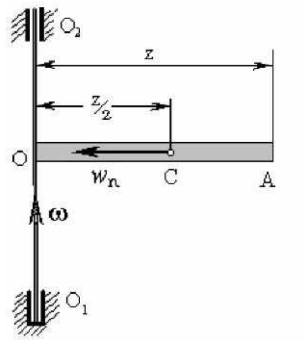
Так как $k = \sqrt{\dfrac{cg}{P}}$, то подбор коэффициентов упругости пружины следует производить так, чтобы обеспечить выполнение неравенств $k \neq p$ и $k \neq 3p$. При этом поршень не будет попадать в резонанс.

§7. Теорема о движении центра масс

Задача № 1. Бать М.И. «Теоретическая механика в примерах и задачах», том 2, Наука, 1975.

Тонкий однородный стержень OA длиной l и весом P вращается вокруг вертикальной оси O_1O_2 с постоянной угловой скоростью ω.

Определить главный вектор внешних сил. Массой оси O_1O_2 пренебречь.

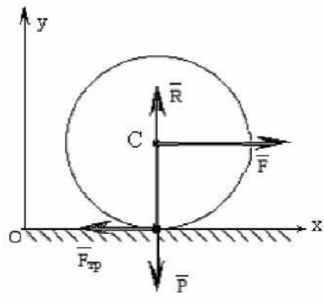


Решение. В соответствии с теоремой о движении центра масс системы материальных точек $M\overline{w}_c = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e$ для определения главного вектора внешних сил системы $\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e$ достаточно найти $M\overline{w}_C$. Так как центр масс стержня находится в точке C на расстоянии $l/2$ от оси вращения и имеет, в силу постоянства вектора ω, только центростремительное ускорение $w_n = OC\omega^2 = \frac{1}{2}\omega^2$, которое направлено вдоль стержня от C к O, то главный вектор внешних сил системы $\overline{R}$ имеет то же направление и равен по модулю $R = M\omega_C = \frac{Pl}{2g}\omega^2$.

В данном случае главный вектор внешних сил является векторной суммой веса стержня и реакций опор O_1 и O_2.

Задача № 2. Бать М.И. «Теоретическая механика в примерах и задачах», том 2, Наука,1975.

Колесо весом P катится со скольжением по прямолинейному горизонтальному рельсу под действием постоянной силы F, приложенной к его центру тяжести C. Найти скорость центра масс C колеса, если в начальный момент оно находилось в покое. Коэффициент трения скольжения равен f. Оси x, y изображены на рисунке.



Решение. К колесу приложены внешние силы: P – его вес, F – движущая сила, R – нормальная реакция рельса, $F_{тр}$ – сила трения скольжения, направленная вдоль рельса в сторону, противоположную силе F.
Применим теорему о движении центра масс в проекциях на оси x и y:

$$M\ddot{x}_c = F - F_{тр}\,, \qquad M\ddot{y}_c = R - P \qquad (1)$$

При движении колеса $y_C = r = const$. Поэтому $\ddot{y}_C = 0$, и из второго уравнения следует $R = P$. Так как при качении колеса со скольжением сила трения достигает своего наибольшего значения, то $F_{тр} = fR$. Использовав это значение $F_{тр}$ в первом уравнении (1), имеем $\ddot{x}_C = g\dfrac{F - fP}{P}$.

Первый интеграл дифференциального уравнения имеет вид $\dot{x}_C = g\dfrac{F - fP}{P}t + C_1$.

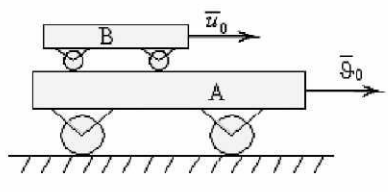
Подстановка начального условия $t = 0$, $\dot{x} = 0$ (колесо в начальный момент находилось в покое) в уравнение дает C_1=0. Внеся это значение C_1 получим искомый закон изменения проекции скорости центра масс C колеса: $\dot{x}_C = g\dfrac{F - fP}{P}t$. Движение колеса возможно при наличии неравенства $F > fP$.

§8. Теорема об изменении количества движения

Задача № 1.

По горизонтальной платформе A движущейся по инерции со скоростью $\overline{\vartheta}_0$, перемещается тележка B с постоянной относительной скоростью u_0. В некоторый момент времени тележка была заторможена.

Определить: общую скорость ϑ платформы с тележкой после ее остановки. M – масса платформы, m – масса тележки.



Решение. По теореме об изменении количества движения $\dfrac{d}{dt}\overline{Q} = \sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i^{(e)}$.

Так как торможение тележки происходит с «помощью» внутренней силы, то:

$$\frac{d}{dt}\overline{Q}=0 \Rightarrow \overline{Q}=const \Rightarrow \overline{Q}_0=\overline{Q}_1 \begin{cases} "0" - \text{момент движения,} \\ "1" - \text{момент остановки.} \end{cases}$$

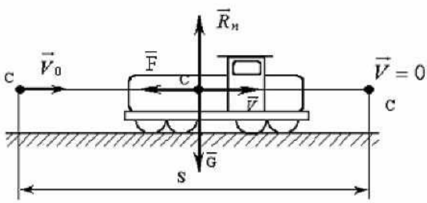
Количество движения системы сохраняется.

$$\overline{Q}_0 = M\overline{\vartheta}_0 + m(\overline{\vartheta}_0 + \overline{u}_0), \qquad M\overline{\vartheta}_0 + m(\overline{\vartheta}_0 + \overline{u}_0) = M\overline{\vartheta} + m\overline{\vartheta},$$

$$\overline{Q}_1 = M\overline{\vartheta} + m\overline{\vartheta}, \qquad \overline{\vartheta} = \frac{M\overline{\vartheta}_0 + m(\overline{\vartheta}_0 + \overline{u}_0)}{m+M} = \overline{\vartheta}_0 + \frac{m}{m+M}\overline{u}_0.$$

Задача № 2. Аркуша А.И. «Руководство к решению задач по теоретической механике», Москва, Высшая школа,1999.

Машинист тепловоза отключает двигатель и начинает тормозить в момент, когда тепловоз имеет скорость 90 км/ч. Через сколько времени тепловоз остановится, если сила торможения постоянна и составляет 0,12 его веса, а движение происходит по горизонтальному и ровному участку дороги?



Решение.

1. Тепловоз движется поступательно, потому рассмотрим движение его центра тяжести C (центра массы), считая что к нему приложены все внешние силы.

2. После того, как отключается двигатель и включается тормозное устройство, на тепловоз действуют три силы: сила тяжести G, нормальная реакция рельсов R и сила торможения F. В начале торможения скорость V_0 = 90км/ч = 25м/с, в конце V = 0. Требуется определить путь S и время t, за которое этот путь пройден.

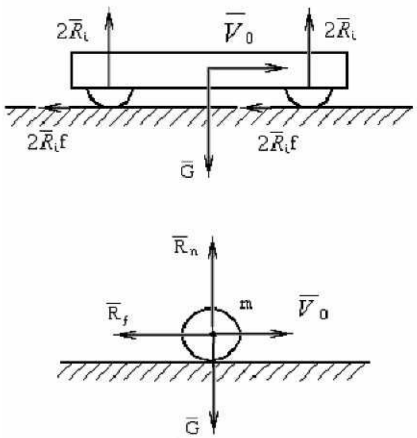
3. Для определения времени торможения применим теорему об изменении количества движения: $\overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \int_0^{\tau} \overline{F}(t)dt$.

Спроецировав векторы на горизонтальную ось (ось x), увидим, что проекции сил $\overline{G}$ и $\overline{R}_н$ равны нулю, а проекция силы $\overline{F}$ получается равной ее модулю, но со знаком минус: проекция скорости $\overline{V}_0$ также равна ее модулю, поэтому $-Ft = -mV_0$.

4. Решаем это уравнение относительно t: $t = mV_0/F$. Так как сила торможения $F = 0,12G = 0,12mg$, то окончательно $t = \dfrac{V_0}{0,12\,g} = \dfrac{25}{0,12 \cdot 9,81} = 21,2c$.

Задача № 3. Аркуша А.И. «Руководство к решению задач по теоретической механике», Москва, Высшая школа,1999.

Какой коэффициент трения колес заторможенного автомобиля о дорогу (считать, что заторможены все четыре колеса), если в момент выключения двигателя и нажатия тормоза скорость движения автомобиля $V_0 = 60$ км/ч и автомобиль останавливается через 5 с после начала торможения.



