

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ДИНАМИКА
Учебное пособие

Настоящее учебное пособие состоит из восьми глав. В первой главе приводятся исторические этапы развития теоретической механики, дается напоминание формул и действий векторной алгебры. Во второй главе излагается динамика материальной точки. В третьей и четвертой главах даётся динамика механических систем, в пятой и шестой главах - принципы механики, в седьмой - уравнения равновесия и уравнения движения системы в обобщенных координатах. Восьмая глава посвящена теории удара. Для облегчения усвоения материала в пособии приведено большое количество примеров, часто прикладного значения.

Пособие рассчитано на студентов дневного и заочного видов обучения механических и строительных специальностей, может быть полезным для аспирантов и инженерно-технических работников.

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|----|
| ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ..... | 6 |
| 1. Из истории развития механики..... | 6 |
| 2. Предмет теоретической механики | 9 |
| 3. Векторы..... | 10 |
| ГЛАВА II. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ..... | 21 |
| 1. Предмет и задачи динамики..... | 21 |
| 2. Законы динамики. Инерциальные системы отсчета..... | 22 |
| 3. Основные виды сил..... | 23 |
| 4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки..... | 24 |
| 5. Решение первой и второй задач динамики..... | 25 |
| 6. Общие теоремы динамики точки..... | 31 |
| 6.1. Теорема об изменении количества движения точки..... | 31 |
| 6.2. Теорема об изменении момента количества движения точки..... | 32 |
| 6.3. Работа силы. Мощность..... | 33 |
| 6.4. Примеры вычисления работы силы | 35 |
| 6.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки..... | 37 |
| 6.6. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия..... | 38 |
| 6.7. Закон сохранения механической энергии..... | 41 |
| 6.8. Примеры вычисления потенциальной энергии..... | 42 |
| 6.9. Примеры применения общих теорем динамики точки для решения задач..... | 43 |
| 7. Динамика относительного движения точки..... | 49 |
| 7.1. Дифференциальные уравнения относительного движения точки..... | 49 |
| 7.2. Уравнение относительного покоя точки..... | 50 |
| 7.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки при относительном движении..... | 51 |
| 7.4. Относительный покой и относительное движение вблизи поверхности Земли..... | 52 |
| 7.5. Примеры на относительное движение материальной точки..... | 56 |
| 7.6. Невесомость..... | 60 |
| ГЛАВА III. ГЕОМЕТРИЯ МАСС..... | 62 |
| 1. Механическая система | 62 |
| 2. Масса системы. Центр масс..... | 63 |

| | | |
|---|---|------------|
| 3. | Момент инерции твердого тела..... | 64 |
| 3.1. | Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции..... | 64 |
| 3.2. | Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса)..... | 65 |
| 3.3. | Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции тела..... | 66 |
| 3.4. | Момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через начало координат..... | 68 |
| 3.5. | Эллипсоид инерции..... | 69 |
| 3.6. | Момент инерции тела относительно произвольной оси..... | 70 |
| 3.7. | Вычисление тензора инерции..... | 71 |
| 3.8. | Примеры определения моментов инерции тел..... | 73 |
| ГЛАВА IV. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ | | 81 |
| 1. | Дифференциальные уравнения движения системы..... | 81 |
| 2. | Теорема о движении центра масс..... | 82 |
| 3. | Закон сохранения движения центра масс..... | 83 |
| 4. | Примеры применения теоремы о движении центра масс механической системы..... | 85 |
| 5. | Дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела..... | 88 |
| 6. | Теорема об изменении количества движения системы..... | 89 |
| 7. | Закон сохранения количества движения системы..... | 91 |
| 8. | Примеры применения теоремы об изменении количества движения системы..... | 91 |
| 9. | Кинетический момент системы материальных точек..... | 95 |
| 10. | Теорема об изменении кинетического момента системы..... | 100 |
| 11. | Закон сохранения кинетического момента системы..... | 102 |
| 12. | Примеры применения теоремы об изменении кинетического момента системы..... | 103 |
| 13. | Кинетическая энергия системы..... | 108 |
| 14. | Теорема об изменении кинетической энергии системы..... | 111 |
| 15. | Закон сохранения механической энергии..... | 113 |
| 16. | Примеры применения теоремы об изменении кинетической энергии системы..... | 114 |
| ГЛАВА V. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА..... | | 122 |
| 1. | Принцип Даламбера для материальной точки..... | 122 |
| 2. | Принцип Даламбера для механической системы..... | 122 |

| | | |
|---|--|------------|
| 3. | Главный вектор и главный момент сил инерции..... | 123 |
| 4. | Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела.... | 127 |
| 5. | Примеры применения принципа Даламбера..... | 129 |
| ГЛАВА VI. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ..... | | 136 |
| 1. | Связи и их классификация..... | 136 |
| 2. | Возможные перемещения. Идеальные связи..... | 138 |
| 3. | Принцип возможных перемещений..... | 140 |
| 4. | Общее уравнение динамики..... | 142 |
| 5. | Примеры решения задач..... | 143 |
| ГЛАВА VII. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ..... | | 151 |
| 1. | Обобщенные координаты и обобщенные скорости..... | 151 |
| 2. | Обобщенные силы..... | 153 |
| 3. | Условия равновесия системы в обобщенных координатах..... | 155 |
| 4. | Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)..... | 156 |
| 5. | Примеры решения задач..... | 161 |
| ГЛАВА VIII. ТЕОРИЯ УДАРА..... | | 172 |
| 1. | Явление удара..... | 172 |
| 2. | Удар точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение..... | 174 |
| 3. | Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе..... | 177 |
| 4. | Прямой центральный удар двух тел..... | 179 |
| 5. | Потеря кинетической энергии при ударе двух тел. Теорема Карно.... | 181 |
| 6. | Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе..... | 185 |
| 7. | Действие ударных сил на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Центр удара..... | 187 |
| 8. | Действие ударных сил на твердое тело, совершающее плоское движение..... | 191 |
| 9. | Примеры действия ударных сил..... | 191 |
| Литература..... | | 201 |

ГЛАВА I. ВВЕДЕНИЕ

1. Из истории развития механики.* Механика является одной из древнейших наук, возникновение и развитие которой обусловлено потребностями практики. Сохранившиеся до нашего времени египетские пирамиды и другие останки древних сооружений заставляют нас предполагать, что у древних народов имелись определенные познания некоторых законов механики, без знания которых невозможны были бы такие величественные сооружения.

Великий мыслитель и ученый древности Аристотель, живший в IV веке до нашей эры (384-322), в своих сочинениях „Физика”, „Механика”, „О мире и о небе” первый вводит термин „механика”, который происходит от греческого слова *μηχανη*, что означает: изобретение, машина, сооружение. В сочинениях Аристотеля, носящих в основном философский, а не естественнонаучный характер, излагается учение о равновесии рычага и других машин, а также общее учение о движении. Однако основной закон, связывающий силу и движение, был им сформулирован неправильно. Так, Аристотель считал, что тело, движущееся прямолинейно с постоянной скоростью, находится под действием постоянной силы и др. Ошибочность этих взглядов была доказана только через 2000 лет Галилеем [1].

Появление “Начал” Евклида (III век до н.э.) дало толчок математической мысли древности и повлекло за собой сочинения знаменитого сиракузского геометра и механика Архимеда (287-212 до н.э.), который установил закон равновесия рычага и законы равновесия плавающих тел. С этого времени и начинается развитие механики как науки в полном смысле этого слова.

Интенсивное развитие естественных наук, а с ними и механики, начинается в эпоху Возрождения, с XV века, сначала в Италии, а затем и в других странах. Блестящим представителем эпохи Возрождения является гениальный итальянский художник, геометр, механик и инженер Леонардо да Винчи (1452-1519), которому принадлежат исследования в области теории механизмов, трения в машинах и движения по наклонной плоскости.

Другой замечательный деятель этой эпохи, великий польский ученый Николай Коперник (1473-1543) создал свою гелиоцентрическую картину мира, которая, сменив геоцентрическую картину Птолемея, произвела большой переворот в научном мировоззрении и оказала огромное влияние на все последующее развитие естествознания. Благодаря работам Коперника и многочисленным наблюдениям датского астронома Тихо Браге (1546-1601), немецкий астроном

*) Материалы «Из истории развития механики» позаимствованы из книг [1,2,3]

Иоганн Кеплер (1571-1630) сформулировал три закона движения планет, которые впоследствии привели к открытию Ньютона закону всемирного тяготения.

Фундаментальное значение для этого периода развития механики имели работы гениального итальянского ученого Галилео Галилея (1564-1642). До Галилея развивалась главным образом та часть механики, которая посвящена изучению законов равновесия тел, т.е. статика. Что же касается законов движения тел под действием сил, т.е. динамики, то в этой области существовали довольно смутные представления. Галилей установил правильное понимание законов движения под действием сил, положив, таким образом, начало динамике. Он сформулировал принцип относительности классической механики и принцип инерции, установил законы свободного падения тел в безвоздушном пространстве. Им была построена количественная теория движения тяжелого тела по наклонной плоскости и теория движения тела, брошенного под углом к горизонту.

Новый период развития механики начинается со времени великого английского математика и механика Исаака Ньютона (1643-1727), который завершил построение основ современной классической механики. В своем сочинении “Математические начала натуральной философии” Ньютон как бы подводит итоги работы всех своих предшественников и создает логически стройную систему основных законов динамики. Он впервые вводит понятие массы, устанавливает основной закон динамики, связывающий массу точки, ее ускорение и действующую на нее силу и закон равенства действия и противодействия. Открытый им закон всемирного тяготения лег в основу теоретической астрономии и небесной механики.

Установление общих законов механики и закона всемирного тяготения является научным открытием первостепенного значения.

В XVIII веке методы механики начали быстро совершенствоваться благодаря применению мощного математического аппарата – анализа бесконечно малых. Огромная заслуга в приложении методов анализа бесконечно малых к решению задач динамики принадлежит великому математику и механику Леонарду Эйлеру (1707-1783), швейцарцу по происхождению, являвшемуся с 1727 года действительным членом Российской академии наук.

Эйлер разработал аналитические методы решения задач динамики и заложил основы динамики твердого тела, имеющего одну неподвижную точку. Ему принадлежит первый курс механики в аналитическом изложении, изданный в Петербурге в 1736 году.

В этот же период огромный вклад в развитие механики вносит французский энциклопедист Ж.Л. Даламбер (1717-1783), который установил основной принцип механики. Этот принцип дает общий метод решения динамических задач путем составления уравнений движения любой материальной системы в форме уравнений статики. Аналитическое направление в развитии механики достигло наиболее широких обобщений в работе крупнейшего французского ученого Ж.Л. Лагранжа (1736-1813) “Аналитическая механика”, вышедшей в 1783 году. В этом сочинении вся механика изложена строгим аналитическим методом.

Дальнейшее развитие аналитической механики связано с трудами П.С. Лапласа (1749-1827), Ж.Б. Фурье (1768-1830), К.Ф. Гаусса (1777-1855), С.Д. Пуассона (1781-1840), У.Р. Гамильтона (1805-1865), М.В. Остроградского (1801-1861), Г.Л. Гельмгольца (1821-1894), С.В. Ковалевской (1850-1891), А.М. Ляпунова (1857-1918), С.А. Чаплыгина (1869-1942) и многих других выдающихся ученых.

В начале XX века А. Эйнштейн (1879-1955) создал теорию относительности, на которой основывается релятивистская механика. Согласно теории относительности не существует абсолютного времени и абсолютного пространства, служащего простым вместилищем тел. На самом деле свойства пространства и времени существенно зависят от взаимодействующих в них тел. Однако становление релятивистской механики не привело к отрицанию классической механики. Классическая механика, являясь предельным случаем релятивистской механики, не теряет своего значения и продолжает сохранять свою огромную ценность как мощное оружие научного исследования различных вопросов естествознания и техники, и ее законы дают при этом вполне достаточную для практики точность. Поправки, изменения, вносимые в законы классической механики теорией относительности и квантовой механикой, исчезающие малы в обычных условиях и становятся заметными только при скоростях, близких к скорости света. Поэтому классическая механика никогда не потеряет своего научного значения и практической ценности.

В России первые научные исследования по механике появляются после открытия в 1725 году в Петербурге Российской академии наук. В ее стенах работали такие крупнейшие механики XVIII века, как Л. Эйлер, Д. Бернулли и другие, оставившие после себя прекрасные научные школы. В Московском университете, основанном в 1755 году, начинают свою деятельность талантливые механики-теоретики С.К. Котельников (1723-1808), М.Е. Головин (1756-1790), С.Е. Гурьев (1764-1813) и др.

Крупнейшим механиком аналитического направления был академик М.В. Остроградский, научное наследие которого оказало сильное влияние на всю последующую деятельность школы механиков-аналитиков. Ученик М.В. Остроградского И.А. Вышнеградский (1831-1895) разработал теорию автоматического регулирования, получившей большое значение в наши дни. В области механики машин и механизмов плодотворно работал академик П.Л. Чебышев (1821-1894).

Блестящих результатов в самых различных разделах механики достиг гениальный ученый Н.Е. Жуковский – основоположник аэромеханики и теории аэроплана.

Исключительное значение для теоретической механики имеют работы блестящего математика и механика А.М. Ляпунова. Созданная им теория устойчивости равновесия и движения имеет громадное прикладное значение.

Среди крупнейших механиков России следует также назвать С.А. Чаплыгина, И.В. Мещерского, А.Н. Крылова и других, внесших значительный вклад в развитие теоретической механики.

Теоретическая механика является одним из важнейших курсов, изучаемых в высшей технической школе. Ее законы и выводы широко применяются при решении самых разнообразных прикладных задач. Любые технические работы при проектировании и создании сооружений, машин и механизмов, летательных аппаратов и т.п. основаны на законах теоретической механики.

2. Предмет теоретической механики. Теоретическая механика — есть наука об общих законах механического движения и взаимодействия материальных тел.

В широком смысле слова под движением материи понимаются любые изменения, происходящие при тепловых, химических, электромагнитных, внутриатомных и других процессах. В теоретической механике изучается одна из форм движения – механическое движение. Под механическим движением понимается изменение с течением времени положения материальных тел относительно друг друга. Так как состояние покоя есть частный случай механического движения, то в задачу теоретической механики входит также изучение равновесия материальных тел.

Механическое движение тел происходит во времени и пространстве. За пространство, в котором происходит движение тел, принимают евклидово трехмерное пространство. Время в классической механике считается не связанным

с движущейся материей, т.е. абсолютным, протекающим одинаково во всех точках пространства и всех системах отсчета.

Трехмерное евклидово пространство и абсолютное время отражают реальные свойства пространства и времени лишь приближенно. Тем не менее, это приближение дает вполне достаточную для практики точность при изучении движений тел со скоростями, малыми по сравнению со скоростью света.

Так как механическое движение тел происходит относительно друг друга, то для изучения движения конкретного тела выбирают систему отсчета (совокупность какой-либо системы координат и часов). Так как время универсально, можно ограничиться указанием только системы координатных осей. Систему координатных осей связывают с телом, по отношению к которому изучается движение данного тела.

Для учета механического взаимодействия между телами вводится понятие силы. Под силой понимается мера механического взаимодействия материальных тел, в результате которого взаимодействующие тела могут сообщать друг другу ускорения или деформироваться (изменять свою форму). Силы могут возникать как при непосредственном контакте тел, так и при отсутствии такого (например, силы притяжения небесных тел).

Теоретическую механику обычно делят на три раздела: кинематику, статику и динамику.

В кинематике рассматривается движение тел с геометрической точки зрения, то есть без учета силовых взаимодействий тел.

В статике излагается общее учение о силах, устанавливаются условия равновесия материальных тел под действием сил.

В динамике изучается движение материальных тел под действием сил, т.е. с учетом причин, вызывающих то или иное движение.

3. Векторы. *1. Величины скалярные и векторные.* Скалярной величиной называется величина, которая определяется одним числом. Скаляр может быть представлен как положительным, так и отрицательным действительным числом. Например, скалярными величинами являются: масса, температура, энергия, объем и другие физические величины.

Вектором называется направленный отрезок, который вполне определяется заданием его длины, измеренной в некотором масштабе, и его направлением в пространстве. Такие физические величины как скорость, ускорение, сила в механике рассматриваются как величины векторные.

В зависимости от свойств изображающей им величины вектор может быть свободным, скользящим и неподвижным. Свободный вектор может быть приложен в любой точке пространства, скользящий вектор – в любой точке линии действия вектора, а неподвижный – в некоторой фиксированной точке.

Вектор изображается прямолинейным отрезком AB (рис. 1.1), длина которого в известном масштабе соответствует численному значению вектора, а направление совпадает с направлением вектора. Концы A и B отрезка AB , изображающего вектор, называются соответственно началом и концом вектора \overline{AB} .

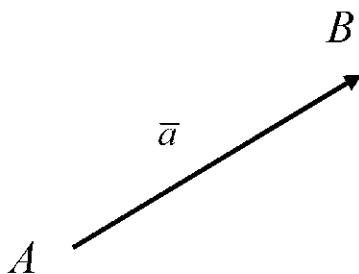


Рис. 1.1

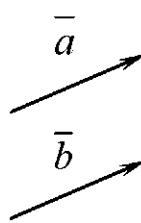


Рис. 1.2

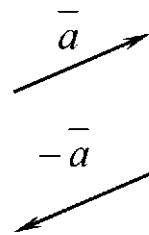


Рис. 1.3

Часто вектор обозначают одной буквой с чертой над ней:

$$\overline{AB} = \bar{a}.$$

Модуль вектора \bar{a} обозначают символом $|\bar{a}|$ или просто буквой a .

Два вектора считаются равными, если они имеют равные модули, параллельны и направлены в одну сторону (рис. 1.2), т.е. если $a = b$ и $\bar{a} \downarrow\downarrow \bar{b}$, то $\bar{a} = \bar{b}$.

При изменении направления вектора \bar{a} на противоположное получим вектор, противоположный \bar{a} , который обозначим символом $-\bar{a}$ (рис. 1.3).

Два вектора называются параллельными или коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Векторы называются компланарными, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Вектор единичной длины называется единичным вектором или ортом. При помощи единичного вектора всякий вектор может быть представлен как произведение модуля на единичный вектор, т.е.

$$\bar{a} = a\bar{a}_0, \quad (1.1)$$

где \bar{a}_0 – единичный вектор для \bar{a} .