Решение.

1. В задаче известно время движения заторможенного автомобиля, т. е. имеется в виду импульс силы, поэтому для решения применим закон изменения количества движения.

2. На заторможенный автомобиль действует девять сил; $\overline{G}$ – вес автомобиля, четыре реакции поверхности дороги, приложенные к каждому колесу R_i, и четыре силы трения $R_i f$, также приложенные к колесам.

Принимая автомобиль за материальную точку, считаем, что все эти силы приложены в центре тяжести автомобиля, и тогда, заменив четыре реакции поверхности их суммой $\overline{R}_n$ и четыре силы трения их суммой $\overline{R}_f$, получим только три силы $\overline{G}$, $\overline{R}_n$, $\overline{R}_f$.

3. Силы $\overline{G}$ и $\overline{R}_n$ численно равны друг другу и взаимно уравновешиваются. Следовательно, импульс создается постоянной силой трения $\overline{R}_f = R_n f = Gf$.

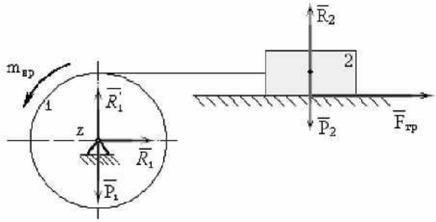
4. Импульс силы трения в данном случае действует в сторону, противоположную движению, поэтому теорема об изменении количества движения для данной задачи имеет вид $m\overline{V}_1 - m\overline{V}_0 = \int\limits_0^t \overline{G} f dt$.

Но автомобиль через t =5с останавливается, $-mV_0 = -Gft$, поэтому $\frac{G}{g}V_0 = fGt$, Откуда, имея в виду, что V_0= 60 км/ч = 16,7 м/с, $f = \frac{V_0}{gt} = \frac{16{,}7}{9{,}81 \cdot 5} = 0{,}34$.

§9. Теорема об изменении момента количества движения

Задача № 1. Бать М.И. «Теоретическая механика в примерах и задачах», том 2, Наука,1975.

При вращении барабана 1 весом P_1 и радиусом r вокруг неподвижной оси z на его боковую поверхность наматывается нить, которая приводит в движение груз 2 весом P_2, скользящий по неподвижной горизонтальной плоскости. Определить угловое ускорение барабана, если к нему приложен вращающий момент $m_{вр}$, а коэффициент трения скольжения груза о плоскость равен f. Высотой груза пренебречь.



Решение. Применим теорему об изменении главного момента количества движения системы материальных точек относительно оси z, т. е. $\frac{dL_Z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} mom_Z(F_k^e)$.

Изобразим внешние силы и моменты системы: $m_{вр}$ – вращающий момент; P_1 – вес барабана, P_2 – вес груза, R_1 и $R_1^{'}$ – составляющие реакции оси барабана, R_2 – нормальная реакция плоскости, $F_{тр}$ – сила трения при скольжении груза о плоскость. Учитывая, что $\overline{R}_2 = -\overline{P}_2$, $F_{тр} = fP_2$, а силы P_1, R_1 и $R_1^{'}$ приложены в точке, лежащей на оси z, запишем:

$$\sum mom_Z(F_k^e) = m_{вр} - fP_2 \cdot r. \qquad (1)$$

Главный момент количеств движения L_Z данной системы относительно неподвижной оси z

$$L_Z = L_Z^{(1)} + L_Z^{(2)} = J_Z\omega + mom_Z(m_2\overline{v}_2) = \frac{P_1r^2}{2g} + r\frac{P_2}{g}\omega r = \frac{P_1 + 2P_2}{2g}r^2\omega.$$

Взяв производную L_Z по времени с учётом того, что $\dot{\omega} = \ddot{\varphi}$, имеем

$$\frac{dL_Z}{dt} = \frac{P_1 + 2P_2}{2g} r^2 \ddot{\varphi}\,. \qquad (2)$$

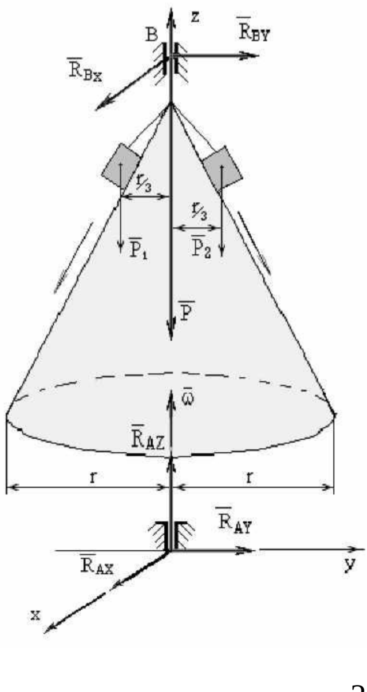
Подставив результаты (1) и (2) в уравнение $\dfrac{dL_Z}{dt} = \sum\limits_{k=1}^{n} mom_Z(F_k^e)$ и решив его относительно $\ddot{\varphi}$, получим искомый результат:

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{(P_1 + 2P_2)r^2}(m_{вр} - fP_2 r)\,.$$

Задача № 2. Бать М.И. «Теоретическая механика в примерах и задачах», том 2, Наука,1975.

На боковой поверхности круглого конуса симметрично расположены два груза, соединенные между собой тонкой нитью и отстоящие от оси вращения конуса на расстоянии одной трети радиуса основания конуса. Конус вместе с грузами вращался с угловой скоростью ω. После внезапного разрыва нити грузы начали опускаться по направляющим боковой поверхности конуса. Вес каждого из грузов в четыре раза меньше веса конуса. Определить угловую скорость конуса в момент, когда грузы достигнут основания конуса. Силами сопротивлений движению пренебречь. Грузы считать точечными массами.

Решение.



Взяв начало координат в нижней опоре A оси конуса, направим ось z по оси вращения конуса. Обозначим: P – вес конуса, r –радиус основания конуса.

Изобразим внешние силы материальной системы, состоящей из конуса и двух грузов: P – вес конуса, P_1 и P_2 – веса грузов, RAx, RAy, RAz, RBx, RBy – составляющие реакций опор A и B.

Применим теорему об изменении момента количества движения системы материальных точек относительно оси z.

$$\frac{dL_Z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} mom_Z(F_k^e)\,.$$

Так как все внешние силы либо параллельны, либо пересекают ось вращения z, то сумма моментов всех внешних сил относительно оси z равна нулю: $\sum_{k=1}^{n} mom_Z(F_k^e) = 0$. То есть $\frac{dL_Z}{dt} = 0$ и, следовательно, $L_Z^1 = L_Z^2$. Итак, имеет место случай сохранения проекции момента количеств движения системы материальных точек. Воспользовавшись формулой $L_Z = I_Z\omega$, запишем:

$L_Z^1 = I_Z^1\omega_1$, $L_Z^2 = I_Z^2\omega_2$, где I_Z^1, I_Z^2 – соответственно моменты инерции в первом и во втором положении грузов. Так как $L_Z^1 = L_Z^2$ и $L_Z^1 = I_Z^1\omega_1$, $L_Z^2 = I_Z^2\omega_2$, то $I_Z^1\omega_1 = \cdot I_Z^2\omega_2$, откуда $\omega_2 = \frac{I_Z^1}{I_Z^2}\omega_1$.

Остается вычислить момент инерции системы относительно оси z. Так как материальная система состоит из конуса и двух грузов, то момент инерции системы равен сумме моментов инерции конуса и грузов.

Момент инерции конуса относительно оси z равен $\frac{3}{10}\frac{P}{g}r^2$.

Считая грузы точечными массами, имеем для начального и конечного положений грузов

$$I_Z^1 = \frac{3}{10}\frac{P}{g}r^2 + 2\frac{P}{4g}\left(\frac{r}{3}\right)^2 = \frac{16}{45}\frac{P}{g}r^2, \qquad I_Z^2 = \frac{3}{10}\frac{P}{g}r^2 + 2\frac{P}{4g}r^2 = \frac{4}{5}\frac{P}{g}r^2.$$

Используя найденные значения, получим $\omega_2 = \frac{4}{9}\omega_1$.

§10. Теорема об изменении кинетической энергии

Кинетическую энергию материальной системы определяют формулой

$$T = \sum_{k=1}^{n}\frac{m_k v_k^2}{2}.$$

Для систем, совершающих сложное движение, кинетическую энергию определяют по формуле Кёнига

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + T',$$

где T' кинетическая энергия системы в ее относительном движении по отношению к поступательно движущейся системе координат с началом в центре инерции. (Здесь и далее под центром инерции понимаем центр масс).

Для твердого тела, движущегося поступательно,

$$T = \frac{Mv_C^2}{2},$$

где M – масса тела;

v_C скорость центра инерции (или любой другой точки).

Для твердого тела, вращающегося вокруг оси,

$$T = \frac{J_Z \omega^2}{2},$$

где J_Z момент инерции тела относительно оси вращения,

ω – угловая скорость.

Для общего случая движения твердого тела (в том числе и для плоского движения)

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2},$$

где J_C момент инерции тела относительно мгновенной оси, проходящей через центр инерции (для плоского движения эта ось перпендикулярна плоскости движения);

ω – мгновенная угловая скорость.

Элементарную работу силы, приложенной к материальной точке, на бесконечно малом перемещении определяют формулой

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\overline{r} = Fds\cos(\overline{F}, \overline{\tau}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz.$$

Работа силы на конечном перемещении материальной точки

$$A = \int_L \overline{F} d\overline{r} = \int_L F_\tau ds = \int_L (F_x dx + F_y dy + F_z dz).$$

Работа постоянной силы на прямолинейном участке пути s

$$A = Fs\cos(\overline{F}, \overline{s}).$$

Работа сил тяжести любой системы

$$A_{12}(\overline{P}) = P(z_{C_1} - z_{C_2}),$$

где P – вес всей системы;

z_{C_1} и z_{C_2} аппликаты центра инерции в начальном и конечном положениях системы.

Работа упругой силы $F_x = -cx$ при прямолинейном перемещении точки

$$A_{12} = \frac{c}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right),$$

где x_1 x_2 координаты начального и конечного положений

Элементарную работу сил, приложенных к твердому телу, перемещающемуся произвольно, определяют по формуле

$$\delta A = \left[\overline{R} \cdot \overline{v}_O + \overline{M}_O \overline{\omega}\right] dt,$$

где $\overline{R}$ и $\overline{M}_0$ главный вектор и главный момент приложенных к телу сил;

O – произвольная точка тела.

Работа сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг оси,

$$\delta A = M_Z d\varphi; \qquad A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_Z d\varphi,$$

где M_Z – главный момент всех сил относительно оси вращения Oz.

Сумма работ всех внутренних сил в твердом теле равна нулю.

Мощность силы, приложенной к точке,

$$N = \frac{\delta A}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v} = F_\tau v = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}.$$

Мощность сил, приложенных к твердому телу,

$$N = \overline{R} \cdot \overline{v}_O + \overline{M}_O \cdot \overline{\omega}.$$

Для сил, приложенных к твердому телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси,

$$N = M_Z \omega.$$

В общем случае работа силы на криволинейном участке пути зависит от формы кривой L, по которой перемещается точка. Если силы, действующие на точку, таковы, что

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y},$$

то работа не зависит от формы траектории точки и поле сил называют ***потенциальным***. В этом случае

$$\delta A = -d\Pi; \qquad A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2,$$

где $\Pi(x, y, z)$ – потенциальная энергия точки;

Π_1 и Π_2 значения $\Pi(x, y, z)$ в начальном и конечном положениях точки.

Потенциальная энергия поля силы тяжести $\Pi = P_{Zc} + const$.

Если выбрана нулевая поверхность уровня, то получим $\Pi = \pm Ph$, где h высота центра тяжести относительно нулевой поверхности, причем знак «плюс» имеет место в случае, когда центр тяжести расположен выше этой поверхности.

Потенциальную энергию пружины (линейной и спиральной) выражают формулой

$$\Pi = \frac{c\Delta^2}{2},$$

где для линейной пружины:

c – жесткость, равная величине силы, вызывающей изменение длины пружины на единицу длины;

Δ – изменение длины пружины по сравнению с ее недеформированной длиной;

для спиральной пружины:

c – жесткость, равная величине момента силы, вызывающего закручивание пружины на 1 радиан;

Δ – угол закручивания от недеформированного состояния.

Приращение кинетической энергии системы при перемещении ее из одного положения в другое равно сумме работ, произведенных на этом перемещении всеми силами, приложенными к системе, т.е.

$T_2 - T_1 = A_{12}$.

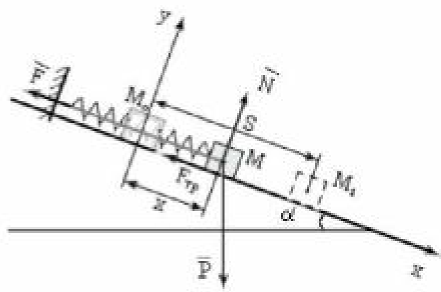
Если система неизменяемая, то

$T_2 - T_1 = A_{12}^{(e)}$, где $A_{12}^{(e)}$ – сумма работ внешних сил.

Производная от кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех сил, действующих на эту систему, т.е. $\dfrac{dT}{dt} = N$.

Если система движется в потенциальном силовом поле, ***то полная механическая энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной, т. е. $T + \Pi = const$.***

Задача № 1. *Груз М массой m помещен на негладкую наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол α, и прикреплен к концу пружины с жесткостью с, другой конец которой закреплен неподвижно. Определить максимальное растяжение S пружины, если в начальный момент пружина была недеформирована, а груз отпущен без начальной скорости. Коэффициент трения тела о плоскость равен f, причем $f < tg\alpha$.*



Решение. Имеем: на груз М действует вес $\overline{P}$, упругая сила $\overline{F}$, нормальная реакция плоскости $\overline{N}$ и сила трения $\overline{F}_{тр}$, направленная как $\overline{F}$.

Изменение кинетической энергии равно работе сил, приложенных к системе: $T_2 - T_1 = \sum A_{12}(\overline{F})$. Так как $v_1 = v_2 = 0$, то $T_1 = T_2 = 0$, следовательно, $A_{12} = 0$, т. е. $A_{12} = A_{12}(\overline{P}) + A_{12}(\overline{F}_{тр}) + A_{12}(\overline{F}) + A_{12}(\overline{N}) = 0$.

Здесь $F_{тр} = fP\cos\alpha$, $F = cx$, $P = mg$.

Далее найдем

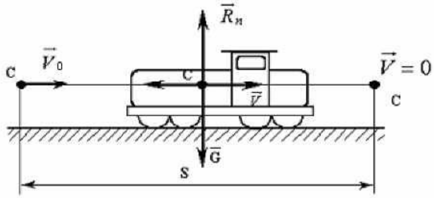
$A_{12}(\overline{P}) = PS\sin\alpha;$ $\qquad$ $A_{12}(\overline{F}_{mp}) = -F_{mp}S = -fPS\cos\alpha;$

$A_{12}(\overline{F}) = -\int\limits_0^S cxdx = -\dfrac{cS^2}{2};$ $\qquad$ $A_{12}(\overline{N}) = 0$, так как перемещение груза перпендикулярно нормальной силе реакции плоскости.

Следовательно, $$PS\sin\alpha - PSf\cos\alpha - \frac{cS^2}{2} = 0,$$ откуда $S = \dfrac{2mg(\sin\alpha - f\cos\alpha)}{c}$.

Задача № 2. Аркуша А.И. «Руководство к решению задач по теоретической механике», Москва, Высшая школа, 1999.

Машинист тепловоза отключает двигатель и начинает тормозить в момент, когда тепловоз имеет скорость 90 км/ч. Пройдя какой путь, тепловоз остановится, если сила торможения постоянна и составляет 0,12 его веса, а движение происходит по горизонтальному и ровному участку дороги?



Решение. 1. Для определения тормозного пути S применим теорему об изменении кинетической энергии $T_1 - T_0 = \sum A_{10}(\overline{F})$. В данном случае V_1=0, $A(\overline{F}_{mp}) = FS\cos(\alpha) = -FS = -0.12GS$ (угол α между направлением силы $\overline{F}$ и направлением перемещения равен 180°), а работы сил $\overline{G}$ и $\overline{R}_n$ равны нулю (эти силы действуют перпендикулярно к направлению перемещения), поэтому $-\dfrac{mV_0^2}{2} = -Fs$.