Из определения следует, что $|\bar{a}_0| = 1$,

$$\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{a}. \quad (1.2)$$

2. Проекция вектора на ось и на плоскость. Проекцией вектора $\overline{AB} = \bar{a}$ на ось x (рис.1.4) называется скалярная величина, взятая со знаком плюс или минус длина отрезка A_1B_1 , заключенного между проекциями начала и конца вектора \overline{AB} на эту ось, т.е.

$$a_x = \pm |A_1B_1| = AB \cos \alpha, \quad (1.3)$$

где α - угол между вектором \bar{a} и положительным направлением оси x . Таким образом, проекция вектора на ось равна модулю вектора, умноженному на косинус угла между вектором и осью x . Согласно определению, проекция вектора на ось величина положительная или отрицательная в зависимости от угла α :

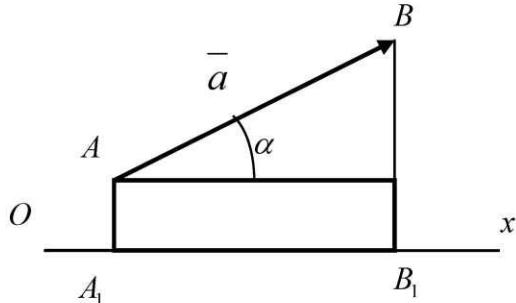


Рис. 1.4

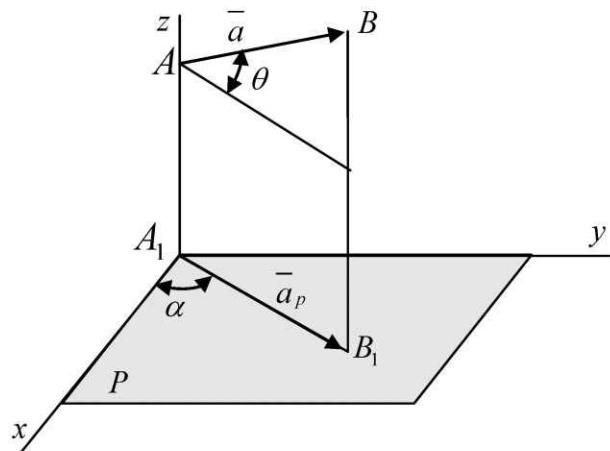


Рис. 1.5

$$F_x > 0, \text{ если } \alpha < 90^\circ; \quad F_x = 0, \text{ если } \alpha = 90^\circ;$$

$$F_x < 0, \text{ если } \alpha > 90^\circ; \quad F_x = F, \text{ если } \alpha = 0.$$

Проекцией вектора $\overline{AB} = \bar{a}$ на плоскость P называется вектор $\overline{A_1B_1}$, соединяющий проекции начала и конца вектора \overline{AB} на эту плоскость (рис.1.5). По определению $\bar{a}_p = \overline{A_1B_1}$ есть вектор, так как для его задания необходимо, кроме численной величины A_1B_1 , указать еще и направление этого отрезка в плоскости P . Модуль вектора \bar{a}_p определяется равенством

$$a_p = |A_1B_1| = a \cos \theta, \quad (1.4)$$

где θ - угол между векторами \bar{a} и \bar{a}_p .

В некоторых случаях для нахождения проекции вектора на ось сначала удобнее найти его проекцию на плоскость, в которой эта ось лежит, а затем найденную проекцию на плоскость спроектировать на данную ось. Например, в

случае, изображенном на рис. 1.5, при совмещении плоскости P с плоскостью oxy , будем иметь

$$\begin{aligned} a_x &= a_p \cos \alpha = a \cos \theta \cos \alpha, \\ a_y &= a_p \sin \alpha = a \cos \theta \sin \alpha, \\ a_p &= a_{xy} = a \cos \theta. \end{aligned} \quad (1.5)$$

3. *Аналитическое задание вектора.* Аналитически вектор вполне определяется тремя своими проекциями на оси координат. Эти проекции иногда называют координатами вектора. В механике мы будем пользоваться правой системой координат, то есть такой системой, в которой кратчайшее совмещение оси ox с осью oy происходит против часовой стрелки, если смотреть с положительного конца оси oz .

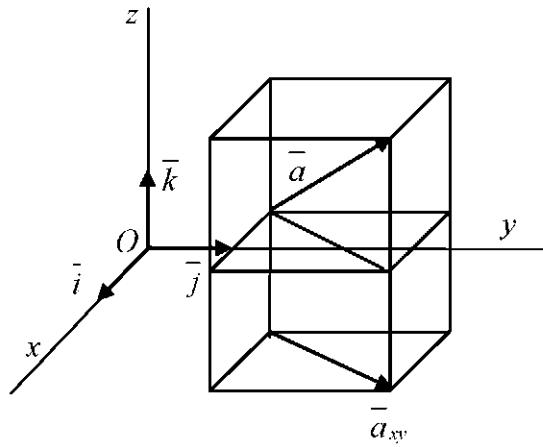


Рис. 1.6

Если задан вектор \bar{a} , то есть даны его модуль и направление, которое определяется направляющими косинусами, то известны и проекции вектора на оси координат (рис. 1.6)

$$\begin{aligned} a_x &= a \cos(\hat{\bar{a}}, \hat{i}); \\ a_y &= a \cos(\hat{\bar{a}}, \hat{j}); \\ a_z &= a \cos(\hat{\bar{a}}, \hat{k}), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ – орты осей x, y, z соответственно.

Обратно, если заданы проекции вектора на оси координат, то вектор определен. Действительно, возведя почленно в квадрат равенства (1.6) и складывая их, имеем

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.7)$$

Направляющие косинусы определяем по формулам:

$$\cos(\hat{\bar{a}}, \hat{i}) = a_x / a; \quad \cos(\hat{\bar{a}}, \hat{j}) = a_y / a; \quad \cos(\hat{\bar{a}}, \hat{k}) = a_z / a. \quad (1.8)$$

Составляющие вектора по осям координат будут равны:

$$\bar{a}_x = a_x \hat{i}, \quad \bar{a}_y = a_y \hat{j}, \quad \bar{a}_z = a_z \hat{k}. \quad (1.9)$$

4. Сложение и вычитание векторов. Суммой двух векторов \bar{a} и \bar{b} называется вектор $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, соединяющий начало вектора \bar{a} с концом вектора \bar{b} , если вектор \bar{b} отложен от конца вектора \bar{a} (рис. 1.7).

Сложение двух векторов обладает свойством коммутативности (переместительности)

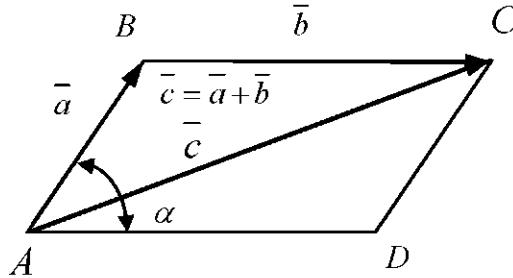


Рис. 1.7

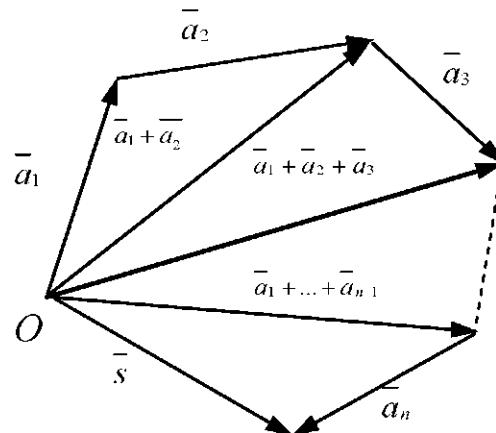


Рис. 1.8

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}.$$

Из ΔABC имеем

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha}. \quad (1.10)$$

Из (1.10) вытекает, что если $(\bar{a}, \bar{b}) = \hat{\pi}$, то

$$c = a + b, \quad (1.11)$$

если же $(\bar{a}, \bar{b}) = \pi$, то, полагая для определенности $a > b$, имеем

$$c = a - b. \quad (1.12)$$

Сумму нескольких векторов получим последовательным применением закона сложения двух векторов. В результате сумма из n векторов есть вектор, который изображается замыкающей стороной ломаной линии, составленной из слагаемых векторов; при этом начало каждого последующего слагаемого вектора откладывается от конца предыдущего, а замыкающий вектор направлен от начала первого вектора к концу последнего (рис. 1.8)

$$\bar{s} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k. \quad (1.13)$$

Составленный таким способом многоугольник называется векторным многоугольником.

Если векторный многоугольник замыкается, то есть если конец последнего из слагаемых векторов совпадает с началом первого, то сумма векторов равна нулю

$$\bar{s} = \sum_{k=1}^n \bar{a}_k = 0. \quad (1.14)$$

Сумма n векторов обладает также свойством ассоциативности (сочетательности), то есть

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3 + \dots + \bar{a}_n = (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + \bar{a}_3 + \bar{a}_4 + \dots + (\bar{a}_{n-1} + \bar{a}_n) = \\ &= (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3) + (\bar{a}_4 + \bar{a}_5 + \dots + \bar{a}_{n-1}) + \bar{a}_n \end{aligned} \quad (1.15)$$

и так далее.

Свойство коммутативности позволяет ассоциативность на любые сочетания слагаемых, например:

$$\begin{aligned} (\bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \bar{a}_3) + \bar{a}_4 + \dots + (\bar{a}_{n-1} + \bar{a}_n) &= (\bar{a}_2 + \bar{a}_5 + \bar{a}_7) + \\ &+ (\bar{a}_1 + \bar{a}_4 + \bar{a}_9) + \dots + \bar{a}_n. \end{aligned} \quad (1.16)$$

5. Разложение вектора по направлениям координатных осей.

a). Пусть задан вектор, $\bar{a} = \overline{OM}$, который нужно представить в виде суммы трех некомпланарных векторов, параллельных заданным прямым. Для этого через начало вектора \bar{a} проводим прямые Ol , Om и On , параллельные заданным направлениям, и на векторе \overline{OM} , как на диагонали, строим параллелепипед, ребра которого направлены по этим прямым (рис. 1.9).

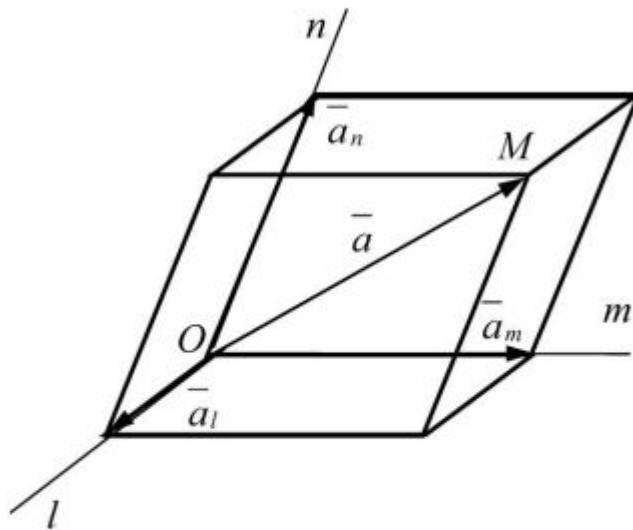


Рис. 1.9

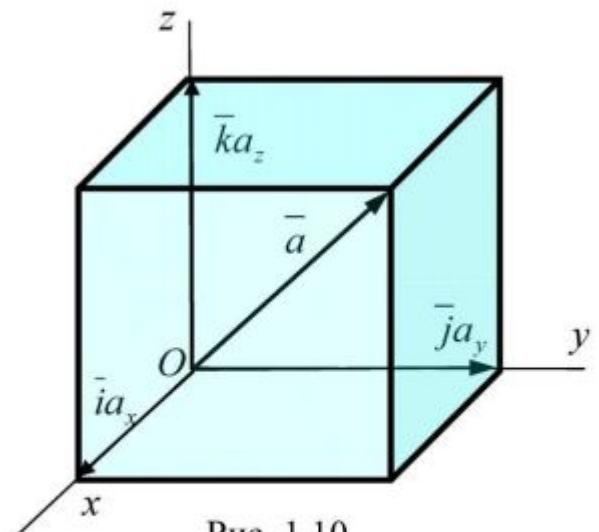


Рис. 1.10

Из рис. 1.9 видно, что

$$\bar{a} = \bar{a}_l + \bar{a}_m + \bar{a}_n, \quad (1.17)$$

где $\bar{a}_l, \bar{a}_m, \bar{a}_n$ – косоугольные составляющие вектора \bar{a} по осям l, m, n .

Равенство (1.17) также можно представить в виде:

$$\bar{a} = a_l \bar{l}_0 + a_m \bar{m}_0 + a_n \bar{n}_0, \quad (1.18)$$

где a_l, a_m, a_n – проекции вектора \bar{a} на оси l, m, n соответственно; $\bar{l}_0, \bar{m}_0, \bar{n}_0$ – орты осей l, m, n соответственно.

В случае прямоугольной системы координат xyz (рис. 1.10) имеем:

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y + \bar{a}_z, \quad (1.19)$$

или

$$\bar{a} = \bar{i} a_x + \bar{j} a_y + \bar{k} a_z. \quad (1.20)$$

б). Пусть вектор \bar{a} нужно разложить по двум направлениям, компланарным с ним. По аналогии с предыдущим случаем имеем (рис. 1.11)

$$\bar{a} = \bar{a}_l + \bar{a}_m = a_l \bar{l}_0 + a_m \bar{m}_0. \quad (1.21)$$

В случае прямоугольной системы координат xy (рис. 1.12)

$$\bar{a} = \bar{a}_x + \bar{a}_y = a_x \bar{i} + a_y \bar{j}. \quad (1.22)$$

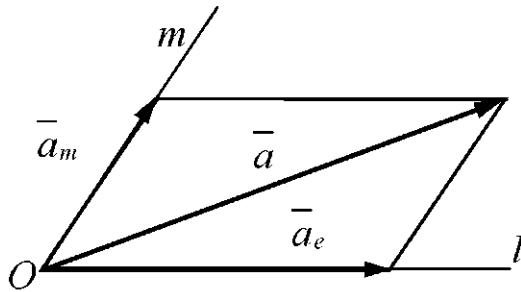


Рис. 1.11

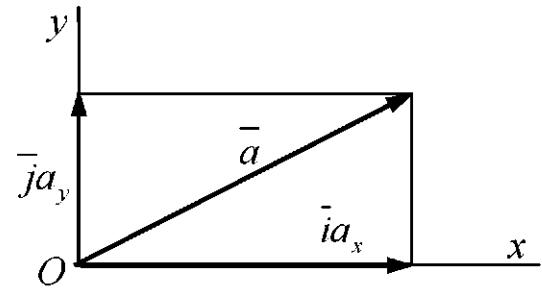


Рис. 1.12

6. *Аналитический способ сложения векторов.* Докажем следующую теорему: проекция суммы векторов на какую-либо ось равна алгебраической сумме проекций этих векторов на ту же ось.

Пусть имеем n векторов

$$\bar{a}_v = a_{v_x} \bar{i} + a_{v_y} \bar{j} + a_{v_z} \bar{k} \quad (v = 1, 2, \dots, n). \quad (1.23)$$

Складывая эти векторы, получим

$$\bar{S} = \sum_{v=1}^n \bar{a}_v = \bar{i} \sum a_{v_x} + \bar{j} \sum a_{v_y} + \bar{k} \sum a_{v_z}. \quad (1.24)$$

С другой стороны,

$$\bar{S} = S_x \bar{i} + S_y \bar{j} + S_z \bar{k}. \quad (1.25)$$

Сравнивая выражение (1.24) с равенством (1.25), имеем

$$S_x = \sum a_{v_x}; \quad S_y = \sum a_{v_y}; \quad S_z = \sum a_{v_z}. \quad (1.26)$$

7. Произведение векторов. Различают два вида умножения векторов: скалярное и векторное.

Скалярное произведение двух векторов \bar{a} и \bar{b} есть скалярная величина, равная произведению модулей a и b этих векторов, умноженному на косинус угла $(\bar{a}, \hat{\bar{b}})$ между ними.

Скалярное произведение векторов \bar{a} и \bar{b} будем обозначать символом $\bar{a} \cdot \bar{b}$. По определению

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = ab \cos(\bar{a}, \hat{\bar{b}}). \quad (1.27)$$

Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

а) свойством коммутативности, то есть

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}, \quad (1.28)$$

б) свойством дистрибутивности относительно суммы векторов, то есть

$$(\bar{a} + \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{a} \cdot \bar{c} + \bar{b} \cdot \bar{c}. \quad (1.29)$$

Кроме того, из равенства (1.27) следует, что:

$$\left. \begin{array}{l} \text{когда } \bar{a} \downarrow \downarrow \bar{b}, \text{ то } \cos(\bar{a}, \hat{\bar{b}}) = 1 \text{ и } \bar{a} \cdot \bar{b} = ab; \\ \text{когда } \bar{a} \downarrow \uparrow \bar{b}, \text{ то } \cos(\bar{a}, \hat{\bar{b}}) = -1 \text{ и } \bar{a} \cdot \bar{b} = -ab, \end{array} \right\} \quad (1.30)$$

а также что:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \bar{a} \perp \bar{b}, \text{ то } \cos(\bar{a}, \hat{\bar{b}}) = 0 \text{ и } \bar{a} \cdot \bar{b} = 0, \\ \text{если } \bar{a} = \bar{b}, \text{ и } \cos(\bar{a}, \hat{\bar{b}}) = 1, \text{ то } \bar{a} \cdot \bar{a} = a^2. \end{array} \right\} \quad (1.31)$$

Для единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеем

$$\left. \begin{array}{l} \bar{i} \cdot \bar{i} = \bar{j} \cdot \bar{j} = \bar{k} \cdot \bar{k} = 1, \\ \bar{i} \cdot \bar{j} = \bar{i} \cdot \bar{k} = \bar{j} \cdot \bar{k} = 0. \end{array} \right\} \quad (1.32)$$

На основании уравнений (1.29) и (1.32) скалярное произведение двух векторов можно представить в виде:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a_x \cdot \bar{i} + a_y \cdot \bar{j} + a_z \cdot \bar{k}) \cdot (b_x \cdot \bar{i} + b_y \cdot \bar{j} + b_k \cdot \bar{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,$$

то есть

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z. \quad (1.33)$$

Если вектор $\bar{a} \perp \bar{b}$, то

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0. \quad (1.34)$$

Векторное произведение двух векторов есть вектор, модуль которого равен произведению их модулей на синус угла между ними, и направленный перпендикулярно плоскости, проходящей через оба вектора так, чтобы, смотря из конца вектора, можно было видеть вращение первого множителя для кратчайшего совмещения его со вторым против хода часовой стрелки (рис. 1.13). Векторное произведение векторов \bar{a} и \bar{b} будем обозначать символом $\bar{a} \times \bar{b}$.