2. Решаем это уравнение относительно S: $S = \dfrac{mV_0^2}{2F} = \dfrac{V_0^2}{2\cdot 0{,}12g}$

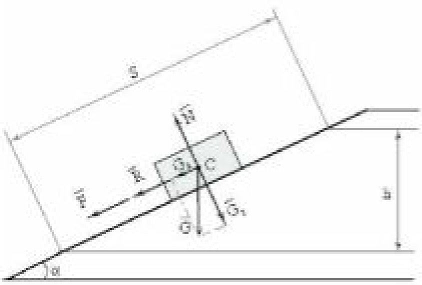
(F=0,12G=0,12mg).

После подстановки в эту формулу числовых значений $S = \dfrac{25^2}{2\cdot 0{,}12\cdot 9{,}81} = 265\ м$.

Задача № 3. Аркуша А.И. «Руководство к решению задач по теоретической механике», Москва, Высшая школа, 1999.

За 500 м до станции, расположенной на пригорке высотой 2 м, машинист поезда, идущего со скоростью 12 м/с, начинает тормозить. Как велико должно быть сопротивление от торможения, считаемое постоянным, чтобы поезд остановился у станции, если масса поезда равна 10^6 кг, сопротивление трения 19600 Н.

Решение.



1. Решаем задачу, используя теорему об изменении кинетической энергии $T_1 - T_0 = \sum A_{10}(\overline{F})$, так как в условии задачи задано не время торможения, а тормозной путь $S = 500$ м.

2. Поезд движется поступательно, поэтому достаточно рассмотреть движение его центра тяжести С.

Приложим к точке С все действующие силы.

Вес поезда $\overline{G}$ раскладываем на две составляющие $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$. На поезд в сторону, противоположную его движению, действуют три силы: составляющая веса $\overline{G}_2$, сила трения $\overline{R}$ и искомая сила торможения $\overline{F}$.

3. Равнодействующая этих сил равна их сумме $(F+R+G_2)$, направление противоположно скорости, а отрицательная работа сил сопротивления выражается формулой $A_{10} = -(F+R+G_2)S$.

4. Работа A_{10} равна изменению кинетической энергии поезда, но так как конечная скорость поезда V_1=0, то $-(F+R+G_2)S = -\dfrac{mV_0^2}{2}$.

Из последнего уравнения можно найти силу торможения F: $F = \dfrac{mV_0^2}{2S} - R - G_2$.

5. Но предварительно нужно определить составляющую веса G_2: $G_2 = G\sin(\alpha) = G\dfrac{h}{S}$.

Подставив полученное значение G_2 в формулу для определения силы F, получим $F = \frac{mV_0^2}{2S} - R - G\frac{h}{S}$.

Затем вычисляем величину силы F, учитывая, что $G=mg$,

$$F = \frac{mV_0^2}{2S} - R - \frac{mgh}{S} = \frac{10^6 \cdot 12^2}{2 \cdot 500} - 19600 - \frac{10^6 \cdot 9{,}81 \cdot 2}{500} = 85100H.$$

§11. Уравнения Лагранжа второго рода

Для системы с голономными идеальными и удерживающими связями уравнения Лагранжа имеют вид [1], [5]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты системы;

s – число степеней свободы системы;

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости;

T – кинетическая энергия системы;

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_S$ – обобщенные силы.

Для систем, движущихся в потенциальном силовом поле, уравнения Лагранжа будут

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$

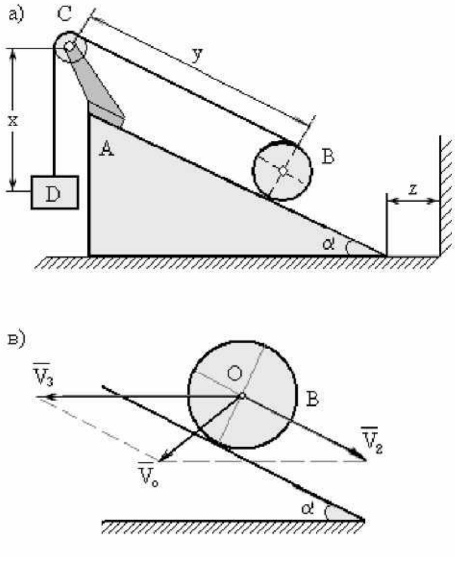
где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.

Для составления уравнений Лагранжа следует:

- установить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты;
- предположив, что система движется так, что все обобщенные координаты увеличиваются, составить выражения для кинетической энергии системы, при этом все переменные величины, входящие в T, должны быть выражены через обобщенные координаты и обобщенные скорости, т.е. $T = T(q_1, q_2, \ldots, q_S; \dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S; t)$ (в случае стационарных связей время t не входит в выражение T);

- определить частные производные $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$; определить производные $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$, считая все переменные, входящие в $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, функциями времени t;
- найти обобщенные силы; подставить все найденные величины в исходное уравнение.

Задача № 1. *Прямоугольная призма A может скользить по гладкой горизонтальной плоскости. На наклонной гладкой грани призмы помещен однородный цилиндр B, на который намотана нерастяжимая нить, перекинутая через идеальный блок C. К концу нити прикреплен груз D массой m. Принимая массу цилиндра равной 2m, а массу призмы 3m, определить движение системы, если в начальный момент она находилась в покое, а угол* $\alpha = 30^\circ$ *. Размерами и массой блока пренебречь.*



Решение. Система имеет три степени свободы, так как для однозначного определения положения всех её элементов необходимо три независимых параметра. Выберем обобщенные координаты:

$q_1 = x$ – расстояние от оси блока C до центра тяжести груза D;

$q_2 = y$ – расстояние между осями блока C и цилиндра B;

$q_3 = z$ – перемещение призмы.

Предполагаем, что все обобщенные координаты изменяются в сторону их увеличения.

Определим кинетическую энергию системы. Имеем

$$T = T_A + T_B + T_D,$$

где T_A – кинетическая энергия призмы;

T_B – кинетическая энергия цилиндра;

T_D – кинетическая энергия груза.

Призма движется поступательно со скоростью $v_3 = \dot{z}$, следовательно,

$$T_A = \frac{m_A}{2}\dot{z}^2 = \frac{3m}{2}\dot{z}^2.$$

Груз D участвует в двух поступательных движениях: относительном (по отношению к призме) со скоростью $v_1 = \dot{x}$ и переносном (вместе с призмой) со скоростью $v_3 = \dot{z}$. Поэтому абсолютное движение груза является также поступательным со скоростью, равной геометрической сумме указанных скоростей, т.е. $\overline{v}_D = \overline{v}_1 + \overline{v}_3$, следовательно, $v_D^2 = v_1^2 + v_3^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$.

Таким образом, $T_D = \dfrac{m_D v_D^2}{2} = \dfrac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2)$.

Цилиндр совершает плоскопараллельное движение. Его кинетическую энергию определим по формуле Кёнига: $T_B = \dfrac{m_B v_0^2}{2} + \dfrac{J_0 \omega_B^2}{2}$,

где v_0 – абсолютная скорость оси цилиндра;

ω_B – угловая скорость цилиндра;

J_0 – момент инерции цилиндра относительно его оси O.

Скорость точки O согласно теореме сложения скоростей равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей, т. е.

$$\overline{v}_O = \overline{v}_2 + \overline{v}_3,$$

где $v_2 = \dot{y}$ – относительная скорость оси цилиндра, следовательно,

$$v_O^2 = v_2^2 + v_3^2 - 2v_2 v_3 \cos\alpha = \dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2\dot{y}\dot{z}\cos\alpha.$$

Определим ω_B. Так как движение призмы A является поступательным, то угловую скорость ω_B следует определить лишь в относительном движении цилиндра по отношению к призме A. Известны относительные скорости двух точек цилиндра O и E: $v_E^r = \dot{x}$; $v_O^r = \dot{y}$.

Относительный мгновенный центр скоростей цилиндра B находится в точке K, поэтому $\omega_B = \dfrac{v_O^r}{OK} = \dfrac{v_E^r}{EK}$. Составляя производную пропорцию, получим $\omega_B = \dfrac{v_O^r + v_E^r}{OK + EK} = \dfrac{\dot{y} + \dot{x}}{R}$, где R – радиус цилиндра.

Момент инерции цилиндра $J_O = \dfrac{m_B R^2}{2} = mR^2$,

следовательно, $T_B = m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2\dot{y}\dot{z}\cos\alpha) + \dfrac{m}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2$.

Кинетическая энергия всей системы

$$T = \frac{3m}{2}\dot{z}^2 + \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) + m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2 - 2\dot{y}\dot{z}\cos\alpha) + \frac{m}{2}(\dot{x} + \dot{y})^2.$$

Найдем частные производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + m(\dot{x} + \dot{y});$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = 2m(\dot{y} - \dot{z}\cos\alpha) + m(\dot{x} + \dot{y});$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = 3m\dot{z} + m\dot{z} + 2m(\dot{z} - \dot{y}\cos\alpha).$$

Так как обобщенные координаты x, y, z непосредственно не входят в выражение для T, то $\dfrac{\partial T}{\partial x} = \dfrac{\partial T}{\partial y} = \dfrac{\partial T}{\partial z} = 0$, далее

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + m(\ddot{x} + \ddot{y}) = 2m\ddot{x} + m\ddot{y};$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = 2m(\ddot{y} - \ddot{z}\cos\alpha) + m(\ddot{x} + \ddot{y}) = m\ddot{x} + 3m\ddot{y} - 2m\ddot{z}\cos\alpha;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}}\right) = 3m\ddot{z} + m\ddot{z} + 2m(\ddot{z} - \ddot{y}\cos\alpha) = -2m\ddot{y}\cos\alpha + 6m\ddot{z}.$$

Определим обобщенные силы.

Для нахождения Q_X воспользуемся формулой $Q_X = \dfrac{\delta A_1}{\delta x}$,

где δA_1 – элементарная работа задаваемых сил в предположении, что $\delta x \neq 0$; $\delta y = \delta z = 0$, следовательно, $\delta A_1 = P_D \delta x = mg\delta x$, откуда $Q_X = mg$.

Аналогично найдем $Q_Y = \dfrac{\delta A_2}{\delta y}$, где δA_2 - элементарная работа задаваемых сил при перемещении $\delta y \neq 0;\ \delta x = \delta z = 0$. Очевидно, $\delta A_2 = P_B \delta y \sin\alpha = 2mg\sin\alpha\delta y$, тогда $Q_Y = 2mg\sin\alpha$.

Если же $\delta x = \delta y = 0;\quad \delta z \neq 0$, то $\delta A_3 = 0$, и, следовательно, $Q_Z = 0$.

Замечание. Обобщенные силы можно легко определить и по формуле $Q_j = -\dfrac{\partial \Pi}{\partial q_j}$. В нашей задаче $\Pi = -P_D x - P_B y\sin\alpha + const$, следовательно,

$$Q_X = -\frac{\partial \Pi}{\partial x} = P_D = mg;$$

$$Q_Y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y} = P_B \sin\alpha = 2mg\sin\alpha;$$

$$Q_Z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} = 0.$$

Подставляя все найденные величины в уравнения Лагранжа, получим

$$2m\ddot{x} + m\ddot{y} = mg;$$

$$m\ddot{x} + 3m\ddot{y} - 2m\ddot{z}\cos\alpha = 2mg\sin\alpha;$$

$$-2m\ddot{y}\cos\alpha + 6m\ddot{z} = 0.$$

Принимая во внимание, что $\alpha = 30^\circ$, найдем

$$2\ddot{x} + \ddot{y} = g;$$

$$\ddot{x} + 3\ddot{y} - \sqrt{3}\ddot{z} = g;$$

$$-\sqrt{3}\ddot{y} + 6\ddot{z} = 0.$$

Эти уравнения представляют собой дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах.

Умножая второе уравнение на 2 и вычитая из него первое, получим

$$5\ddot{y} - 2\sqrt{3}\ddot{z} = g.$$

Решая это уравнение совместно с третьим, найдем

$$\ddot{x} = \frac{3}{8}g;\quad \ddot{y} = \frac{1}{4}g;\quad \ddot{z} = \frac{\sqrt{3}}{24}g.$$

Интегрируя, получим

$$\dot{x} = \frac{3}{8}gt + C_1;\qquad \dot{y} = \frac{1}{4}gt + C_2;\qquad \dot{z} = \frac{\sqrt{3}}{24}gt + C_3.$$

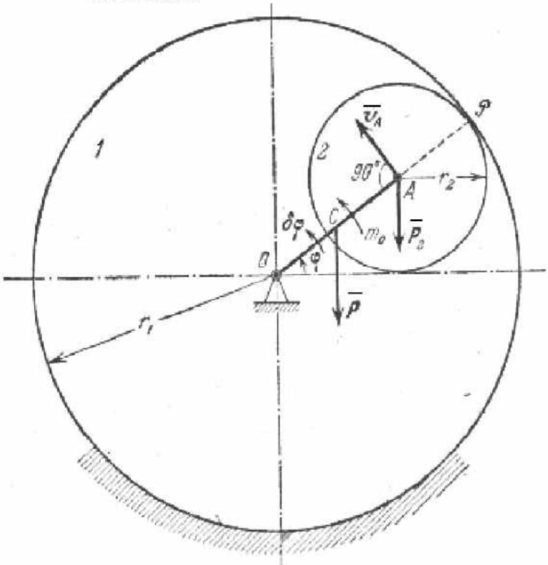
Постоянные C_1, C_2, C_3 равны нулю, так как в начальный момент $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$.

Интегрируя еще раз и отбрасывая несущественные постоянные, получим искомые уравнения движения системы:

$$x = \frac{3}{16} gt^2; \quad y = \frac{1}{8} gt^2; \quad z = \frac{\sqrt{3}}{48} gt^2.$$

Задача № 2. *Определить угловое ускорение кривошипа ОА планетарной передачи, расположенной в вертикальной плоскости. Зубчатое колесо 2 находится во внутреннем зацеплении с неподвижным зубчатым колесом 1. Колесо 2 приводится в движение посредством кривошипа ОА, к которому приложен вращающий момент m_0. Вес кривошипа ОА равен Р, P_2 – вес колеса 2, r_2 – радиус колеса 2, r_1 – радиус неподвижного колеса 1.*
Колесо 2 считать однородным круглым диском, а кривошип ОА – тонким однородным стержнем. Силами сопротивления движению пренебречь.

Решение.



Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты φ имеет вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi .$$

Планетарная передача имеет одну степень свободы, так как угол поворота φ кривошипа *OA* определяет положение всех точек механизма. В качестве обобщенной координаты выбираем угол φ, отсчитываемый от горизонтальной оси против часовой стрелки.

Активными силами являются: $\boldsymbol{P}$ – вес кривошипа, $\boldsymbol{P_2}$ – вес колеса 2, $\boldsymbol{m_0}$ вращающий момент, приложенный к кривошипу OA. Все связи, наложенные на систему, идеальны.

Дадим кривошипу OA возможное угловое перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ, т. е. против часовой стрелки.

Для определения обобщенной силы Q_φ вычислим сумму работ активных сил на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = m_0\delta\varphi - P|OC|\cos\varphi\cdot\delta\varphi - P_2|OA|\cos\varphi\cdot\delta\varphi .$$

Так как $OA = O\mathscr{P} - A\mathscr{P} = r_1 - r_2$, а $OC = \dfrac{OA}{2} = \dfrac{r_1 - r_2}{2}$, то

$$\delta A = \frac{1}{2}\left[2m_0 - \left(P + 2P_2\right)\left(r_1 - r_2\right)\cos\varphi\right]\delta\varphi . \qquad (1)$$

Учитывая, что $\delta A = Q_\varphi\delta\varphi$, находим обобщенную силу, соответствующую обобщенной координате φ: $Q_\varphi = \dfrac{1}{2}\left[2m_0 - \left(P + 2P_2\right)\left(r_1 - r_2\right)\cos\varphi\right]$. (2)

Переходим к вычислению кинетической энергии T механизма, в состав которого входят массы кривошипа OA и зубчатого колеса 2 (зубчатое колесо 1 неподвижно), т. е. $T = T^{(1)} + T^{(2)}$. (3)

Кинетическая энергия кривошипа OA, вращающегося вокруг неподвижной оси O, перпендикулярной к плоскости рисунка, определяется формулой $T^{(1)} = \dfrac{1}{2}I_O\dot{\varphi}^2$, где $I_O = \dfrac{1}{3}\dfrac{P}{g}OA^2 = \dfrac{1}{3}\dfrac{P}{g}\left(r_1 - r_2\right)^2$ – момент инерции кривошипа. Следовательно, $T^{(1)} = \dfrac{1}{6}\dfrac{P}{g}(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}^2$. (4)