По определению

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{a}| |\bar{b}| \sin(\hat{\bar{a}, \bar{b}}). \quad (1.35)$$

Из определения векторного произведения следует:

- 1) модуль векторного произведения двух векторов численно равен площади параллелограмма, построенного на этих векторах (см. рис. 1.13);

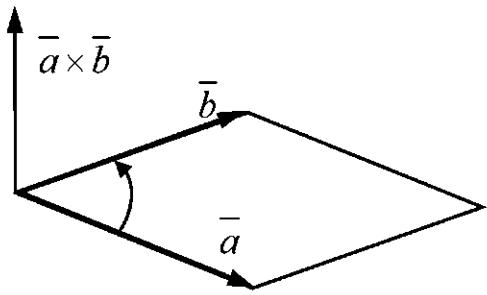


Рис. 1.13

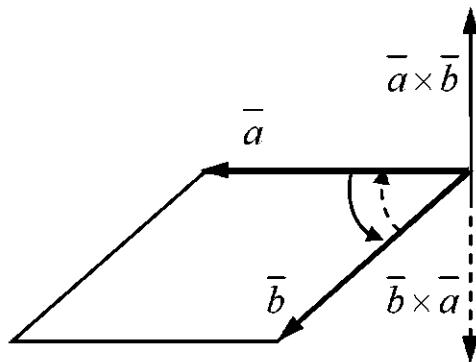


Рис. 1.14

- 2) векторное произведение двух векторов свойством коммутативности не обладает, потому что

$$\bar{a} \times \bar{b} = -(\bar{b} \times \bar{a}). \quad (1.36)$$

Это следует из того, что $|\bar{a} \times \bar{b}| = |\bar{b} \times \bar{a}|$, а направления этих произведений противоположны (рис. 1.14);

- 3) векторное произведение обладает свойством дистрибутивности по отношению к сумме двух векторов

$$(\bar{a} + \bar{b}) \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{c} + \bar{b} \times \bar{c}. \quad (1.37)$$

Отметим следующие частные случаи векторного произведения:

$$\left. \begin{array}{l} \text{если } \bar{a} \parallel \bar{b}, \text{ то } \sin(\hat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0 \text{ и } \bar{a} \times \bar{b} = 0; \\ \text{если } \bar{a} = \bar{b}, \text{ то } \sin(\hat{\bar{a}, \bar{b}}) = 0 \text{ и } \bar{a} \times \bar{b} = 0; \\ \text{если } \bar{a} \perp \bar{b}, \text{ то } \sin(\hat{\bar{a}, \bar{b}}) = 1 \text{ и } |\bar{a} \times \bar{b}| = ab. \end{array} \right\} \quad (1.38)$$

Для единичных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ формулы (1.38) дают:

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = 0; \quad (1.39)$$

$$\bar{i} \times \bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j} \times \bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k} \times \bar{i} = \bar{j}. \quad (1.40)$$

Тогда на основании (1.36), будем иметь

$$\bar{j} \times \bar{i} = -\bar{k}; \quad \bar{k} \times \bar{j} = -\bar{i}; \quad \bar{i} \times \bar{k} = -\bar{j}. \quad (1.41)$$

Теперь найдем выражения векторного произведения векторов \bar{a} и \bar{b} через их проекции.

Имеем:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}, \quad \bar{b} = b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k},$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= (a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}) \times (b_x \bar{i} + b_y \bar{j} + b_z \bar{k}) = a_x b_x (\bar{i} \times \bar{i}) + \\ &+ a_y b_y (\bar{j} \times \bar{j}) + a_z b_z (\bar{k} \times \bar{k}) + a_x b_y (\bar{i} \times \bar{j}) + a_x b_z (\bar{i} \times \bar{k}) + a_y b_x (\bar{j} \times \bar{i}) + \\ &+ a_y b_z (\bar{j} \times \bar{k}) + a_z b_x (\bar{k} \times \bar{i}) + a_z b_y (\bar{k} \times \bar{j}). \end{aligned}$$

Имея в виду (1.39), (1.40) и (1.41), находим

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= a_x b_y \bar{k} - a_x b_z \bar{j} - a_y b_x \bar{k} + a_y b_z \bar{i} + a_z b_x \bar{j} - a_z b_y \bar{i} = \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \bar{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \bar{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \bar{k}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{i} + \begin{vmatrix} a_z & a_x \\ b_z & b_x \end{vmatrix} \bar{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k} \quad (1.42)$$

или

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (1.43)$$

Из (1.43) видно, что проекции векторного произведения на оси координат равны

$$\left. \begin{array}{l} (\bar{a} \times \bar{b})_x = a_y b_z - a_z b_y; \\ (\bar{a} \times \bar{b})_y = a_z b_x - a_x b_z; \\ (\bar{a} \times \bar{b})_z = a_x b_y - a_y b_x, \end{array} \right\} \quad (1.44)$$

а его модуль

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{(\bar{a} \times \bar{b})_x^2 + (\bar{a} \times \bar{b})_y^2 + (\bar{a} \times \bar{b})_z^2}. \quad (1.45)$$

8. Классификация векторов. В зависимости от свойств физических величин векторы подразделяются на свободные, скользящие и неподвижные.

Свободный вектор изображает такую векторную величину, которая может быть отнесена к любой точке пространства, не теряя при этом своего первоначального физического смысла. Так, например, ускорение поступательного движения тела есть свободный вектор, потому что оно может быть отнесено к любой точке тела (рис. 1.15).

Скользящий вектор изображает такую векторную величину, которая может быть отнесена к любой из точек, лежащих на прямой, вдоль которой направлен вектор \bar{a} , не теряя при этом своего первоначального смысла. Примером скользящего вектора является сила, приложенная к абсолютно твердому телу (рис. 1.16).

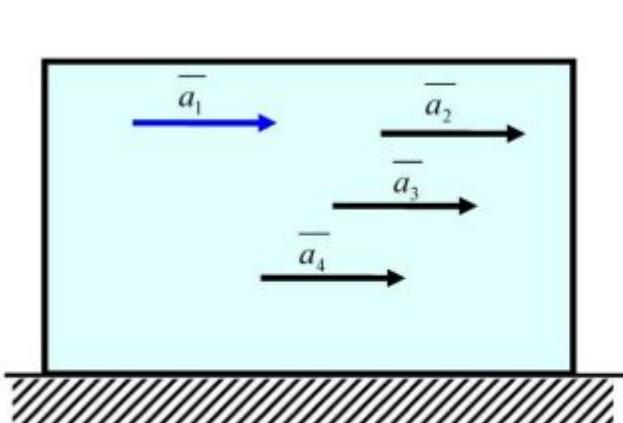


Рис. 1.15

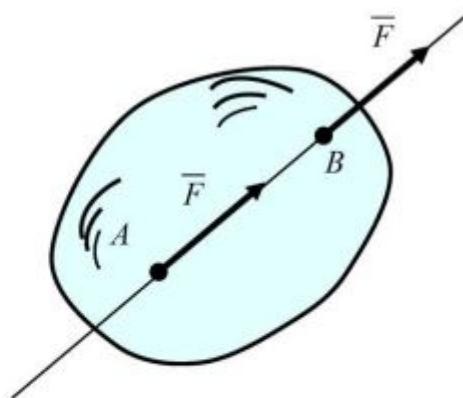


Рис. 1.16

Неподвижный вектор изображает такую векторную величину, которая может быть отнесена лишь к одной определенной точке пространства, и теряет свое первоначальное физическое значение при отнесении ко всякой другой точке пространства. Примером неподвижного вектора является момент силы относительного неподвижного центра.

ГЛАВА II. ДИНАМИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

1. Предмет и задачи динамики. Как уже указывалось во введении к курсу, динамикой называется раздел механики, в котором изучается движение материальных тел с учетом факторов, обусловливающими это движение. Такими факторами являются: механические взаимодействия между телами, инертность тел и наличие связей, наложенных на эти тела.

Динамика является главной частью механики. Два предыдущих раздела механики, по сути, являются введением в динамику. Дело в том, что между действующими силами и движением существует глубокая внутренняя связь, которую и рассматривает динамика.

Среди практических задач механики лишь небольшое число допускает чисто статическое или чисто кинематическое толкование; в большинстве случаев требуется динамическое исследование тех или иных проблем.

В механике не рассматривается природа происхождения сил, а изучается только их действие на движущиеся объекты. Опыт показывает, что силы могут быть как постоянными, так и переменными, определенным образом зависящими от времени, положения и скорости объекта. Законы сложения и приведения переменных сил остаются такими же, что и для постоянных сил.

Введем понятие инертности тела при поступательном движении. Инертность представляет собой свойство материальных тел быстрее или медленнее изменять скорость своего движения под действием приложенных сил. Количественной мерой инертности тела является масса тела. Одновременно масса является мерой гравитационных свойств тела. В механике масса рассматривается как величина скалярная, положительная и постоянная для каждого тела. За единицу массы в СИ принят один килограмм.

В общем случае движение тела зависит не только от его суммарной массы и приложенных сил, но и от взаимного расположения образующих его частиц (то есть от распределения масс).

Изучение динамики начнем с рассмотрения движения тел, размерами которых можно пренебречь. Такие тела в дальнейшем будем называть материальными точками.

Практически тело можно рассматривать как материальную точку в тех случаях, когда расстояния, проходимые точками тела при его движении несопоставимо велики по сравнению с размерами самого тела. Материальными точками будем считать и частицы, на которые будем мысленно разбивать любое тело при определении тех или иных его динамических характеристик.

2. Законы динамики. Инерциальные системы отсчета. В основе динамики лежат три закона Ньютона, которые были сформулированы в его сочинении “Математические начала натуральной философии”, изданном в 1687 г.

Первый закон (закон инерции). *Изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действие других тел не изменит это состояние.*

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи – пребывать неизменно в движении, и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояния покоя и движения по инерции. Из него следует, что если $\bar{F} = 0$, то точка покойится или движется с постоянной по модулю и направлению скоростью.

Второй закон (основной закон динамики). *Произведение массы точки на ее ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Основной закон можно выразить векторным равенством

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (2.1)$$

Если на точку действует одновременно несколько сил, то как известно из раздела «Статика», такая система (сходящихся) сил эквивалентна одной равнодействующей силе, равной геометрической сумме заданных сил, то есть

$$\bar{F} = \sum \bar{F}_k.$$

В этом случае уравнение (2.1) принимает вид:

$$m\bar{a} = \sum \bar{F}_k. \quad (2.2)$$

Первый и второй законы динамики справедливы только по отношению к инерциальной системе отсчета. За инерциальную систему отсчета принимают систему координат с началом в центре Солнца и осями, направленными к далеким “неподвижным” звездам.

В дальнейшем будет показано, что существует бесконечное множество инерциальных систем.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия). *Силы взаимодействия двух материальных точек равны по модулю и противоположны по направлению* (рис. 2.1), то есть

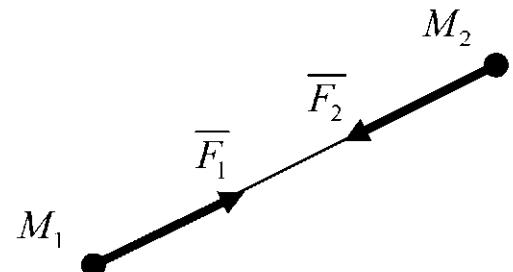


Рис. 2.1

$$\bar{F}_2 = -\bar{F}_1. \quad (2.3)$$

Силы взаимодействия между свободными материальными точками или телами не образуют уравновешенную систему сил, так как они приложены к разным объектам.

Третий закон механики справедлив в любой системе отсчета.

3. Основные виды сил. При решении задач динамики мы будем в основном рассматривать следующие силы:

1. *Сила тяжести.* Это постоянная сила \bar{G} , действующая на любое тело, находящееся вблизи земной поверхности. Опытом установлено, что под действием силы \bar{G} любое тело при свободном падении на Землю имеет одно и то же ускорение \bar{g} , называемое ускорением свободного падения. Тогда согласно уравнению (2.1) имеем

$$\bar{G} = m\bar{g},$$

Следовательно,

$$G = mg \quad \text{или} \quad m = \frac{G}{g}. \quad (2.4)$$

2. *Сила трения скольжения.* Модуль силы трения скольжения определяется равенством

$$F_{mp} = fN, \quad (2.5)$$

где f – коэффициент трения, N – нормальная реакция.

3. *Сила тяготения.* Сила тяготения двух материальных тел, в соответствии с законом всемирного тяготения, открытого Ньютона, определяется равенством

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.6)$$

где γ – гравитационная постоянная ($\gamma = 6,673 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 / \text{кг} \cdot \text{с}^2$); r – расстояние между телами; m_1 и m_2 – гравитационные массы.

4. *Сила упругости.* Модуль этой силы определяется исходя из закона Гука. В частности, для силы упругости пружины:

$$F = c\Delta, \quad (2.7)$$

где c – коэффициент жесткости пружины; Δ – деформация пружины.

5. *Сила вязкого трения.* Такая сила действует на тело, движущееся с небольшой скоростью в вязкой среде, и может быть выражена зависимостью

$$\bar{R} = -\mu\bar{v}, \quad (2.8)$$

где μ – коэффициент сопротивления; v – скорость тела.

6. *Сила аэродинамического или гидродинамического сопротивления.* Такая сила действует на тело, движущееся в воздушной или водной среде с достаточно большой скоростью. Она может быть выражена зависимостью

$$R = 0,5c_x\rho S v^2, \quad (2.9)$$

где c_x – коэффициент сопротивления; ρ – плотность среды; S – площадь миделева сечения.

4. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.

Все задачи динамики точки решаются с помощью дифференциальных уравнений, связывающих координаты точки с действующими на нее силами. Эти уравнения получаются из основного закона динамики

$$m\bar{a} = \bar{F} \text{ или } m \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} = \bar{F}, \quad (2.10)$$

где \bar{r} – радиус-вектор точки по отношению к инерциальной системе отсчета $Oxyz$ (рис. 2.2), $\bar{F} = \sum \bar{F}_k$ – равнодействующая сил, действующих на точку.

Равенство (2.10), представляющее основной закон динамики, можно рассматривать одновременно как дифференциальное уравнение движения материальной точки в векторной форме.

Проектируя обе части равенства (2.10) на координатные оси $Oxyz$, получим

$$m \ddot{x} = F_x, \quad m \ddot{y} = F_y, \quad m \ddot{z} = F_z. \quad (2.11)$$

Уравнения (2.11) называются дифференциальными уравнениями движения точки в декартовых координатах. Если же основное уравнение динамики (2.10) спроектировать на оси естественного трехгранника, то получим

$$\begin{aligned} ma_\tau &= \sum F_{k\tau}, \quad ma_n = \sum F_{kn}, \quad ma_b = \sum F_{kb} \quad \text{или} \\ m \frac{dv}{dt} &= \sum F_{k\tau}, \quad m \frac{v^2}{\rho} = \sum F_{kn}, \quad 0 = \sum F_{kb}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$a_\tau = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}, \quad a_b = 0.$$

Уравнения (2.12) соответственно называются дифференциальными уравнениями движения точки в естественных координатах.

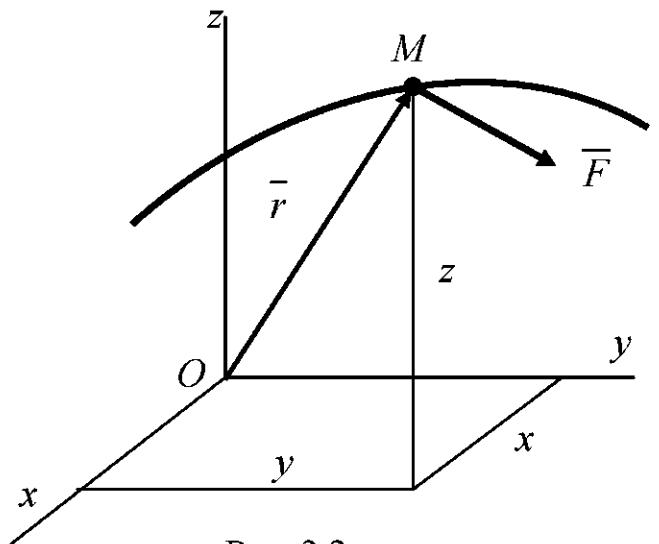


Рис. 2.2

Итак, в зависимости от выбора осей координат, на которые проектируется основное уравнение динамики (2.10), можно получить различные формы скалярных дифференциальных уравнений движения материальной точки.

5. Решение первой и второй задач динамики. При всем многообразии динамических задач выделяют две их категории.

5.1. Первая задача динамики. Эта задача состоит в том, чтобы, зная массу и закон движения точки, то есть

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t), \quad (2.13)$$

определить действующую силу \bar{F} , то есть F_x, F_y, F_z .

Эта задача, как видно из дифференциальных уравнений (2.11), сводится к вычислению вторых производных по времени от заданных функций (2.13).

Пример 1. Точка массы $m = 2 \text{ кг}$ движется прямолинейно по закону

$$x = t^4 - 12t^3 + 60t^2 (\text{м}).$$

Найти величину силы, действующей на эту точку. В какой момент эта сила имеет наименьшую величину?

Решение. Так как точка движется прямолинейно по оси x , то ее ускорение будет равно

$$a = a_x = \ddot{x} = 12(t^2 - 6t + 10) \text{ м/с}^2.$$

$$\text{Следовательно, } F = F_x = m \ddot{x} = 24(t^2 - 6t + 10) \text{ Н.}$$

Для определения F_{\min} решаем задачу на экстремум

$$\frac{dF}{dt} = 2t - 6 = 0, \text{ откуда } t = 3 \text{ с, } F_{\min} = 24 \text{ Н.}$$

Пример 2. Движение материальной точки M массы m выражается уравнениями

$$x = a \cos kt, \quad y = b \sin kt, \quad z = 0. \quad (a)$$

Определить силу, действующую на точку.

Решение. Исключая время t из уравнений движения, находим уравнение траектории точки

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Очевидно, траекторией точки является эллипс с полуосами a и b . Из уравнений (2.11) находим, что проекции силы, действующей на точку равны

$$F_x = -mk^2 a \cos kt, \quad F_y = -mk^2 b \sin kt, \quad F_z = 0.$$

Исключая отсюда с помощью уравнений движения параметры a и b , получим

$$F_x = -mk^2 x, \quad F_y = -mk^2 y, \quad \bar{F} = \bar{i}F_x + \bar{j}F_y = -mk^2 \bar{r}, \quad (6)$$

где \bar{r} – радиус-вектор точки m , проведенный из начала координат. Следовательно, сила \bar{F} направлена от точки M к центру O .

Пример 3. Материальная точка массы m движется по окружности радиуса r с постоянной по модулю скоростью v . Найти силу, под действием которой происходит такое движение.

Решение. Так как движение точки задано естественным способом, то для решения задачи применим дифференциальные уравнения (2.12). Тогда имеем

$$F_\tau = m \frac{dv}{dt} = 0, \quad F_n = m \frac{v^2}{r}, \quad \text{и} \quad \bar{F} = F_\tau \bar{\tau} + F_n \bar{n} = \bar{n} F_n = \bar{n} \frac{mv^2}{r}.$$

Следовательно, сила имеет модуль, равный $m \frac{v^2}{r}$, и направлена по радиусу к центру окружности.

5.2. Вторая задача динамики. Эта задача состоит в том, чтобы, зная массу точки m и действующую на нее силу \bar{F} , найти закон движения точки, то есть кинематические уравнения (2.13). Как видно, вторая задача динамики является обратной первой.

Сила в общем случае зависит от времени, положения точки и ее скорости, то есть

$$\bar{F} = \bar{F}(t, \bar{r}, \bar{v})$$

или

$$\left. \begin{array}{l} F_x = F_x(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_y = F_y(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ F_z = F_z(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}). \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

Следовательно, правые части дифференциальных уравнений (2.11) могут быть функциями $t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$

Вторая задача динамики решается интегрированием дифференциальных уравнений (2.11).

Проинтегрировав эту систему дифференциальных уравнений, получим x, y, z в функциях времени и шести постоянных интегрирования, т.е.

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t, c_1, \dots, c_6); \\ y = y(t, c_1, \dots, c_6); \\ z = z(t, c_1, \dots, c_6), \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

где c_1, \dots, c_6 – произвольные постоянные интегрирования.

Так как в общем случае уравнения (2.11) не являются независимыми друг от друга, то в каждую из функций (2.15) могут входить все шесть постоянных интегрирования.

Постоянные интегрирования определяются по начальным условиям, т.е. положением точки и ее скоростью в начальный момент времени. Зададимся следующими начальными условиями: при $t = 0$

$$\left. \begin{array}{l} x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0, \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ x = x_0, \quad y = y_0, \quad z = z_0. \end{array} \right\} \quad (2.16)$$

Возьмем производные по времени от уравнений (2.15).

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = \dot{x}(t, c_1, \dots, c_6); \\ \vdots \quad \vdots \\ \dot{y} = \dot{y}(t, c_1, \dots, c_6); \\ \vdots \quad \vdots \\ \dot{z} = \dot{z}(t, c_1, \dots, c_6). \end{array} \right\} \quad (2.17)$$

Подставив значения начальных условий (2.16) в уравнения (2.15) и (2.17), получим систему из шести уравнений

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = x(0, c_1, \dots, c_6), \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0, c_1, \dots, c_6), \\ y_0 = y(0, c_1, \dots, c_6), \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(0, c_1, \dots, c_6), \\ z_0 = z(0, c_1, \dots, c_6), \quad \dot{z}_0 = \dot{z}(0, c_1, \dots, c_6). \end{array} \right\} \quad (2.18)$$

Решая эти уравнения относительно неизвестных постоянных c_k , найдем

$$c_k = f_k(x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0) \quad (k = 1, \dots, 6). \quad (2.19)$$

Подставляя найденные значения c_k в уравнения (2.15), получим решение системы дифференциальных уравнений (2.11), удовлетворяющих заданным начальным условиям:

$$\left. \begin{array}{l} x = x(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ y = y(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0), \\ z = z(t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0). \end{array} \right\} \quad (2.20)$$

Уравнения (2.20) и определяют движение точки под действием заданных сил при данных начальных условиях.

Пример 1. Материальная точка массы m совершает прямолинейное движение под действием силы, изменяющейся по закону

$$F = F_x = F_0 \cos \omega t,$$

где F_0 и ω – постоянные величины.

В начальный момент времени точка имела скорость $x_0 = v_0$ и координату $x_0 = 0$. Найти уравнение движения точки.

Решение. Дифференциальное уравнение движения точки запишется в виде:

$$m \ddot{x} = F_x = F_0 \cos \omega t.$$

Тогда

$$\ddot{x} = \frac{d \dot{x}}{dt} = \frac{F_0}{m} \cos \omega t.$$

Интегрируя это уравнение, получим первый интеграл

$$\dot{x} = \frac{F_0}{m\omega} \sin \omega t + C_1. \quad (a)$$

Повторное интегрирование дает второй интеграл

$$x = -\frac{F_0}{m\omega^2} \cos \omega t + C_1 t + C_2. \quad (b)$$

Подставляя начальные условия (при $t = 0, x = 0, \dot{x}_0 = v_0$) в уравнения (a) и (b), находим постоянные интегрирования C_1 и C_2 :

$$C_1 = v_0, \quad C_2 = \frac{F_0}{m\omega^2}.$$

Окончательно имеем

$$x = \frac{F_0}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t) + v_0 t.$$

Пример 2. Материальная точка M движется в плоскости под действием центральной силы притяжения к неподвижному центру O . Сила изменяется по закону

$$\bar{F} = -mk^2 \bar{r},$$

где \bar{r} – радиус-вектор движущейся точки, проведенный из центра O , k – по-

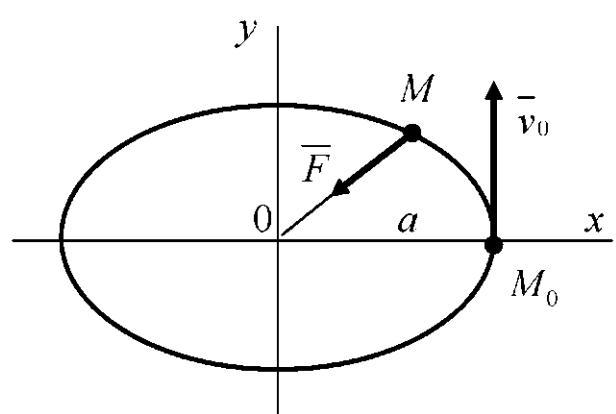


Рис. 2.3

стационарный коэффициент, m – масса точки.

Найти уравнения движения точки, приняв за начало координат неподвижный центр O , если в начальный момент она занимала положение $M_0 = (a, 0)$ и имела скорость \bar{v}_0 , направленную по вертикали вверх (рис. 2.3).

Решение. При этом начальными условиями будут:

$$t = 0; \quad x_0 = a, \dot{x}_0 = 0, \ddot{x}_0 = 0, \dot{y}_0 = v_0.$$

Вначале запишем дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме:

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = \bar{F}.$$

Проектируя на оси x и y , получим

$$\ddot{m}x = F_x = -k^2 mx; \quad \ddot{m}y = F_y = -k^2 my$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \tag{a}$$

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \tag{б}$$

Уравнения (а) и (б) являются однородными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами. Для определения общего интеграла дифференциального уравнения (а) составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$, откуда $\lambda_{1,2} = \pm ik$. Следовательно,

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt. \tag{в}$$

$$\text{Тогда } \dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt. \tag{г}$$

Подставляя начальные условия в уравнения (в) и (г), находим $C_1 = a$, $C_2 = 0$; следовательно, $x = a \cos kt$. (д)

Аналогично находим общий интеграл дифференциального уравнения (б)

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt, \tag{е}$$

$$\dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \tag{ж}$$

После подстановки начальных условий в уравнения (е) и (ж) находим

$$C_3 = 0, \quad C_4 = \frac{v_0}{k}; \quad \text{следовательно, } \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt. \tag{з}$$

Таким образом, уравнения движения точки имеют вид:

$$x = a \cos kt, \quad y = \frac{v_0}{k} \sin kt. \tag{к}$$

Для определения уравнения траектории точки следует из уравнений (к) исключить время.

$$\frac{x}{a} = \cos kt, \quad \frac{y}{v_0/k} = \sin kt.$$

Тогда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{(v_0/k)^2} = 1.$$

Это уравнение эллипса с центром в начале координат с полуосами a и $\frac{v_0}{k}$.

Пример 3. Стальной шарик массы m падает без начальной скорости в жидкости. Определить уравнение движения шарика при условии, что модуль силы сопротивления задается формулой $R = \alpha v$, где α - коэффициент пропорциональности.

Решение. Начало координат совместим с началом движения, а ось z направим вниз (рис. 2.4). При этом начальными условиями будут: $t_0 = 0$; $z_0 = 0$; $\dot{z}_0 = 0$.

Запишем дифференциальное уравнение движения точки в векторной форме

$$m \frac{d^2 \bar{r}}{dt^2} = m \bar{g} + \bar{R}.$$

Проектируя на ось z , имеем

$$m \ddot{z} = mg - \alpha \dot{z}. \quad (\text{а})$$

Так как $\ddot{z} = \frac{d\dot{z}}{dt}$, уравнение (а) перепишем в виде:

$$\frac{d\dot{z}}{g - \frac{\alpha}{m} \dot{z}} = dt. \quad (\text{б})$$

Интегрируя (б), получим первый интеграл

$$-\frac{m}{\alpha} \ln(g - \frac{\alpha}{m} \dot{z}) = t + C_1. \quad (\text{в})$$

Подставляя начальные условия в уравнение (в), находим

$$C_1 = -\frac{m}{\alpha} \ln g.$$

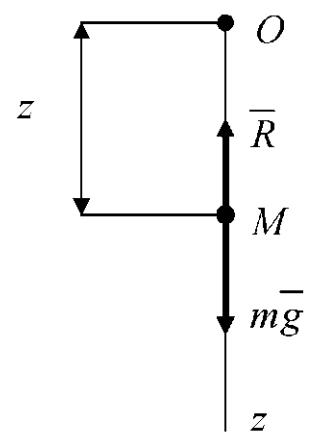


Рис. 2.4

$$\text{Тогда } \frac{m}{\alpha} \ln \frac{g - \frac{\alpha}{m} \dot{z}}{g} = -t, \text{ или } \ln \frac{g - \frac{\alpha}{m} \dot{z}}{g} = -\frac{\alpha}{m} t, \text{ откуда}$$

$$\dot{z} = \frac{m}{\alpha} g (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}). \quad (\Gamma)$$

Заменив \dot{z} на $\frac{dz}{dt}$, отделив переменные в уравнении (Γ) и проинтегрировав его, получим

$$z = \frac{m}{\alpha} g \left(t + \frac{m}{\alpha} e^{-\frac{\alpha}{m} t} \right) + C_2. \quad (\Delta)$$

Подставляя начальные условия в уравнение (Δ), находим

$$C_2 = -\frac{m^2}{\alpha^2} g.$$

Следовательно,

$$z = \frac{m}{\alpha} g t - \frac{m^2}{\alpha^2} g (1 - e^{-\frac{\alpha}{m} t}). \quad (\Theta)$$

Уравнение (Θ) и есть уравнение движения шарика при заданных начальных условиях.

6. Общие теоремы динамики точки

6.1. Теорема об изменении количества движения точки. Количество движения точки называется вектор, равный произведению массы точки на ее скорость, т.е. $m\bar{v}$. Имея в виду, что $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$, а m – величина постоянная, основное уравнение динамики (2.1) перепишем в виде:

$$\frac{d(m\bar{v})}{dt} = \bar{F}. \quad (2.21)$$

Умножив обе части равенства (2.21) на dt , получим

$$d(m\bar{v}) = \bar{F} dt. \quad (2.22)$$

Величина $\bar{F} dt = d\bar{S}$ называется элементарным импульсом силы. Равенство (2.22) выражает теорему об изменении количества движения точки в дифференциальной форме: дифференциал количества движения материальной точки равен элементарному импульсу силы.

Проинтегрируем обе части равенства (2.22) в пределах, соответствующих моментам времени $t_0 = 0$ и t_1 .

$$\int_{v_0}^{v_1} d(m\bar{v}) = \int_0^{t_1} \bar{F} dt \quad \text{или} \quad m\bar{v}_1 - m\bar{v}_0 = \bar{S}, \quad (2.23)$$

где $\bar{S} = \int_0^{t_1} \bar{F} dt$ – импульс силы \bar{F} за время t_1 .

Равенство (2.23) выражает теорему об изменении количества движения точки в интегральной форме: изменение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действующей на точку за тот же промежуток времени. В проекциях на оси декартовых координат равенство (2.23) дает три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} mv_{1x} - mv_{0x} &= S_x; \\ mv_{1y} - mv_{0y} &= S_y; \\ mv_{1z} - mv_{0z} &= S_z, \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

где $S_x = \int_0^{t_1} F_x dt$, $S_y = \int_0^{t_1} F_y dt$, $S_z = \int_0^{t_1} F_z dt$.

6.2 Теорема об изменении момента количества движения точки.

Моментом количества движения точки относительно неподвижного центра называется вектор \bar{l}_0 , определяемый векторным произведением радиуса-вектора \bar{r} на вектор количества движения $m\bar{v}$, т.е.

$$\bar{l}_0 = \bar{r} \times m\bar{v}. \quad (2.25)$$

Модуль вектора \bar{l}_0 равен

$$|\bar{l}_0| = l_0 = rmv \sin(\hat{\bar{r}}, \hat{m\bar{v}}) = mvh, \quad (2.26)$$

где h – плечо вектора $m\bar{v}$ относительно центра О.

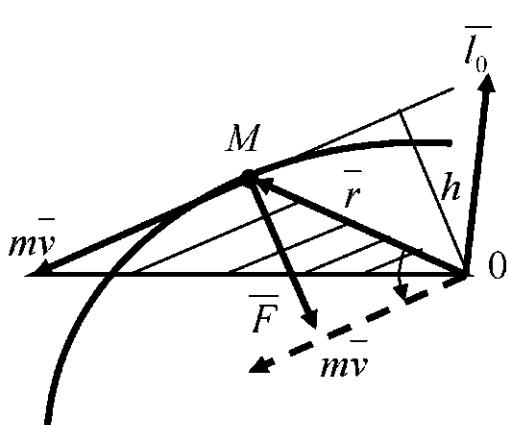


Рис. 2.5

Вектор \bar{l}_0 направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы \bar{r} и $m\bar{v}$, в ту сторону, откуда кратчайшее совмещение вектора \bar{r} к вектору $m\bar{v}$ видно происходящим против хода часовой стрелки (рис. 2.5).

Предположим, что материальная точка М движется под действием силы \bar{F} . Запишем основное уравнение динамики

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Умножим обе части последнего равенства векторно слева на радиус-вектор \bar{r}

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{r} \times \bar{F}. \quad (2.27)$$

Преобразуем левую часть (2.27):

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) + \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v}.$$

Но $\frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} = \bar{v} \times m\bar{v} = 0$, следовательно

$$\bar{r} \times m \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \frac{d\bar{l}_0}{dt}.$$

Правая часть (2.27) представляет собой момент силы \bar{F} относительно центра о, т.е.

$$\bar{r} \times \bar{F} = \bar{m}_0(\bar{F}).$$

Таким образом, имеем

$$\frac{d\bar{l}_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}). \quad (2.28)$$

Равенство (2.28) выражает теорему об изменении момента количества движения точки относительно неподвижного центра: производная по времени от момента количества движения точки относительно неподвижного центра равна моменту силы, действующей на точку, относительно того же центра.

В проекциях на оси декартовых координат равенство (2.28) дает три скалярных уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dl_x}{dt} &= m_x(\bar{F}); \\ \frac{dl_y}{dt} &= m_y(\bar{F}); \\ \frac{dl_z}{dt} &= m_z(\bar{F}). \end{aligned} \right\} \quad (2.29)$$

6.3. Работа силы. Мощность.

Работа силы определяет действие силы на некотором перемещении и является одной из важнейших характеристик в механике. Вначале введем понятие об элементарной работе. Элементарная работа силы определяется равенствами

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F ds \cos(\hat{\bar{F}}, \hat{d\bar{r}}) = F_\tau ds. \quad (2.30)$$

где \bar{F}_τ – проекция силы на касательную к траектории в точке M .

Если силу \bar{F} и элементарное перемещение $d\bar{r}$ выразить через их проекции на осях декартовых координат, то элементарную работу можно представить в виде

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz. \quad (2.31)$$

Отметим частные случаи, которые можно получить из второго равенства (2.30), т.е.

$$\delta A = F ds \cos \varphi,$$

где φ – угол между \bar{F} и $d\bar{r}$.

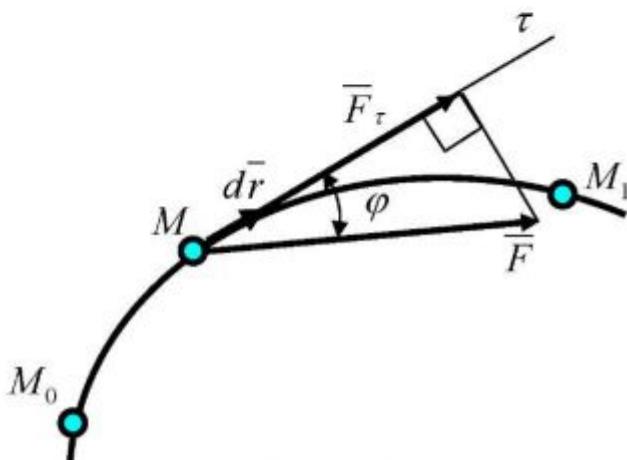


Рис. 2.6

1. Если $\varphi < 90^\circ$, то $\delta A > 0$;
2. Если $\varphi = 90^\circ$, то $\delta A = 0$;
3. Если $\varphi > 90^\circ$, то $\delta A < 0$;
4. Если $\varphi = 0$, то $\delta A = Fds$;
5. Если $\varphi = 180^\circ$, то $\delta A = -Fds$.

Работа силы на конечном перемещении M_0M_1 определяется как криволинейный интеграл от элементарной работы, взятый вдоль дуги M_0M_1 траектории

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0M_1} \bar{F} \cdot d\bar{r} = \int_{s_0}^{s_1} \bar{F}_r ds = \int_{M_0}^{M_1} (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (2.33)$$

Мощностью называется величина, характеризующая работу силы в единицу времени, т.е.

$$W = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\bar{F} \cdot d\bar{r}}{dt} = \bar{F} \cdot \bar{v}. \quad (2.34)$$

Единицей измерения работы силы является в СИ – 1 джоуль (1 Дж = 1Нм). Единицей измерения мощности является в СИ – 1 ватт (1 Вт = 1 Дж/с).