Кинетическая энергия зубчатого колеса 2, совершающего плоское движение, равна $T^{(2)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_2}{g}v_A^2 + \dfrac{1}{2}I_A\omega_2^2$. (5)

Найдем скорость точки A, являющейся концом кривошипа OA:

$$v_A = |OA|\dot{\varphi} = (r_1 - r_2)\dot{\varphi} . \qquad (6)$$

Рассмотрим скорость той же точки А, принадлежащей зубчатому колесу 2, по отношению к мгновенному центру скоростей $\mathscr{P}$ колеса: $v_A = r_2\omega_2$. (7)

Сопоставляя формулы (6) и (7), находим: $\omega_2 = \dfrac{r_1 - r_2}{r_2}\dot{\varphi}$. (8)

Момент инерции зубчатого колеса 2 вычисляется по формуле

$$I_A = \frac{P_2 r_2^2}{2g} . \qquad (9)$$

После подстановки значений v_A, ω_2 и I_A соответственно из формул (6), (8) и (9) выражение (5) примет вид $T^{(2)} = \frac{3}{4}\frac{P_2}{g}(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}^2$. (10)

Воспользовавшись формулами (3), (4) и (10), запишем выражение кинетической энергии планетарного механизма:

$$T = \frac{2P + 9P_2}{12g}(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}^2. \quad (11)$$

Вычислим частную производную кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{\varphi}$: $\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{2P + 9P_2}{6g}(r_1 - r_2)^2\dot{\varphi}$ и возьмем производную полученного результата по времени: $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}} = \frac{2P + 9P_2}{12g}(r_1 - r_2)^2\ddot{\varphi}$. (12)

Заметив, что кинетическая энергия T системы, определенная формулой (11), не зависит от обобщенной координаты φ, находим:

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi} = 0. \quad (13)$$

После подстановки выражений (2), (12), (13) в уравнение Лагранжа получим дифференциальное уравнение движения механизма для обобщенной координаты φ:

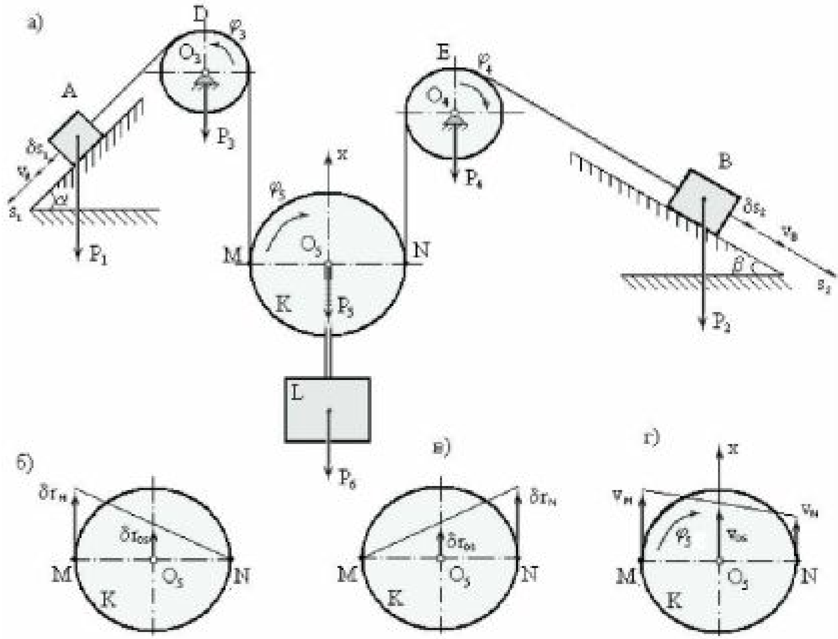
$$\frac{2P + 9P_2}{6g}\left(r_1 - r_2\right)^2\ddot{\varphi} = \frac{1}{2}\left[2m_0 - \left(P + 2P_2\right)\left(r_1 - r_2\right)\cos\varphi\right],$$

откуда определяем искомое угловое ускорение $\ddot{\varphi}$ кривошипа OA:

$$\ddot{\varphi} = 3g\frac{2m_0 - \left(P - 2P_2\right)\left(r_1 - r_2\right)\cos\varphi}{2P - 9P_2}. \quad (14)$$

Равномерное вращение кривошипа осуществляется при выполнении условия: $m_0 = \frac{1}{2}\left(P + 2P_2\right)\left(r_1 - r_2\right)\cos\varphi$.

Задача № 3. *К концам тонкой нерастяжимой нити привязаны груз A весом P_1 и груз B весом P_2. Нить переброшена через блоки D и E и охватывает снизу подвижной блок K. К оси O_5 подвижного блока K прикреплен груз L весом P_6; P_3 – вес блока D, P_4 – вес блока E, P_5 – вес блока K. Грузы A и B движутся по наклонным плоскостям, соответственно расположенным под углами α и β к горизонту. Определить ускорения грузов A, B и L. Блоки считать однородными круглыми дисками. Силами трения скольжения грузов о наклонные плоскости и массой нити пренебречь.*



Решение.

Система имеет две степени свободы. В качестве обобщенных координат выберем линейные координаты s_1 и s_2, направленные вдоль наклонных плоскостей вниз.

Запишем уравнения Лагранжа для обобщенных координат s_1 и s_2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1}-\frac{\partial T}{\partial s_1}=Q_{S1},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2}-\frac{\partial T}{\partial s_2}=Q_{S2}. \qquad (1)$$

Активными силами являются: $\boldsymbol{P_1}$ – вес груза A, $\boldsymbol{P_2}$ – вес груза B, $\boldsymbol{P_3}$ – вес блока D, $\boldsymbol{P_4}$ – вес блока E, $\boldsymbol{P_5}$ – вес блока K, $\boldsymbol{P_6}$ – вес груза L. Реакции связей учитывать не следует, так как все связи, наложенные на систему, идеальны (наклонные плоскости идеально гладкие, трение в осях блоков отсутствует, нити предполагаются нерастяжимыми и натянутыми).

Для определения обобщенных сил Q_{S_1} и Q_{S_2} дадим грузам A и B соответственно возможные перемещения δs_1 и δs_2, направленные параллельно линиям наибольшего ската наклонных плоскостей в сторону возрастания координат s_1 и s_2.

Для вычисления обобщенной силы Q_{S_1} дадим системе обобщенное возможное перемещение δs_1, считая при этом δs_2 равным нулю, т. е. $\delta s_1 \neq 0; \delta s_2 = 0$. (Это осуществимо, так как s_1 и s_2 являются независимыми обобщенными координатами.)

Таким образом, груз B, блок E и правая ветвь нити от груза B до точки N находятся в покое. При возможном перемещении груза A вниз на δs_1, ввиду нерастяжимости нити, точка M нити получит возможное перемещение δr_M по вертикали вверх, равное по модулю δs_1. Учитывая, что точка N нити останется при этом в покое, определим возможное перемещение оси блока δr_{O_5} (рис. б), равное по модулю половине модуля возможного перемещения δr_M, т. е.

$$\delta r_{O5} = \frac{\delta r_M}{2} = \frac{\delta s_1}{2}. \tag{2}$$

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению δs_1 груза A:

$$\delta A = P_1 \sin\alpha \delta s_1 - (P_5 + P_6)\delta r_{O5}.$$

Принимая во внимание формулу (2), находим

$$\delta A = \left[P_1 \sin\alpha - \frac{1}{2}(P_5 + P_6) \right] \delta s_1. \tag{3}$$

Работа силы тяжести $\boldsymbol{P_2}$ равна нулю, так как $\delta s_2 = 0$, работа сил тяжести $\boldsymbol{P_3}$ и $\boldsymbol{P_4}$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Обобщенной силой Q_{S_1} является коэффициент, стоящий при обобщенном возможном перемещении в уравнении (3), т. е.

$$Q_{S_1} = P_1 \sin\alpha - \frac{1}{2}(P_5 + P_6). \tag{4}$$

Для вычисления обобщенной силы Q_{S_2} дадим системе обобщенное возможное перемещение δs_2, считая при этом δs_1 равным нулю: $\delta s_2 \neq 0; \delta s_1 = 0$.