В технике иногда за единицу мощности принимается 1л.с., равная 736 Вт.

Из равенства (2.34) видно, что чем больше скорость, тем меньше сила при одной и той же мощности. Так, например, на тяжелых участках дороги (песок, грязь и т.д.) у автомобиля включают низшие передачи, позволяющие при заданной мощности двигаться с меньшей скоростью, но с большей силой тяги.

6.4. Примеры вычисления работы силы.

1). *Работа силы тяжести.* Вычислим работу силы тяжести материальной точки при ее перемещении из положения M_0 в положение M_1 (рис. 2.7).

Вблизи земной поверхности силу тяжести \bar{P} можно считать постоянной, равной $m\bar{g}$ и направленной по вертикали вниз. Если оси координат $oxuz$ провести так, как показано на рис. 2.7, то $P_x = 0; P_y = 0; P_z = -mg$. Подставляя значения P_x, P_y, P_z в формулу (2.33),

$$A_{M_0 M_1} = \int_{M_0}^{M_1} (P_x dx + P_y dy + P_z dz),$$

находим

$$A_{M_0 M_1} = -mg \int_{z_0}^{z_1} dz = -mg(z_1 - z_0) = mg(z_0 - z_1),$$

или

$$A = \pm mgh, \quad (2.35)$$

где $h = z_0 - z_1$ – вертикальное перемещение точки.

Следовательно, работа силы тяжести материальной точки равна со знаком плюс или минус произведению модуля силы тяжести на вертикальное перемещение точки. Работа силы тяжести положительна, если материальная точка опускается, и отрицательна, если поднимается. Как видно из (2.35), работа силы тяжести не зависит от вида траектории точки, а зависит лишь от начального и конечного положений точек.

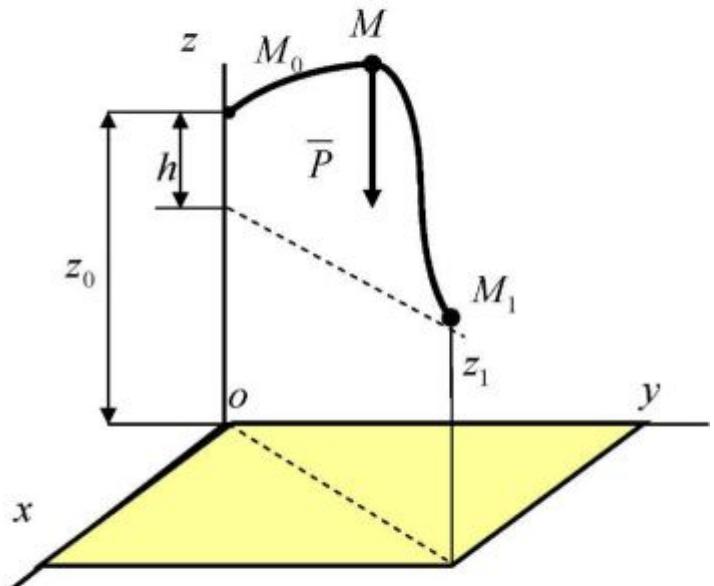


Рис. 2.7

2). *Работа силы упругости.*

Под линейной силой упругости понимают силу, изменяющуюся по закону

$$\bar{F} = -c\bar{r}, \quad (2.36)$$

где c – коэффициент жесткости, \bar{r} – радиус-вектор точки приложения силы \bar{F} , проведенный из точки статического равновесия, где сила равна нулю.

Элементарная работа силы упругости \bar{F} – равна

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = -c\bar{r} \cdot d\bar{r} = -cd\left(\frac{\bar{r}^2}{2}\right). \quad (2.37)$$

Работа силы упругости на конечном перемещении M_0M_1 будет равна

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \delta A = -c \int_{r_0}^{r_1} d\left(\frac{\bar{r}^2}{2}\right) = \frac{c}{2}(r_0^2 - r_1^2), \quad (2.38)$$

где r_0 и r_1 – соответственно начальное и конечное отклонение точки приложения силы от положения равновесия.

Формула (2.38) справедлива как при криволинейном, так и при прямолинейном перемещении точки приложения силы.

Как и в случае силы тяжести, работа линейной силы упругости не зависит от вида траектории точки.

3). *Работа силы, приложенной к твердому телу.* Определим работу силы, приложенной в какой-либо точке твердого тела при поступательном и вращательном движении.

При поступательном движении все точки тела имеют одинаковые скорости. Следовательно, элементарная работа силы, приложенной к точке M_k , будет равна

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r}_k = \bar{F} \cdot \bar{v}_k dt = \bar{F} \cdot d\bar{r}, \quad (2.39)$$

где $d\bar{r}$ – элементарное перемещение любой точки тела. Работа силы на конечном перемещении соответственно будет равна

$$A_{M_0M_1} = \int_{M_0}^{M_1} \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (2.40)$$

При вращении тела вокруг неподвижной оси элементарную работу силы, приложенной к точке M_k тела, можно найти по формуле

$$\delta A = F_\tau ds = F_\tau h d\varphi = m_z(\bar{F}) d\varphi, \quad (2.41)$$

где $m_z(\bar{F}) = F_\tau h$ – момент силы \bar{F} относительно оси вращения; $d\varphi$ – элементарный угол поворота тела.

Работа силы при повороте на конечный угол φ_1 определяется выражением

$$A = \int_0^{\varphi_1} m_z(\bar{F}) d\varphi. \quad (2.42)$$

Если $m_z(\bar{F}) = const$, то (2.42) примет вид:

$$A = m_z(\bar{F})\varphi_1. \quad (2.43)$$

4). Работа силы тяжести твердого тела (механической системы). Работа силы тяжести тела (системы) определяется как сумма работ сил тяжести отдельных точек, составляющих систему, т.е.

$$A = \sum_{i=1}^n G_k(z_{k_0} - z_{k_1}) = (\sum G_k z_k)_0 - (\sum G_k z_k)_1.$$

Здесь индексы 0 и 1 соответствуют начальному и конечному положениям системы. Вспоминая определение центра тяжести

$$Gz_c = \sum G_k z_k,$$

где z_c – ордината центра тяжести; G – полный вес тела (системы), находим

$$A = G(z_{C_0} - z_{C_1}) = \pm Gh_C, \quad (2.44)$$

где $h_C = z_{C_0} - z_{C_1}$ – вертикальное перемещение центра тяжести.

6.5. Теорема об изменении кинетической энергии точки. Кинетической энергией точки называется скалярная величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости, т.е. $mv^2/2$.

Рассмотрим движение материальной точки M под действием силы \bar{F} . Тогда, по основному закону динамики, имеем

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Умножив обе части этого равенства скалярно на вектор $\bar{v} dt$ и имея в виду, что $\bar{v} dt = d\bar{r}$, находим

$$m\bar{v} \cdot d\bar{v} = \bar{F} \cdot d\bar{r}.$$

Так как масса m постоянна, а $\bar{v}^2 = \bar{v} \cdot \bar{v} = v^2$, последнее равенство представим в виде:

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \bar{F} \cdot d\bar{r}. \quad (2.45)$$

Равенство (2.45) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки в дифференциальной форме: дифференциал кинетической энергии точки равен элементарной работе силы, действующей на точку.

Интегрируя обе части равенства (2.45) в пределах, соответствующих значениям переменных в точках M_0 и M_1 , найдем

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A_{M_0 M_1}. \quad (2.46)$$

Равенство (2.46) выражает теорему об изменении кинетической энергии точки: изменение кинетической энергии точки на некотором ее перемещении равно работе силы, действующей на точку на том же перемещении.

6.6. Потенциальное силовое поле. Потенциальная энергия.

Силовым полем называется область пространства, в которой на помещенную туда материальную точку действует сила, зависящая от положения точки. Таким образом, в силовом поле должна быть известна функция \bar{F} , зависящая от радиуса-вектора точки \bar{r} и времени t , т.е. $\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}, t)$

или

$$\left. \begin{array}{l} F_x = F_x(x, y, z, t); \\ F_y = F_y(x, y, z, t); \\ F_z = F_z(x, y, z, t), \end{array} \right\} \quad (2.47)$$

где x, y, z – координаты точки.

Силовое поле называется нестационарным, если сила \bar{F} зависит явно от времени t , как в случае (2.47), и стационарным, если сила не зависит явно от времени, т.е.

$$\bar{F} = \bar{F}(\bar{r}) \text{ или } F_x = F_x(x, y, z); F_y = F_y(x, y, z); F_z = F_z(x, y, z). \quad (2.48)$$

Силовое поле называется консервативным (потенциальным), если существует такая скалярная функция координат $\Pi(x, y, z)$, называемая потенциальной энергией, что проекции силы на оси декартовых координат могут быть выражены через нее следующими зависимостями:

$$F_x = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = -\frac{\partial \Pi}{\partial z}. \quad (2.49)$$

Уравнения (2.49) выражают критерии консервативности силового поля.

Покажем, что в консервативном силовом поле работа сил поля не зависит от траектории и закона движения точки, а зависит лишь от начального и конечного положений точки.

Элементарная работа в консервативном силовом поле будет равна

$$dA = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial \Pi}{\partial x} dx + \frac{\partial \Pi}{\partial y} dy + \frac{\partial \Pi}{\partial z} dz \right) = -d\Pi, \quad (2.50)$$

т.е. элементарная работа сил консервативного силового поля равна взятому с обратным знаком полному дифференциальному потенциальной энергии.

Работа силы \bar{F} на конечном перемещении точки из положения M_1 в положение M_2 , будет равна

$$A = \int_{M_1}^{M_2} \delta A = - \int_{\Pi_1}^{\Pi_2} d\Pi = -(\Pi_2 - \Pi_1),$$

или

$$A = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (2.51)$$

Следовательно, *работа в консервативном силовом поле на некотором перемещении точки равна разности значений потенциальной энергии в начальном и конечном положениях точки*. Так как потенциальная энергия является функцией положения, то работа силы, как следует из (2.51), действительно не зависит от траектории и закона движения точки, а зависит лишь от ее начального и конечного положений. Из (2.51) также вытекает, что работа в консервативном силовом поле по любому замкнутому контуру будет равна нулю, т.е.

$$A_{M_0 M_0} = \Pi_0 - \Pi_0 = 0.$$

Из формулы (2.51) следует, что Π определяется с точностью до некоторой произвольной постоянной, которая зависит от выбора начала координат, но эта произвольная постоянная не влияет на работу силы (рис. 2.8).

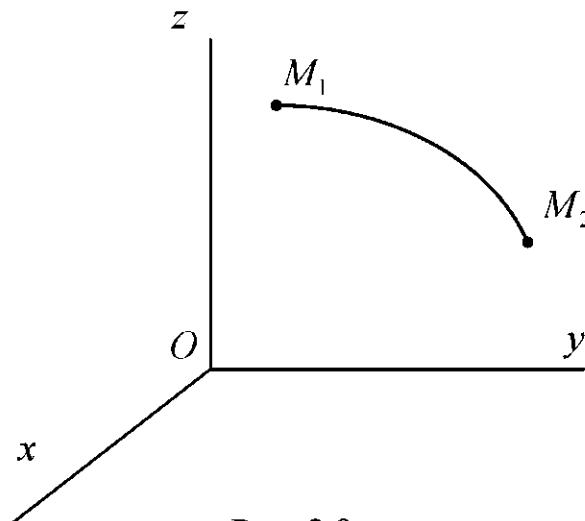


Рис. 2.8

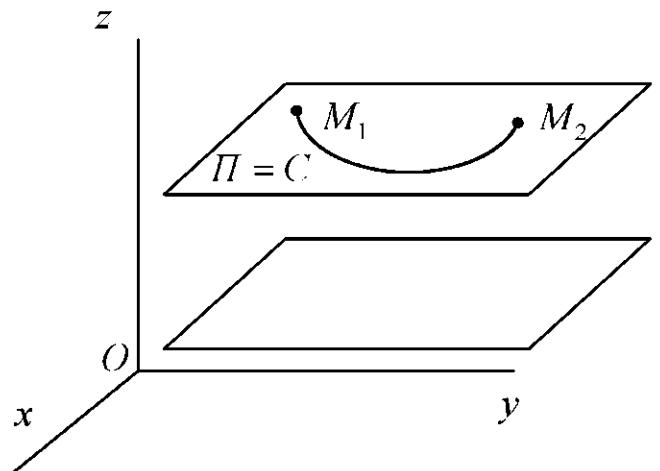


Рис. 2.9

Если потенциальную энергию в точке O принять равной нулю, то работа консервативного силового поля при перемещении точки из положения M в положение O , согласно (2.51), будет равна

$$A_{MO} = \Pi(x, y, z). \quad (2.52)$$

Из (2.52) также следует, что потенциальная энергия в точке $M(x, y, z)$ равна работе сил консервативного поля при перемещении от точки M до нулевой точки, в которой потенциальная энергия принимается равной нулю.

Консервативное силовое поле допускает удобную и наглядную геометрическую интерпретацию. Геометрическое место точек, в которых потенциальная энергия сохраняет постоянное значение, образует поверхность, которую назы-

вают эквипотенциальной поверхностью (рис. 2.9). Через каждую точку консервативного силового поля можно провести только одну такую поверхность.

Уравнение эквипотенциальной поверхности

$$\Pi(x, y, z) = C. \quad (2.53)$$

Отметим некоторые свойства эквипотенциальной поверхности:

a). Работа сил поля при перемещении точки из начального положения в конечное, когда оба эти положения находятся на одной и той же эквипотенциальной поверхности, равна нулю, т.е.

$$A_{M_1 M_2} = \Pi_1 - \Pi_2 = C - C = 0. \quad (2.54)$$

б). Сила в консервативном силовом поле всегда направлена по нормали к эквипотенциальной поверхности. Это легко показать. Пусть материальная точка перемещается по какой-либо эквипотенциальной поверхности. Тогда для любого момента времени имеет место

$$\Pi(x, y, z) = 0.$$

Дифференцируя обе части этого тождества по времени, находим

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial \Pi}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \Pi}{\partial z} \dot{z} = 0$$

или, имея в виду (2.49),

$$F_x \dot{x} + F_y \dot{y} + F_z \dot{z} = 0,$$

или

$$\bar{F} \cdot \bar{v} = 0. \quad (2.55)$$

Из равенства (2.55) следует, что $\bar{F} \perp \bar{v}$.

в). Сила в консервативном силовом поле всегда направлена в сторону убывающих значений потенциальной энергии. Для доказательства этого свойства силы поля рассмотрим перемещение точки из положения M_1 в положение M_2 , расположенных в разных эквипотенциальных поверхностях. При этом предположим, что $\Pi_1 > \Pi_2$ (рис. 2.10).

Тогда работа, согласно (2.51), равна

$$A_{M_1 M_2} = \Pi_1 - \Pi_2 > 0.$$

Так как $A > 0$, и $\Pi_1 > \Pi_2$, то сила \bar{F} должна быть направлена перпендикулярно эквипотенциальной поверхности в сторону убывания Π .

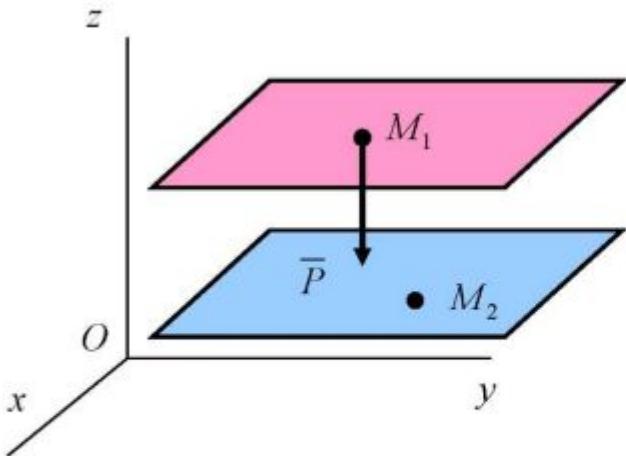


Рис. 2.10

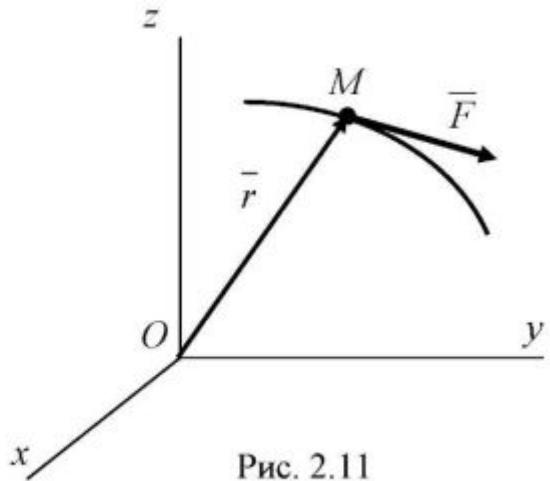


Рис. 2.11

Введем понятие силовой линии, т.е. такой линии, в каждой точке которой сила направлена по касательной к этой линии (рис. 2.11). Из условия параллельности \bar{F} и $d\bar{r}$ следует, что

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}. \quad (2.56)$$

Уравнения (2.56) являются дифференциальными уравнениями силовой линии.

Если применить понятие вектор-градиента от скалярной функции Π

$$\text{grad } \Pi = \bar{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z},$$

то силу \bar{F} можно выразить как градиент потенциальной энергии с обратным знаком

$$\bar{F} = \bar{i} F_x + \bar{j} F_y + \bar{k} F_z = - \left(\bar{i} \frac{\partial \Pi}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial \Pi}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial \Pi}{\partial z} \right) = -\text{grad } \Pi. \quad (2.57)$$

6.7. Закон сохранения механической энергии. Теорема об изменении кинетической энергии точки выражается формулой

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = A,$$

т.е. работа силы на некотором перемещении точки равна разности кинетических энергий точки. С другой стороны, работа силы в консервативном силовом поле, согласно (2.51), равна

$$A = \Pi_0 - \Pi_1.$$

Следовательно,

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \Pi_0 - \Pi_1 \quad \text{или} \quad \frac{mv_1^2}{2} + \Pi_1 = \frac{mv_0^2}{2} + \Pi_0 = C,$$

где C – постоянная величина.

Если обозначить полную механическую энергию, состоящую из кинетической и потенциальной энергий буквой E , то последнее равенство можно представить в виде:

$$E = \frac{mv^2}{2} + \Pi = C. \quad (2.58)$$

Равенство (2.58) выражает закон сохранения механической энергии: при движении точки в консервативном силовом поле ее полная механическая энергия остается величиной постоянной.

Следует иметь в виду, что закон сохранения механической энергии имеет место только в консервативном силовом поле.

6.8. Примеры вычисления потенциальной энергии. Определим потенциальную энергию поля силы тяжести, центральной силы и силы упругости.

a). Потенциальная энергия поля силы тяжести.

Направляя координатную ось z вертикально вверх (рис. 2.12), имеем

$$P_x = 0, \quad P_y = 0, \quad P_z = -mg.$$

Согласно (2.52), потенциальная энергия в однородном поле сил тяжести при перемещении точки из положения M , где потенциальная энергия равна Π , в положение M_0 , где $\Pi = 0$, будет равна

$$\Pi = A_{M M_0} = - \int_z^0 mg dz = -mg z \Big|_z^0 = mgz. \quad (2.59)$$

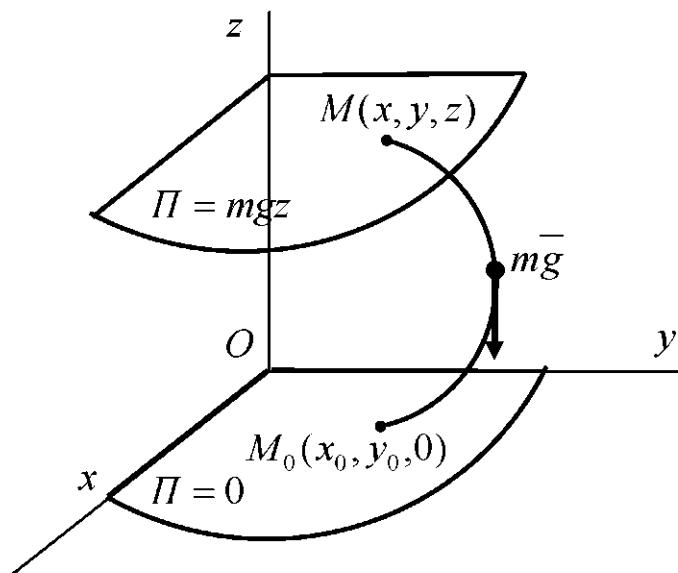


Рис. 2.12

Эквипотенциальные поверхности в однородном поле силы тяжести образуют семейство горизонтальных плоскостей, а силовыми линиями являются прямые, параллельные оси z .

б). Потенциальная энергия поля центральной силы. Центральной силой называется сила, линия действия которой все время проходит через некоторую точку поля (центр), а модуль силы зависит только от расстояния r точки до центра (рис. 2.13).

Если этот центр совместить с началом координат, то для центральной силы имеем

$$\bar{F}(\bar{r}) = \frac{\bar{r}}{r} F_r(r), \quad (2.60)$$

где $F_r(r) = \pm F(r)$ – проекция силы на \bar{r} . Если $F_r(r) > 0$, то $\bar{F}(r)$ – сила отталкивания; если $F_r(r) < 0$, то $\bar{F}(r)$ – сила притяжения.

Элементарная работа равна

$$\delta A = \bar{F} \cdot d\bar{r} = F_r(r) \frac{\bar{r} \cdot d\bar{r}}{r} = F_r(r) dr.$$

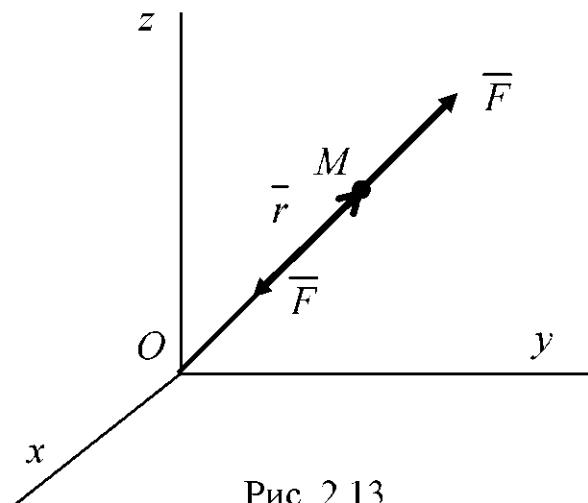


Рис. 2.13

Тогда потенциальная энергия будет равна

$$P = \int_{r_1}^{r_0} F_r(r) dr. \quad (2.61)$$

Эквиденциальные поверхности поля центральных сил образуют семейство сфер с центром в начале координат, а силовые линии образуют пучок прямых, выходящих из начала координат.

В частности, центральной силой является гравитационная сила. Согласно

закону всемирного тяготения

$$\bar{F} = -f \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\bar{r}}{r}; \quad F_r = -f \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

где f – постоянная тяготения, m_1 и m_2 – массы притягивающихся материальных точек, а r – расстояние между ними.

Потенциальная энергия силы тяготения будет равна

$$P = -fm_1 m_2 \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{r^2} = \frac{fm_1 m_2}{r} \Big|_{r_1}^{r_0}, \quad \text{или} \quad P = fm_1 m_2 \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_1} \right). \quad (2.62)$$

6.9. Примеры применения общих теорем динамики точки для решения задач.

Пример 1. Груз весом \bar{P} опускается вниз по шероховатой наклонной плоскости, расположенной под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. В начальный момент времени скорость груза была равна 3 м/с. Через какой промежуток времени скорость груза утроится, если коэффициент трения скольжения $f = 0,1$?

Решение. Изобразим силы, приложенные к грузу: \bar{P} – вес груза, \bar{N} – нормальная реакция плоскости, \bar{F}_T – сила трения скольжения груза о плоскость. Ось x направим вдоль наклонной плоскости вниз в сторону движения груза (рис. 2.14).

Эту задачу целесообразнее решать применяя теорему об изменении количества движения, так как известны скорости точки в начальный и конечный моменты времени и требуется определить время t_1 .

Запишем теорему об изменении количества движения точки в проекции на ось x :

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx}.$$

Согласно условию задачи имеем: $v_{0x} = v_0 = 3 \text{ м/с}$, $v_{1x} = v_1 = 3v_0 = 9 \text{ м/с}$.

$$\sum S_{kx} = S_x(\bar{P}) + S_x(\bar{F}_T) + S_x(\bar{N}) = \int_0^{t_1} P_x dt + \int_0^{t_1} F_{Tx} dt + \int_0^{t_1} N_x dt.$$

Имея в виду, что $P_x = mg \sin 30^\circ$; $F_{Tx} = -fN = -fm g \cos 30^\circ$;

$N_x = 0$, находим

$$\sum S_{kx} = mg \sin 30^\circ t_1 - fm g \cos 30^\circ t_1 = mgt_1 (\sin 30^\circ - f \cos 30^\circ) = 4.06mt_1.$$

Следовательно, $3mv_0 - mv_0 = 4.06mt_1$, откуда $t_1 = \frac{2 \cdot v_0}{4.06} = \frac{6}{4} = 1.5 \text{ с}$.

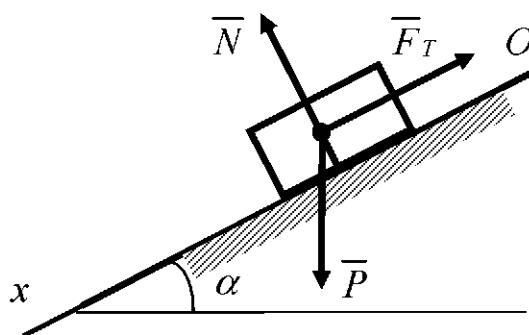


Рис. 2.14

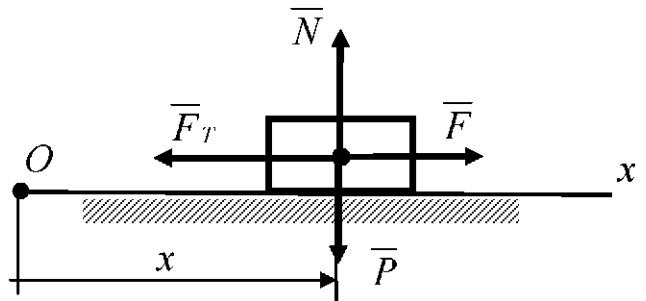


Рис. 2.15

Пример 2. Твердое тело массой 2 кг начинает двигаться из состояния покоя по шероховатой горизонтальной плоскости под действием силы F , изменяющейся по закону $F = 6t^2$.

Какую скорость приобретет тело через 2 с после начала движения, если коэффициент трения скольжения тела о плоскость равен $f = 0,1$?

Решение. Эту задачу также целесообразно решать с помощью теоремы об изменении количества движения, так как известны скорость точки в начале движения и время t_1 .

Запишем теорему об изменении количества движения точки в проекции на ось x . Ось x проводим по горизонтали в сторону движения тела (рис. 2.15)

$$mv_{1x} - mv_{0x} = \sum S_{kx}.$$

Здесь

$$v_{1x} = v_1, \quad v_{0x} = v_0 = 0,$$

$$\sum S_{kx} = S_x(\bar{P}) + S_x(\bar{N}) + S_x(\bar{F}) + S_x(\bar{F}_T) = \int_0^{t_1} P_x dt + \int_0^{t_1} N_x dt + \int_0^{t_1} F_{Tx} dt + \int_0^{t_1} F_x dt.$$

Имея в виду, что $P_x = 0$; $N_x = 0$; $F_{Tx} = -F_T = -fN = -fmg$, $F_x = 6t^2$, находим

$$\sum S_{kx} = -fmgt_1 + 6 \frac{t_1^3}{3} = -4 + 2 \times 8 = 12 H \cdot c.$$

Следовательно,

$$mv_1 = 12, \quad v_1 = 6 \text{ м/с.}$$

Пример 3. Материальная точка массой $m = 1$ кг движется в плоскости xy согласно уравнениям $x = t^2$, $y = 3 - 2t$. Определить момент равнодействующей всех сил, действующих на точку относительно начала координат в момент времени $t = 2$ с.

Решение. Для решения этой задачи применим теорему об изменении момента количества движения точки относительно неподвижного центра.

$$\frac{dl_0}{dt} = \bar{m}_0(\bar{F}), \quad (\text{a})$$

Имея в виду, что

$$\bar{l}_0 = \bar{r} \times m\bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x & y & z \\ m\dot{x} & m\dot{y} & m\dot{z} \end{vmatrix} = \bar{i}m(y\dot{z} - z\dot{y}) + \bar{j}m(z\dot{x} - x\dot{z}) + \bar{k}(x\dot{y} - y\dot{x})m,$$

находим

$$\left. \begin{aligned} l_x &= m(y\dot{z} - z\dot{y}); \\ l_y &= m(z\dot{x} - x\dot{z}); \\ l_z &= m(x\dot{y} - y\dot{x}). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

В нашем случае $z = 0$, $\dot{z} = 0$

Следовательно, $I_x = I_y = 0$, $I_0 = I_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = 2t^2 - 6t$, и уравнение (а) можно выразить в скалярной форме

$$\frac{dl_0}{dt} = m_0(\bar{F}). \quad (\text{в})$$

Как видно из равенства (в), для определения $m_0(\bar{F})$ достаточно вычислить производную по времени от I_0 .

Таким образом, имеем

$$m_0(\bar{F}) = \frac{d}{dt}(2t^2 - 6t) = 4t - 6.$$

В момент времени $t = 2\text{ с}$, $m_0(\bar{F}) = 2 \text{ Н}\cdot\text{м}$. Знак плюс указывает, что момент равнодействующей относительно начала координат направлен против хода часовой стрелки.

Пример 4. Материальная точка массой $m = 1\text{ кг}$ движется по закону

$\bar{r} = \bar{i}t^2 + \bar{j}2t + \bar{k}t^3$. Определить момент равнодействующей всех сил, действующих на точку относительно начала координат в момент времени $t = 1\text{ с}$.

Решение. Так как точка перемещается в пространстве, то для решения этой задачи применим теорему об изменении момента количества движения точки относительно координатных осей.

$$\frac{dl_x}{dt} = m_x(\bar{F}); \quad \frac{dl_y}{dt} = m_y(\bar{F}); \quad \frac{dl_z}{dt} = m_z(\bar{F}), \quad (\text{а})$$

где

$$l_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}), \quad l_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}), \quad l_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}).$$

В нашем случае

$$\dot{x} = 2t, \quad \dot{y} = 2, \quad \dot{z} = 3t^2.$$

Следовательно,

$$l_x = 4t^3, \quad l_y = -t^4, \quad l_z = -2t^2.$$

Дифференцируя l_x, l_y, l_z по времени и имея в виду (а), находим

$$m_x(\bar{F}) = 12t^2, \quad m_y(\bar{F}) = -4t^3, \quad m_z(\bar{F}) = -4t.$$

Знаки указывают, что моменты равнодействующей относительно осей y и z направлены по ходу часовой стрелки.

Момент равнодействующей относительно начала координат будет равен

$$m_0(\bar{F}) = \sqrt{m_x(\bar{F})^2 + m_y(\bar{F})^2 + m_z(\bar{F})^2} = 13.26 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Пример 5. Материальная точка массой m брошена вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 25 \text{ м/с}$. Определить наибольшую высоту h подъема точки. Сопротивлением воздуха пренебречь.

Решение. Решим эту задачу, применяя теорему об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k.$$

Скорость точки в наивысшем ее положении равна нулю, т.е. $v_1 = 0$. Так как на материальную точку действует только сила тяжести, то

$$\sum A_k = A(\bar{G}) = -mgh.$$

Следовательно, изменение кинетической энергии равно

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgh,$$

откуда

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = 31,86 \text{ м.}$$

Пример 6. По горизонтальной плоскости движется тело массой m , которому была сообщена начальная скорость $v_0 = 6 \text{ м/с}$. Определить коэффициент трения скольжения между телом и плоскостью, если тело до остановки прошло путь $s = 18 \text{ м}$?

Решение. Применим теорему об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k.$$

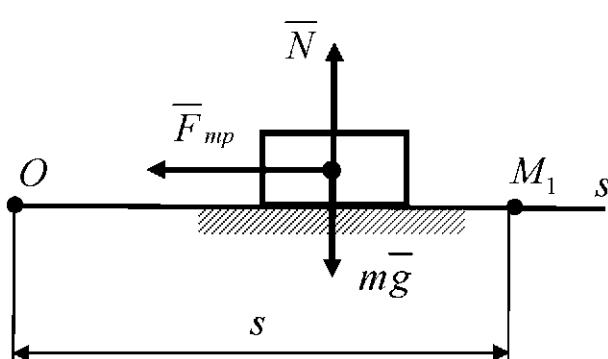


Рис. 2.16

Скорость точки в конечном положении равна нулю, т.е. $v_1 = 0$. На материальную точку действуют три силы: сила тяжести $m\bar{g}$, нормальная реакция плоскости \bar{N} и сила трения \bar{F}_{mp} (рис. 2.16).

Вычислим сумму работ сил, приложенных к телу на его перемещении:

$$\sum A_k = A(\bar{P}) + A(\bar{N}) + A(\bar{F}_{mp}).$$

Работа силы тяжести

$$A(\bar{P}) = \pm mgh = 0,$$

т.к. $h = 0$. Работа нормальной реакции $A(\bar{N}) = 0$, т.к. $\bar{N} \perp s$. Работа силы трения

$$A(\bar{F}_{mp}) = -F_{mp}s = -fNs = -fmgs,$$

$$N = P = mg.$$

Следовательно, изменение кинетической энергии равно

$$\frac{mv_0^2}{2} = fmgs,$$

откуда

$$f = \frac{v_0^2}{2gs} = \frac{36}{2 \cdot 9,81 \cdot 18} = 0,1.$$

Пример 7. Пружина имеет в недеформированном состоянии длину 0,3 м. Пружину сжимают на величину 0,1 м, после чего к свободному концу пружины присоединяют груз массой $m = 1$ кг и отпускают его без начальной скорости. Определить коэффициент жесткости пружины, если груз, пройдя путь, равный 0,1 м, приобретает скорость 1,5 м/с. Груз перемещается по гладкой горизонтальной плоскости (рис. 2.17).

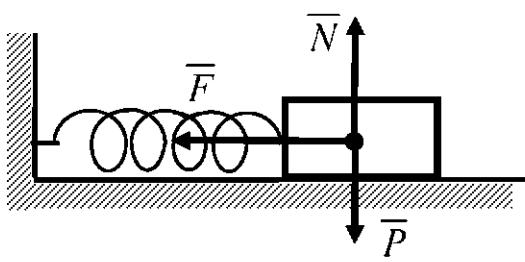


Рис. 2.17

Решение. К грузу приложены следующие силы: \bar{P} – сила тяжести, \bar{F} – сила упругости, \bar{N} – нормальная реакция плоскости. Для решения этой задачи опять применим теорему об изменении кинетической энергии точки

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \sum A_k.$$

В нашем случае $v_0 = 0$; $v_1 = 1,5$ м/с; $\sum A_k = A(\bar{P}) + A(\bar{N}) + A(\bar{F})$,

где $A(\bar{P}) = A(\bar{N}) = 0$, т.к. $\bar{P} \perp s$, $\bar{N} \perp s$, а $A(\bar{F}) = \frac{c}{2}(r_0^2 - r_1^2)$, где $r_0 = 0,1$ м – начальная деформация пружины; $r_1 = 0$ – конечная деформация пружины. Следовательно,

$$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{c}{2}r_0^2, \quad \text{откуда} \quad c = \frac{mv_1^2}{r_0^2} = 225 \text{ Н/м}.$$

7. Динамика относительного движения точки

7.1. Дифференциальные уравнения относительного движения точки.

Как известно, всякое движение материальной точки рассматривается относительно какого-либо тела, с которым связывают систему отсчета.

Основные законы динамики справедливы по отношению к так называемой инерциальной системе отсчета. Инерциальную систему отсчета называют еще условно неподвижной, а движение по отношению к ней – абсолютным.

В общем случае система отсчета, по отношению к которой исследуется движение материальной точки, может быть неинерциальной. Пусть материальная точка массой m движется в инерциальной системе отсчета $O_1x_1y_1z_1$ под действием силы \bar{F} . В соответствии с основным законом динамики имеем

$$m\bar{a} = \bar{F}. \quad (2.63)$$

Составим уравнение движения этой точки по отношению к системе отсчета $Oxyz$, произвольно перемещающейся относительно первоначальной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 2.18).