Это значит, что груз A, блок D и левая ветвь нити от груза A до точки M нити находятся в покое. При возможном перемещении груза B на δs_2 вниз, ввиду нерастяжимости нити, точка N нити получит возможное перемещение δr_N по вертикали вверх, равное величине модулю возможного перемещения δs_2. Учитывая, что точка M нити остается при этом в покое, находим (рис. *в*)

$$\delta r_{O5} = \frac{\delta r_N}{2} = \frac{\delta s_2}{2}. \qquad (5)$$

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению δs_2:

$$\delta A = P_2 \sin\beta \delta s_2 - (P_5 + P_6)\delta r_{O5}.$$

Учитывая формулу (5), имеем:

$$\delta A = \left[P_2 \sin\beta - \frac{1}{2}(P_5 + P_6) \right] \delta s_2. \qquad (6)$$

Работа силы тяжести $\boldsymbol{P_1}$ равна нулю, так как $\delta s_1 = 0$, работа сил тяжести $\boldsymbol{P_3}$ и $\boldsymbol{P_4}$ равна нулю, так как точки приложения этих сил неподвижны. Обобщенной силой Q_{S_2} является коэффициент, стоящий при обобщенном возможном перемещении в уравнении (6), т. е.

$$Q_{S_2} = P_2 \sin\beta - \frac{1}{2}(P_5 + P_6). \qquad (7)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии T материальной системы, состоящей из шести масс: грузов A, B и L блоков D, E и K:

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)} + T^{(5)} + T^{(6)}. \qquad (8)$$

Грузы A и B имеют скорости v_A и v_B, направленные параллельно линиям наибольшего ската наклонных плоскостей. Проекции этих скоростей на оси s_1 и s_2 соответственно равны $\dot{s}_1$ и $\dot{s}_2$. Обозначим радиусы блоков D, E и K через r_3, r_4 и r_5. При этом угловые скорости блоков D и E выразятся так:

$$\dot{\varphi}_3 = \frac{\dot{s}_1}{r_3}, \quad \dot{\varphi}_4 = \frac{\dot{s}_2}{r_4}. \qquad (9)$$

Ввиду нерастяжимости нити скорость v_M точки M нити равна по величине скорости v_A груза A, т.е. $v_{Mx} = \dot{s}_1$. Аналогично $v_{Nx} = \dot{s}_2$. Нетрудно, воспользовавшись рис. *г)*, найти скорость оси O_5 блока K, совершающего плоское движение:

$$v_{O5x} = \frac{v_{Mx} + v_{Nx}}{2} = \frac{\dot{s}_1 + \dot{s}_2}{2}. \qquad (10)$$

Для определения угловой скорости $\dot{\varphi}_5$ блока K найдем скорость точки M, приняв за полюс точку N: $v_{Mx} = v_{Nx} + (v_{MN})_x$, т. е. $(v_{MN})_x = v_{Mx} - v_{Nx} = \dot{s}_1 - \dot{s}_2$.

Так как $(v_{MN})_x = |MN|\dot{\varphi}_5 = 2r_5\dot{\varphi}_5$, то $2r_5\dot{\varphi}_5 = \dot{s}_1 - \dot{s}_2$, откуда угловая скорость блока K: $\dot{\varphi}_5 = \dfrac{\dot{s}_1 - \dot{s}_2}{2r_5}$. (11)

Кинетические энергии грузов A и B, совершающих поступательное движение, имеют вид

$$T^{(1)} = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{s}_1^2, \; T^{(2)} = \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\dot{s}_2^2. \tag{12}$$

Вычислим кинетическую энергию блоков D и E, вращающихся вокруг неподвижных осей:

$$T^{(3)} = \frac{1}{2}I_{O5}\dot{\varphi}_3^2, \; T^{(3)} = \frac{1}{2}I_{O4}\dot{\varphi}_4^2.$$

Подставив значения моментов инерции блоков $\left(I_{O5} = \dfrac{P_3 r_3^2}{2g}, \quad I_{O4} = \dfrac{P_4 r_4^2}{2g} \right)$ и воспользовавшись формулами (9), находим

$$T^{(3)} = \frac{P_3\dot{s}_1^2}{4g}, \; T^{(4)} = \frac{P_4\dot{s}_2^2}{4g}. \tag{13}$$

Кинетическую энергию блока K, совершающего плоское движение, определим по формуле $T^{(5)} = \dfrac{1}{2}\dfrac{P_5}{g}v_{O5}^2 + \dfrac{1}{2}I_{O5}\dot{\varphi}_5^2$.

Подставив значение момента инерции блока K $\left(I_{O5} = \dfrac{P_5 r_5^2}{2g} \right)$ и воспользовавшись формулами (10) и (11), получим:

$$T^{(5)} = \frac{3}{16}\frac{P_5}{g}\left(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2\right) + \frac{1}{8}\frac{P_5}{g}\dot{s}_1\dot{s}_2. \tag{14}$$

Кинетическая энергия груза L, движущегося поступательно, имеет вид

$$T^{(6)} = \frac{1}{2}\frac{P_6}{g}v_{O_5}^2.$$

Применив формулу (10), определяем

$$T^{(6)} = \frac{1}{8}\frac{P_6}{g}\left(\dot{s}_1 + \dot{s}_2\right)^2. \qquad (15)$$

Для вычисления кинетической энергии T материальной системы подставляем в формулу (8) выражения кинетической энергии из формул (12) (15). В итоге получаем:

$$T = \frac{1}{2}\frac{P_1}{g}\dot{s}_1^2 + \frac{1}{2}\frac{P_2}{g}\dot{s}_2^2 + \frac{1}{4}\frac{P_3}{g}\dot{s}_1^2 + \frac{1}{4}\frac{P_4}{g}\dot{s}_2^2 +$$

$$+\frac{3}{16}\frac{P_5}{g}(\dot{s}_1^2 + \dot{s}_2^2) + \frac{1}{8}\frac{P_5}{g}\dot{s}_1\dot{s}_2 + \frac{1}{8}\frac{P_6}{g}(\dot{s}_1 + \dot{s}_2)^2,$$

т. е.

$$T = \frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6}{16g}\dot{s}_1^2 + \frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{16g}\dot{s}_2^2 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g}\dot{s}_1\dot{s}_2. \qquad (16)$$

Для составления системы уравнений Лагранжа второго рода следует вычислить частные производные кинетической энергии T по обобщенным скоростям $\dot{s}_1$ и $\dot{s}_2$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} = \frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 - 2P_6}{8g}\dot{s}_1 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g}\dot{s}_2,$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} = \frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{8g}\dot{s}_2 - \frac{P_5 + 2P_6}{8g}\dot{s}_1$$

и взять производные полученных результатов по времени

$$\left.\begin{aligned} \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_1} &= \frac{8P_1 + 4P_3 + 3P_5 + 2P_6}{8g}\ddot{s}_1 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g}\ddot{s}_2 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{s}_2} &= \frac{8P_2 + 4P_4 + 3P_5 + 2P_6}{8g}\ddot{s}_2 + \frac{P_5 + 2P_6}{8g}\ddot{s}_1 \end{aligned}\right\}. \qquad (17)$$

Учитывая, что кинетическая энергия T, определенная формулой (16) не зависит от обобщенных координат s_1 и s_2, имеем

$$\frac{\partial T}{\partial s_1} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial s_2} = 0. \qquad (18)$$

После подстановки формул (4), (7), (17) и (18) в уравнение (1) получим уравнения Лагранжа второго рода для обобщенных координат s_1 и s_2:

$$\frac{8P_1+4P_3+3P_5+2P_6}{8g}\ddot{s}_1+\frac{P_5+2P_6}{8g}\ddot{s}_2=P_1\sin\alpha-\frac{1}{2}\left(P_5+P_6\right),$$

$$\frac{8P_2+4P_4+3P_5+2P_6}{8g}\ddot{s}_2+\frac{P_5+2P_6}{8g}\ddot{s}_1=P_2\sin\beta-\frac{1}{2}\left(P_5+P_6\right).$$

Решая эту систему, получим:

$$\ddot{s}_1=8g\frac{D(C-B)-C\cdot P_2\sin\beta+B\cdot P_1\sin\alpha}{AB-C^2},$$

$$\ddot{s}_2=8g\frac{D(C-A)+A\cdot P_2\sin\beta-C\cdot P_1\sin\alpha}{AB-C^2},$$

$$w_{O5}=4g\frac{D(2C-A-B)+(A-C)P_2\sin\beta+(B-C)P_1\sin\alpha}{AB-C^2},$$

где

$8P_1+4P_3+3P_5+2P_6=A$,

$8P_2+4P_4+3P_5+2P_6=B$,

$P_5+2P_6=C$ и $\dfrac{P_5+P_6}{2}=D$.