По теореме Кориолиса ускорение точки относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ равно

$$\bar{a} = \bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c, \quad (2.64)$$

где \bar{a}_r – ускорение точки относительно подвижной системы отсчета $Oxyz$ (относительное ускорение); \bar{a}_e – переносное ускорение; \bar{a}_c – кориолисово ускорение.

Учитывая (2.64), равенство (2.63) перепишем в виде:

$$m(\bar{a}_r + \bar{a}_e + \bar{a}_c) = \bar{F},$$

откуда

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + (-m\bar{a}_e) + (-m\bar{a}_c). \quad (2.65)$$

Введем обозначения:

$$-m\bar{a}_e = \bar{\Phi}_e, \quad -m\bar{a}_c = \bar{\Phi}_c. \quad (2.66)$$

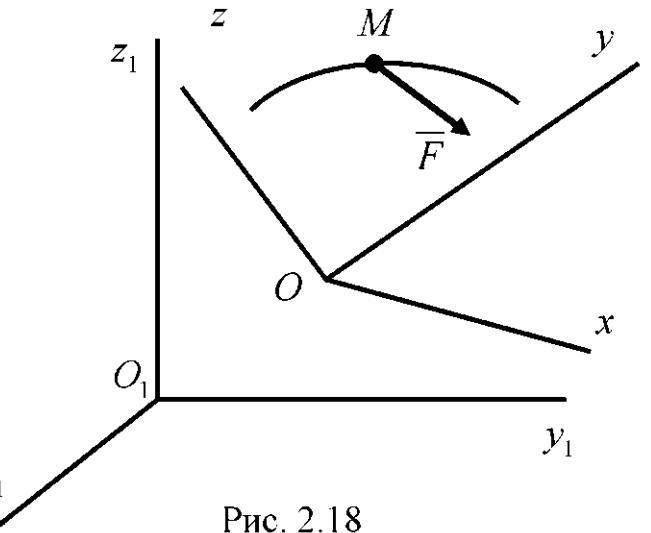


Рис. 2.18

Величины $\overline{\Phi}_e$ и $\overline{\Phi}_c$ имеют размерность силы и действуют на материальную точку в подвижной системе координат. Их называют соответственно переносной и кориолисовой силами инерции. Тогда из равенства (2.65) получим

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \overline{\Phi}_e + \overline{\Phi}_c. \quad (2.67)$$

Уравнение (2.67) представляет основное уравнение динамики относительного движения точки.

Сравнивая между собой формулы (2.63) и (2.67), находим, что уравнение относительного движения точки составляется также, как и уравнение абсолютного движения, если к действующим на точку силам взаимодействия с другими материальными телами прибавить переносную и кориолисову силы инерции.

Таким образом, и переносная, и кориолисова силы инерции участвуют в создании относительного ускорения совершенно так же, как и силы взаимодействия точки с другими телами. Силы инерции $\overline{\Phi}_e$ и $\overline{\Phi}_c$ являются поправками на неинерциальность системы отсчета.

Проектируя обе части равенства (2.67) на оси $Oxyz$, получим дифференциальные уравнения относительного движения точки в проекциях на эти оси:

$$\left. \begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x + \Phi_{ex} + \Phi_{cx}, \\ m\ddot{y} &= F_y + \Phi_{ey} + \Phi_{cy}, \\ m\ddot{z} &= F_z + \Phi_{ez} + \Phi_{cz}. \end{aligned} \right\} \quad (2.68)$$

В частных случаях, когда подвижная система отсчета $Oxyz$ движется поступательно, прямолинейно и равномерно относительно инерциальной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, имеет место: $\bar{a}_e = 0$; $\bar{a}_c = 0$, следовательно $\overline{\Phi}_e = 0$, $\overline{\Phi}_c = 0$. Тогда уравнение (2.67) перепишется в виде:

$$m\bar{a}_r = \bar{F}. \quad (2.69)$$

Уравнения (2.63) и (2.69) совпадают, что позволяет сделать заключение, что любая система координат, движущаяся относительно инерциальной системы отсчета поступательно, прямолинейно и равномерно, также является инерциальной. Из этого результата вытекает, что никаким механическим экспериментом нельзя обнаружить, находится ли данная система отсчета в покое или же совершает поступательное, прямолинейное и равномерное движение (принцип относительности Галилея-Ньютона).

7.2. Уравнение относительного покоя точки. Если точка находится в покое относительно подвижной системы координат $Oxyz$, то $\bar{a}_r = 0$, $\bar{v}_r = 0$, а следовательно, $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r) = 0$, $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c = 0$. Тогда уравнение (2.67) примет вид:

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_c = 0. \quad (2.70)$$

Равенство (2.70) выражает условие относительного покоя точки.

Отметим следующее различие понятия об условиях равновесия в инерциальной и неинерциальной системах отсчета. В инерциальной системе отсчета условие равновесия ($\bar{F} = 0$) означает, что точка находится либо в покое, либо в прямолинейном равномерном движении. В неинерциальной системе отсчета условие (2.70) определяет только то, что материальная точка находится в относительном покое. Если же точка движется равномерно и прямолинейно относительно подвижной системы координат $Oxyz$, то действующие на точку силы должны удовлетворять условию

$$\bar{F} + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c = 0. \quad (2.71)$$

7.3. Теорема об изменении кинетической энергии точки при относительном движении.

Имея в виду, что основное уравнение динамики относительного движения (2.67) отличается от основного закона динамики (2.63) наличием в правой части сил инерций $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_c$, можно утверждать, что все общие теоремы динамики точки, являющиеся следствиями уравнения (2.63), имеют место и в относительном движении, если к силам взаимодействия с другими телами прибавить переносную и кориолисову силы инерции. С учетом этого обстоятельства теорема об изменении кинетической энергии в относительном движении точки будет иметь вид:

$$d\left(\frac{mv_r^2}{2}\right) = \bar{F} \cdot d\bar{r} + \bar{\Phi}_e \cdot d\bar{r} + \bar{\Phi}_c \cdot d\bar{r},$$

где \bar{r} – радиус-вектор точки относительно подвижной системы координат $Oxyz$.

Нетрудно видеть, что

$$\bar{\Phi}_c \cdot d\bar{r} = 0,$$

т.к. кориолисово ускорение \bar{a}_c , а следовательно, и кориолисова сила инерции $\bar{\Phi}_c$ всегда направлены перпендикулярно перемещению $d\bar{r}$. Тогда выражение

теоремы об изменении кинетической энергии точки в относительном движении принимает вид:

$$d\left(\frac{mv_r^2}{2}\right) = \bar{F} \cdot d\bar{r} + \bar{\Phi}_e \cdot d\bar{r}. \quad (2.72)$$

Интегрируя обе части равенства в соответствующих пределах, находим

$$\frac{mv_{r(1)}^2}{2} - \frac{mv_{r(0)}^2}{2} = A(\bar{F}) + A(\bar{\Phi}_e), \quad (2.73)$$

т.е. изменение кинетической энергии в относительном движении точки равно работе заданных сил и работе переносной силы инерции на относительном перемещении точки.

7.4. Относительный покой и относительное движение вблизи поверхности Земли.

Система отсчета, скрепленная с Землей, не является инерциальной, так как по отношению к гелиоцентрической системе отсчета она совершает вращение вокруг своей оси и движется вокруг Солнца. Однако последнее движение для промежутков времени, много меньших одного года, мало отличается от равномерного и прямолинейного. Поэтому рассмотрим только влияние суточного вращения Земли вокруг ее оси на относительный покой или движение тел, находящихся вблизи земной поверхности. Угловая скорость вращения Земли

$$\omega = 2\pi / 86164 \approx 0,000073 c^{-1}. \quad (2.74)$$

Рассмотрим вначале случай относительного покоя точки на поверхности Земли. Тогда, согласно уравнению (2.70), будем иметь

$$\bar{F}_T + \bar{N} + \bar{\Phi}_e = 0, \quad (2.75)$$

где \bar{F}_T – сила притяжения Земли; \bar{N} – нормальная реакция горизонтальной поверхности Земли; $\bar{\Phi}_e$ – переносная сила инерции. Так как $\omega = const$, то сила $\bar{\Phi}_e$ имеет только нормальную составляющую, перпендикулярную к оси вращения Земли. Введем обозначение

$$\bar{F}_T + \bar{\Phi}_e = \bar{P}. \quad (2.76)$$

Тогда на точку M будут действовать две силы \bar{P} и \bar{N} , уравновешивающие друг друга (рис. 2.19). Тогда $\bar{P} + \bar{N} = 0$ или $\bar{N} = -\bar{P}$. Следовательно, \bar{P} есть та сила, которую мы называем силой тяжести (вес) тела. Направление силы \bar{P} дает направление вертикали в данной точке земной поверхности, а плоскость, перпендикулярная к \bar{P} , и будет горизонтальной плоскостью. По модулю

$$\Phi_e = m\omega^2 r,$$

где r – расстояние точки M от земной оси. Так как величина ω^2 очень мала, то и Φ_e является величиной малой по сравнению с \bar{F}_T . Поэтому направление силы \bar{P} мало отличается от направления \bar{F}_T . Так как при всех расчетах в уравнения

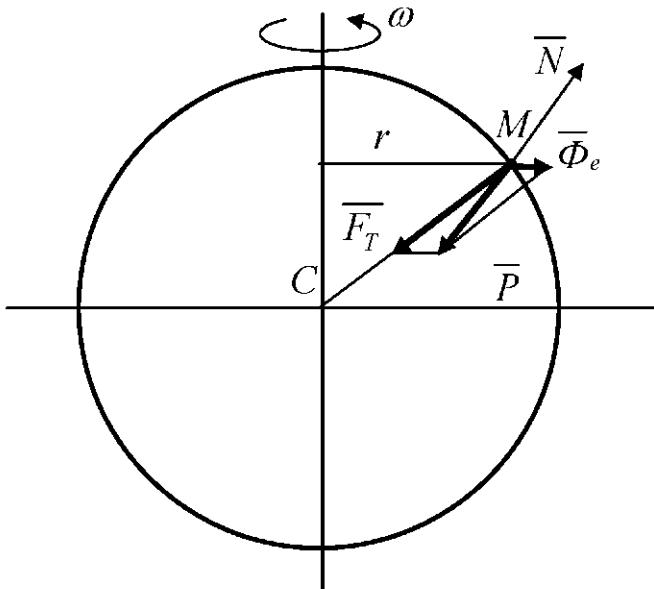


Рис. 2.19

равновесия вводится сила \bar{P} , а не сила притяжения \bar{F}_T , то тем самым в этих уравнениях фактически учитываем влияние вращения Земли. Поэтому при составлении уравнений равновесия тел по отношению к Земле никаких поправок на вращение Земли вводить не надо.

Теперь рассмотрим случай относительного движения точки вблизи земной поверхности. Тогда, согласно (2.67), будем иметь

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{F}_T + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c, \quad (2.77)$$

но $\bar{F}_T + \bar{\Phi}_e = \bar{P}$, и (2.77) перепишем в виде:

$$m\bar{a}_r = \bar{F} + \bar{P} + \bar{\Phi}_c. \quad (2.78)$$

Отсюда следует, что когда мы считаем оси, связанные с Землей, неподвижными, то фактически пренебрегаем только кориолисовой силой инерции, численно равной

$$\Phi_c = 2m\omega v_r \sin(\bar{\omega}, \bar{v}_r), \quad (2.79)$$

где ω – угловая скорость вращения Земли.

Из формулы (2.79) следует, что при не очень больших значениях v_r силой $\bar{\Phi}_c$ по сравнению с силой тяжести \bar{P} можно пренебречь, так как угловая скорость вращения Земли весьма мала. Поэтому систему отсчета, связанную с Землей, можно рассматривать как инерциальную в большинстве инженерных расчетах.

Учет вращения Земли приобретает практическое значение при очень больших значениях \bar{v}_r или для движений, длищихся очень долго (течение рек, воздушные и морские течения). Так, например, в северном полушарии из-за до-

полнительного действия кориолисовой силы инерции $\bar{\Phi}_c$ тело, движущееся вдоль земной поверхности по любому направлению, будет отклоняться вправо от направления движения. В южном полушарии отклонение будет происходить влево. Действие кориолисовой силы инерции на летящие ракеты, снаряды, движущийся воздух, морские течения также приводит к их отклонению. Кориолисова сила инерции способствует образованию циклонов, антициклонов, вихрей, смерчей и т.д.

В качестве примера рассмотрим действие кориолисовой силы инерции на свободно падающее материальное тело (точку) с высоты H от поверхности Земли [10]. Действующую на точку силу тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ будем считать постоянной, а сопротивлением воздуха будем пренебрегать. Связем с Землей систему координат xuz , причем начало координат этой системы совместим с точкой

поверхности Земли, лежащей на одной вертикали с начальным положением падающего тела M_0 (рис. 2.20, а, б). Ось z направим по вертикали вверх через

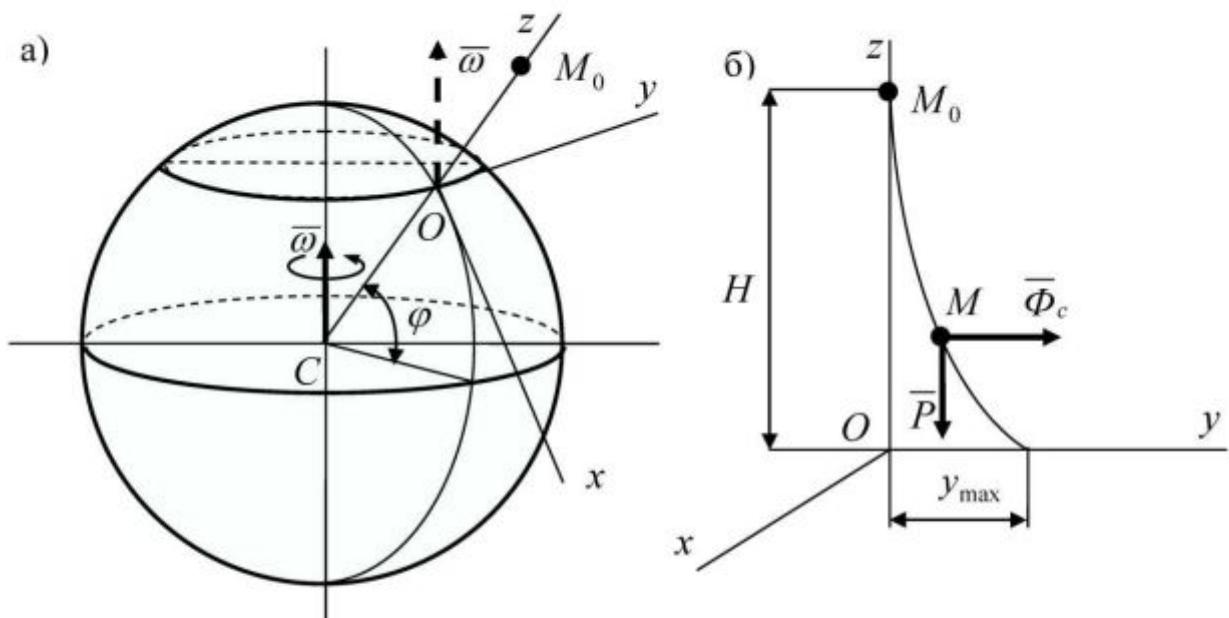


Рис. 2.20

центр Земли, ось x – по касательной к меридиану к югу, а ось y – перпендикулярно к плоскости меридиана к востоку. Тогда начальными условиями будут: при $t = 0$:

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = H, \\ \dot{x}_0 = 0, \quad \dot{y}_0 = 0, \quad \dot{z}_0 = 0. \end{array} \right\} \quad (2.80)$$

Основное уравнение динамики относительного движения точки в случае, когда переносное движение – равномерное вращение, имеет вид:

$$m\bar{a}_r = \bar{F}_r + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c,$$

но $\bar{F}_r + \bar{\Phi}_e = \bar{P}$ и направлена по вертикали вниз.

Кориолисово ускорение точки $\bar{a}_c = 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r)$ направлено перпендикулярно к плоскости меридиана на запад, а кориолисова сила инерции $\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c$ – на восток.

Ее модуль $\Phi_c = 2m|\bar{\omega}|v_r|\cos\varphi$, где φ – широта, на которой находится точка.

Составим дифференциальные уравнения относительного движения точки в проекциях на выбранные оси координат

$$\left. \begin{array}{l} m\ddot{x} = 0; \\ m\ddot{y} = 2m\omega v_r \cos\varphi; \\ m\ddot{z} = -mg. \end{array} \right\} \quad (2.81)$$

Предполагая, что направление скорости \bar{v}_r при движении мало отклоняется от вертикали z , т.е. $v_r = v_z = |\dot{z}| = gt$, проинтегрируем уравнения (2.81)

$$\dot{x} = C_1, \quad \dot{z} = -gt + C_2, \quad \dot{y} = \omega gt^2 \cos\varphi + C_3. \quad (2.82)$$

Подставляя начальные условия (2.80) в уравнения (2.82), находим

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad C_3 = 0.$$

Следовательно,

$$\dot{x} = 0, \quad \dot{y} = \omega gt^2 \cos\varphi, \quad \dot{z} = -gt. \quad (2.83)$$

Интегрируя еще раз уравнения (2.83), находим

$$x = C_4, \quad y = \frac{1}{3}\omega gt^3 \cos\varphi + C_5, \quad z = -g \frac{t^2}{2} + C_6. \quad (2.84)$$

После подстановки начальных условий (2.80) в уравнения (2.84) имеем

$$C_4 = 0, \quad C_5 = 0, \quad C_6 = H.$$

Следовательно,

$$x = 0, \quad y = \frac{\omega gt^3}{3} \cos\varphi, \quad z = H - \frac{gt^2}{2}. \quad (2.85)$$

Из третьего уравнения (2.85) определим время падения точки на Землю при $z = 0$

$$H = \frac{gt_1^2}{2}, \quad t_1 = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Подставляя значение t_1 во второе уравнение (2.85), получаем

$$y_{\max} = \frac{2}{3} \omega H \sqrt{\frac{2H}{g}} \cos \varphi . \quad (2.86)$$

Итак, по формуле (2.86) можно найти величину отклонения точки от вертикали к востоку при ее падении. Как видно из формулы, величина y_{\max} зависит от высоты H и широты места начала падения точки.

Тело, брошенное вертикально вверх, в Северном полушарии отклоняется от вертикали на запад, так как кориолисова сила инерции в этом случае направлена перпендикулярно к плоскости меридiana к западу.