§12. Список задач для самостоятельной работы [2]

26.1, 26.5, 26.6, 26.9.

27.1, 27.3, 27.12, 27.13, 27.34, 27.42, 27.53, 27.56.

28.1, 28.6, 28.7, 28.15, 28.17, 28.21.

29.7, 29.14.

30.4, 30.6, 30.11, 30.12, 30.15, 30.19, 30.22.

32.1, 32.2, 32.5, 32.16, 32.24, 32.26, 32.37, 32.53, 32.55, 32.57, 32.68, 32.70, 32.78, 32.79, 32.86, 32.93, 32.94, 32.96, 32.98, 32.99.

34.2, 34.3, 34.9, 34.11, 34.12, 34.15, 34.21.

35.3, 35.4, 35.10, 35.13, 35.14, 35.19.

36.3, 36.6, 36.9.

37.1, 37.3, 37.9, 37.14, 37.34, 37.39, 37.43, 37.46, 37.53, 37.56.

38.2, 38.4, 38.9, 38.20, 38.24, 38.27, 38.30, 38.40, 38.42, 38.44, 38.46, 38.47, 38.50.

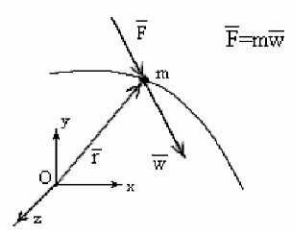
48.5, 48.6, 48.12, 48.13, 48.28, 48.29, 48.30, 48.35, 48.44.

§13. Основные формулы динамики

Второй закон Ньютона:

$$m\overline{w}=\overline{F},$$

где m – инертная масса точки,
$\overline{w}$ – ускорение,
$\overline{F}$ – сила.



$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{y} = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ m\ddot{z} = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} m\left(\dfrac{d^2r}{dt^2} - r\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2\right) = F_r\left(t, r, \varphi, z, \dfrac{dr}{dt}, \dfrac{d\varphi}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \\ m\left(r\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = F_\varphi\left(t, r, \varphi, z, \dfrac{dr}{dt}, \dfrac{d\varphi}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \\ m\left(\dfrac{d^2z}{dt^2}\right) = F_z\left(t, r, \varphi, z, \dfrac{dr}{dt}, \dfrac{d\varphi}{dt}, \dfrac{dz}{dt}\right) \end{cases}.$$

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2S}{dt^2} = F_\tau\left(t, S, \dfrac{dS}{dt}\right) \\ m\dfrac{dS}{dt}\dfrac{1}{\rho} = F_\tau\left(t, S, \dfrac{dS}{dt}\right) \\ 0 = F_n\left(t, S, \dfrac{dS}{dt}\right) \end{cases}.$$

$$J_z = \sum_{k=1}^{N} m_k r_k^2 .$$

$$J_z = \int_{(M)} r^2 dm = \int_{(V)} \rho(x, y, z) r^2 dv = \frac{M}{V} \int_{(V)} r^2 dv .$$

$$J_{Z1} = J_{Zc} + Md^2 .$$

$$J_z = MR^2 .$$

$$M\overline{w}_c = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k^e .$$

$$\frac{d}{dt}\overline{Q} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^{(e)} ; \qquad \overline{Q}_1 - \overline{Q}_0 = \int_0^t \overline{F}(t) dt .$$

$$\frac{dL_Z}{dt} = \sum_{k=1}^{n} mom_Z(F_k^e) .$$

$$T_1 - T_0 = \sum A_{10}(\overline{F}) .$$

$$T = \sum_{k=1}^{n} \frac{m_k v_k^2}{2} .$$

$T = \dfrac{Mv_C^2}{2}$, где М – масса тела; v_C – скорость центра инерции.

$T = \dfrac{J_Z \omega^2}{2}$, где J_Z – момент инерции тела относительно оси вращения, ω – угловая скорость.

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} .$$

$$\delta A = \overline{F} \cdot d\overline{r} = Fds\cos(\overline{F}, \overline{\tau}) = F_x dx + F_y dy + F_z dz .$$

$$A = \int_L \overline{F} d\overline{r} = \int_L F_\tau ds = \int_L (F_x dx + F_y dy + F_z dz) .$$

$$A = Fs\cos(\overline{F}, \overline{s}) .$$

$$A_{12}(\overline{P}) = P(z_{C_1} - z_{C_2}) .$$

Работа силы $F_x = -cx$; $A_{12} = \frac{c}{2}\left(x_1^2 - x_2^2\right)$.

$\delta A = \left[\overline{R} \cdot \overline{v}_O + \overline{M}_O \overline{\omega}\right] dt$;

$\delta A = M_Z d\varphi$; $A_{12} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_Z d\varphi$.

Сумма работ всех внутренних сил в твердом теле равна нулю.

$N = \frac{\delta A}{dt} = \overline{F} \cdot \overline{v} = F_\tau v = F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z}$.

$N = \overline{R} \cdot \overline{v}_O + \overline{M}_O \cdot \overline{\omega}$.

$N = M_Z \omega$.

$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$, $\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}$, $\frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$ – ***условие потенциальности поля.***

$\delta A = -d\Pi$; $A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2$, где $\Pi(x, y, z)$ – потенциальная энергия точки;

$\Pi = \pm Ph$, где h – высота центра тяжести относительно нулевой поверхности,

$\Pi = \frac{c\Delta^2}{2}$.

Приращение кинетической энергии системы при перемещении ее из одного положения в другое равно сумме работ, произведенных на этом перемещении всеми силами, приложенными к системе, т.е. $T_2 - T_1 = A_{12}$.

Производная от кинетической энергии системы равна сумме мощностей всех сил, действующих на эту систему, т.е. $\frac{dT}{dt} = N$.

Если система движется в потенциальном силовом поле, то полная механическая энергия, равная сумме кинетической и потенциальной энергий, остается постоянной, т. е. Т + П = const.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, \ldots, s),$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_S$ – обобщенные координаты системы;

s – число степеней свободы системы;

$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_S$ – обобщенные скорости;

T – кинетическая энергия системы;

$Q_1, Q_2, \ldots, Q_S$ – обобщенные силы.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0,$$ где $L = T - \Pi$ – функция Лагранжа.

Для составления уравнений Лагранжа следует:

- установить число степеней свободы и выбрать обобщенные координаты;
- предположив, что система движется так, что все обобщенные координаты увеличиваются, составить выражения для кинетической энергии системы, при этом все переменные величины, входящие в T, должны быть выражены через обобщенные координаты и обобщенные скорости, т. е. $T = T(q_1, q_2, ..., q_S; \dot{q}_1, \dot{q}_2, ..., \dot{q}_S; t)$ (в случае стационарных связей время t не входит в выражение T);
- определить частные производные $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$; определить производные $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\right)$, считая все переменные, входящие в $\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}$, функциями времени t;
- найти обобщенные силы; подставить все найденные величины в исходное уравнение.

Список рекомендуемой литературы

Основная литература

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики : учеб. для студ. втузов / С.М. Тарг. 12-е изд., стер. М. : Высш. шк., 2002. 416 с.
2. Мещерский И.В. Задачи по теоретической механике : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / И.В. Мещерский ; под ред. В.А. Пальмова, Д.Р. Меркина. – СПб. : Лань, 2004. 447 с.
3. Яблонский А.А. Курс теоретической механики : учеб. пособие для студ. вузов, обуч. по техн. специальностям / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. 8-е изд., стер. СПб. : Лань, 2001. 763 с.

Дополнительная литература

4. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике : учеб. пособие для студ. втузов / А.А. Яблонский [и др.]. – М. : Интеграл-Пресс, 2004. – 382 с.
5. Бать М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах : учеб. пособие для студ. втузов : в 3 т. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М. : Наука, 1990. – Т. 1 : Статика и кинематика. – 670 с.
6. Краткий справочник для инженеров и студентов. Высшая математика. Физика. Теоретическая механика. Сопротивление материалов / А.Д. Полянин [и др.]. – М. : Междунар. прогр. образования, 1996. – 431 с.
7. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики : учеб. для гос. ун-тов / Н.Н. Бухгольц; в переработке и с доп. С.М. Тарга. М. : Наука, 1972. – Ч. 1 : Кинематика, статика, динамика материальной точки. – 467 с.