7.5. Примеры на относительное движение материальной точки.

Пример 1. Материальная точка M массой $m = 0,5$ кг перемещается по цилиндрическому каналу поступательно движущейся тележки A по закону $y_1 = 2t^3$ (м).

Найти уравнение относительного движения точки $x = x(t)$, приняв за начало отсчета точку O (рис. 2.21), при следующих начальных условиях: $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 3$ м/с. Пусть коэффициент трения скольжения точки по цилиндрическому каналу $f = 0,15$, а $\alpha = 45^\circ$.

Решение. Ось x совместим с траекторией относительного движения точки. Перемещение тележки по оси O_1y_1 является переносным движением для точки M . Движение точки M вдоль трубы будет относительным движением. Так как переносное движение является поступательным, то $\bar{a}_c = 0$, и, следовательно, $\bar{\Phi}_c = 0$. Тогда основное уравнение динамики относительного движения точки (2.67) примет вид:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N} + \bar{F}_T + \bar{\Phi}_e, \quad (1)$$

где \bar{P} – сила тяжести, \bar{N} – нормальная реакция, \bar{F}_T – сила трения, $\bar{\Phi}_e$ – переносная сила инерции.

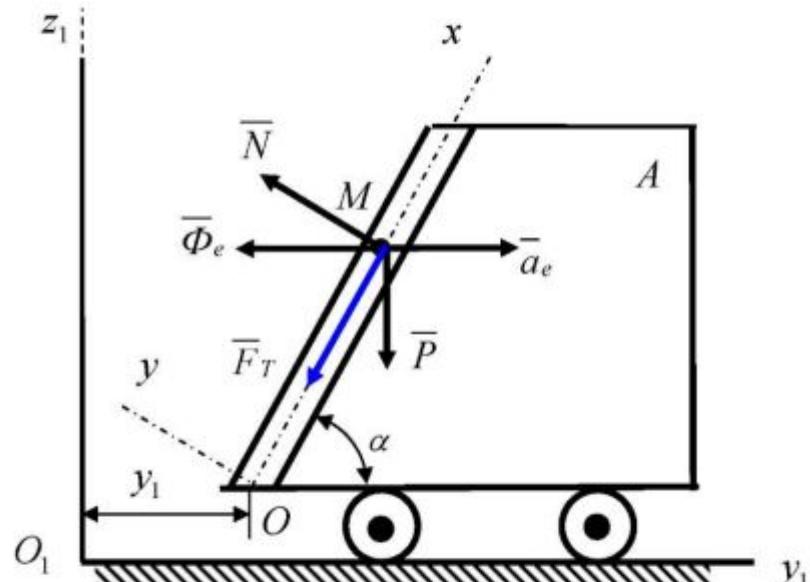


Рис. 2.21

Так как переносное движение – поступательное и прямолинейное, то $a_e = \ddot{y}_1 = 12t$, $\Phi_e = ma_e = 6t$.

Переносное ускорение \bar{a}_e направлено в сторону положительного направления оси y_1 , так как $a_{e,y_1} = \ddot{y}_1 > 0$. Следовательно, $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e$ будет направлена противоположно \bar{a}_e .

Проектируя обе части равенства (1) на оси Ox и Oy , получим

$$m\ddot{x} = -mg \sin 45^\circ - F_T - \bar{\Phi}_e \cos 45^\circ, \quad (2)$$

$$m\ddot{y} = -mg \cos 45^\circ + N + \bar{\Phi}_e \sin 45^\circ. \quad (3)$$

Так как $\ddot{y} = 0$, то $N = mg \cos 45^\circ - \bar{\Phi}_e \sin 45^\circ = 2,5\sqrt{2} - 3\sqrt{2}t$,

следовательно,

$$F_T = fN = 0,15(3,5 - 4,2t). \quad (4)$$

Подставляя значение F_T в уравнение (2) и интегрируя, находим

$$\ddot{x} = -8,05 - 7,14t, \quad (5)$$

$$\dot{x} = -8,05t - 3,57t^2 + C_1, \quad (6)$$

$$x = -4,03t^2 - 1,19t^3 + C_1t + C_2. \quad (7)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяем по начальным услови-

ям:

$$3 = C_1; \quad 0 = C_2.$$

Следовательно,

$$x = 3t - 4,03t^2 - 1,19t^3. \quad (8)$$

Пример 2. Материальная точка M массы $m = 0,5\text{кг}$ перемещается по гладкому цилиндрическому каналу тела A , которое равномерно вращается вокруг неподвижной оси z_1 с угловой скоростью $\omega = 3\text{с}^{-1}$. Найти уравнение относительного движения точки $x = x(t)$, приняв за начало координат точку O (рис. 2.22), при следующих начальных условиях: $x_0 = 0,1\text{м}$; $\dot{x}_0 = 0$. Найти также давление шарика на стенку канала в момент времени $t_1 = 1\text{с}$.

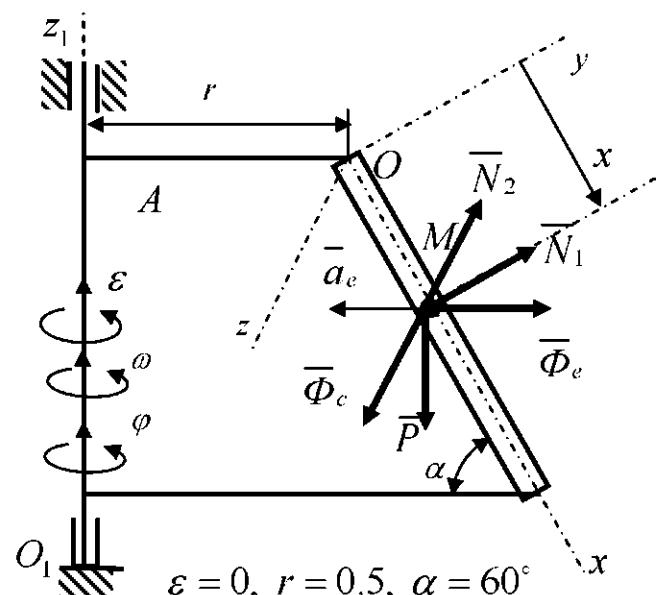


Рис. 2.22

Решение. Связем подвижную систему координат $Oxyz$ с вращающимся телом A , совместив ось x с траекторией относительного движения точки M . Следовательно, движение точки M вдоль канала является относительным, а вращение тела A – переносным для точки M .

Основное уравнение динамики относительного движения определяется равенством (2.67)

$$m\bar{a}_r = \sum \bar{F}_k + \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_c. \quad (1)$$

К точке M приложены следующие силы: \bar{P} – сила тяжести; \bar{N} – нормальная реакция стенки канала. Эту реакцию можно разложить на две взаимно перпендикулярные составляющие \bar{N}_1, \bar{N}_2 направленные параллельно осям Oy и Oz .

Присоединим к силам, действующим на точку M , переносную и кориолисову силы инерции $\bar{\Phi}_e$ и $\bar{\Phi}_c$.

Так как переносное движение – равномерное вращение, то

$$\bar{\Phi}_e = \bar{\Phi}_e^\omega = -m\bar{a}_e^\omega. \quad (2)$$

Кориолисова сила инерции

$$\bar{\Phi}_c = -m\bar{a}_c. \quad (3)$$

Их модули равны соответственно

$$\left. \begin{aligned} \Phi_e^\omega &= m\bar{a}_e^\omega = m\omega^2(r + x\cos\alpha), \\ \Phi_c &= 2m\omega|\dot{x}|\sin 30^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Найдем направления векторов \bar{a}_e^ω и \bar{a}_c , а следовательно, и сил инерции $\bar{\Phi}_e^\omega$ и $\bar{\Phi}_c$.

Вектор \bar{a}_e^ω направлен от точки M к оси вращения O_1z_1 , а \bar{a}_c направлен параллельно оси Oz в противоположную сторону.

Силы инерции $\bar{\Phi}_e^\omega$ и $\bar{\Phi}_c$ направлены противоположно ускорениям \bar{a}_e^ω и \bar{a}_c соответственно (рис. 2.22).

Основное уравнение динамики относительного движения точки M в нашем случае имеет вид:

$$m\bar{a}_r = m\bar{g} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 + \bar{\Phi}_e^\omega + \bar{\Phi}_c. \quad (5)$$

Проектируя векторы обеих частей равенства (5) на ось x , получим

$$m\ddot{x} = mg \sin \alpha + \Phi_e^\omega \cos \alpha$$

или

$$\ddot{x} - 2,25x = 10,91. \quad (6)$$

Общее решение полученного дифференциального уравнения (6) равно

$$x = x^* + x^{**}, \quad (7)$$

где x^* – общее решение однородного дифференциального уравнения $\ddot{x} - 2,25x = 0$; x^{**} – частное решение уравнения (6).

Для нахождения общего интеграла однородного дифференциального уравнения $\ddot{x} - 2,25x = 0$ составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2,25 &= 0; \\ \lambda_1 &= 1,5, \quad \lambda_2 = -1,15. \end{aligned}$$

Следовательно, общий интеграл однородного дифференциального уравнения равен

$$x^* = C_1 e^{1,5t} + C_2 e^{-1,5t}. \quad (8)$$

Частное решение дифференциального уравнения (6) ищем в виде:

$$x^{**} = B. \quad (9)$$

Подставляя значения x^{**} и \dot{x}^{**} в уравнение (6), находим

$$B = -4,85.$$

Следовательно,

$$x^{**} = -4,85. \quad (10)$$

Тогда, на основании (7), имеем

$$x = C_1 e^{1,5t} + C_2 e^{-1,5t} - 4,85, \quad (11)$$

$$\dot{x} = 1,5C_1 e^{1,5t} - 1,5C_2 e^{-1,5t}. \quad (12)$$

Подставив начальные условия в уравнения (11) и (12), находим

$$\left. \begin{array}{l} 0,1 = C_1 + C_2 - 4,85; \\ 0 = 1,5C_1 - 1,5C_2. \end{array} \right\} \quad (13)$$

Решая систему уравнений (13), находим

$$C_1 = C_2 = 2,48.$$

Таким образом, имеем

$$x = 2,48e^{1,5t} + 2,48e^{-1,5t} - 4,85. \quad (14)$$

Для определения реакции стенки канала \bar{N} при $t_1 = 1c$ спроектируем обе части равенства (5) на оси y и z . Учитывая, что вектор \bar{a}_r направлен по оси x , получаем:

$$\left. \begin{array}{l} 0 = N_1 - mg \cos \alpha + \Phi_e \sin \alpha; \\ 0 = -N_2 + \Phi_e. \end{array} \right\} \quad (15)$$

Из этих уравнений находим

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= mg \cos \alpha - \Phi_e \sin \alpha = mg \cos \alpha - m\omega^2(r + x \cos \alpha) \sin \alpha; \\ N_2 &= \Phi_e = 2m\omega |\dot{x}| \sin 30^\circ. \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Для получения числовых значений N_1 и N_2 необходимо определить значения x и \dot{x} в момент времени $t_1 = 1c$.

$$x = 2,48e^{1,15} + 2,48e^{-1,15} - 4,85 = 6,81;$$

$$\dot{x} = 3,72(e^{1,5} - e^{-1,5}) = 15,85.$$

Следовательно,

$$N_1 = 0,5 \cdot 9,8 \cdot 0,5 - 0,5 \cdot 9(0,5 + 6,81 \cdot 0,5) \cdot 0,865 = -12,74 \text{ Н};$$

$$N_2 = 2 \cdot 0,5 \cdot 3 \cdot 15,85 \cdot 0,5 = 23,78 \text{ Н}.$$

Знак минус указывает, что на самом деле составляющая реакции \bar{N}_1 направлена противоположно первоначальному направлению.

Полная реакция стенки канала

$$N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} = 27,98 \text{ Н}.$$

Искомое давление материальной точки на стенки канала равно по величине найденной реакции N .

7.6. Невесомость. В космических кораблях, падающих лифтах, летящих только под действием силы тяжести самолетах, возникают явления невесомости. Тела, находящиеся внутри космического корабля под действием силы тяготения Земли, как бы теряют свой вес. Так, например, космонавт свободно парит внутри корабля, ни на что не опираясь; он может оставить свои очки в воздухе, и они не будут падать, а будут висеть. Жидкость, если она не смачивает стенки сосуда, стремится принять форму шара.

Для объяснения явления невесомости рассмотрим груз массой m , находящийся в лифте, который движется вертикально вниз с ускорением \bar{a} по отношению к неподвижной оси O_1z_1 (рис. 2.23).

На груз действуют сила тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$ и реакция \bar{N} . Так как груз, как и лифт, движется с ускорением \bar{a} , то дифференциальное уравнение движения груза имеет вид:

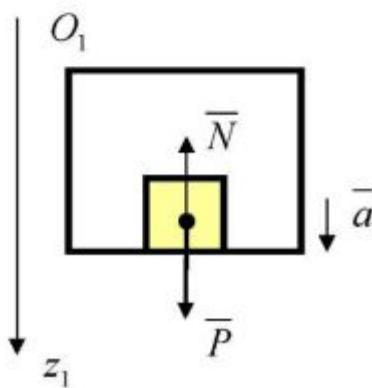


Рис. 2.23

$$ma = mg - N, \text{ или } N = m(g - a). \quad (2.87)$$

Из формулы (2.87) видно, что при $a = g$ получим $N = 0$, т.е. когда лифт свободно падает, груз никакого давления на пол кабины не оказывает. Следовательно, груз по отношению к лифту будет оставаться в покое в любом месте кабины. На чашу динамических весов, находящихся в кабине, груз не окажет никакого давления и они покажут, что «вес» груза равен нулю. Такое состояние тела и называют невесомостью. Объясняется это тем, что под действием силы тяжести и лифт, и груз в нем движутся по отношению к неподвижной оси O_1z_1 с одним и тем же ускорением \bar{g} , а следовательно, и с одинаковой скоростью в каждый момент времени. Поэтому груз относительно лифта не перемещается и не давит на дно кабины.

Явление невесомости можно также объяснить, учитывая действие силы инерции. Если груз находится в покое относительно кабины лифта, то согласно (2.70) имеем

$$m\bar{g} + \bar{N} + \bar{\Phi}_e = 0. \quad (2.88)$$

Так как $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_e = -m\bar{g}$, то $m\bar{g} + \bar{N} - m\bar{g} = 0$, откуда $\bar{N} = 0$.

Следует иметь в виду, что в состоянии невесомости находится любое тело, свободно падающее в поле сил тяжести.

ГЛАВА III. ГЕОМЕТРИЯ МАСС

1. Механическая система

При изучении механического движения с помощью второго закона Ньютона любое материальное тело рассматривается как материальная точка, т.е. предполагается, что масса тела сосредоточена в одной точке, к которой приложены все внешние силы, действующие на данное тело. Упрощение реальной физической задачи часто дает прекрасные результаты, однако не может служить основой даже для приближенного расчета других задач. Например, динамика точки не содержит никакой информации относительно вращательного движения твердых или деформируемых тел и бесполезна сама по себе при изучении движения жидкостей.

Под механической системой понимается совокупность материальных точек или тел, в которой движение каждой точки или тела зависит от положения и движения остальных точек или тел системы. Классическим примером механической системы является Солнечная система, в которой все тела связаны силами взаимного притяжения и положение каждой планеты зависит от положения и движения Солнца и других планет. Другим примером механической системы может служить любая машина или механизм, в которой все тела соединены между собой различными связями (шарнирами, стержнями, тросами, ремнями, цепями и т.д.).

Силы, действующие на точки или тела системы, можно разделить на внешние и внутренние. Внешними называются силы, действующие на точки или тела системы со стороны точек или тел, не входящих в данную систему. Внутренними называются силы, действующие на точки или тела системы со стороны других точек или тел этой же системы. Будем обозначать внешние силы символом \bar{F}^e , а внутренние силы – \bar{F}^i (*e* и *i* начальные буквы французских слов *exterieur* – внешний и *interieur* – внутренний). Разделение сил на внешние и внутренние является условным и зависит от того, движение какой системы тел мы рассматриваем. Так, например, если мы рассматриваем движение всей Солнечной системы в целом, то силы притяжения между планетами будут внутренними; если же рассмотреть движение какой-либо одной планеты, то те же силы будут внешними.

Внутренние силы обладают следующими свойствами:

- 1). Геометрическая сумма всех внутренних сил системы (главный вектор внутренних сил) равна нулю:

$$\sum \bar{F}_k^i = 0. \quad (3.1)$$

2). Геометрическая сумма моментов всех внутренних сил относительно любого центра (главный момент внутренних сил) равна нулю:

$$\sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^i) = \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i = 0. \quad (3.2)$$

Справедливость равенств (3.1) и (3.2) следует из третьего закона динамики, согласно которому любые две точки системы действуют друг на друга с равными по модулю и противоположно направленными силами, и что внутренние силы входят в систему попарно.

Однако из равенств (3.1) и (3.2) не следует, что внутренние силы образуют уравновешенную систему сил, так как эти силы приложены к разным материальным точкам или телам. Классическим примером служит Солнечная система, планеты которой и их спутники совершают сложные движения под действием внутренних сил.

2. Масса системы. Центр масс

Массой системы называется сумма масс всех точек, входящих в систему:

$$M = \sum_{k=1}^n m_k, \quad (3.3)$$

где m_k – масса k -ой материальной точки, а n – число всех точек системы.

Центром масс называется геометрическая точка, радиус-вектор r_C которой определяется равенством

$$r_C = \frac{\sum m_k r_k}{M}, \quad (3.4)$$

где \bar{r}_k – радиус-вектор k -ой точки системы.

Векторное равенство (3.4) эквивалентно трем скалярным:

$$x_c = \frac{\sum m_k x_k}{M}; \quad y_c = \frac{\sum m_k y_k}{M}; \quad z_c = \frac{\sum m_k z_k}{M}. \quad (3.5)$$

Центр масс характеризует распределение масс в системе. Он может находиться вне системы точек или вне твердого тела, как, например, в случае кольца или полого тела. Положение центра масс совпадает с положением центра тяжести тела, находящегося в однородном поле сил тяжести.

Понятие о центре тяжести имеет смысл только для тела, находящегося в однородном поле сил тяжести, тогда как понятие о центре масс – для любой системы материальных точек или тел, независимо от того находится ли данная система под действием каких-нибудь сил или нет.

При непрерывном распределении массы суммы в правых частях равенств (3.4) и (3.5) переходят в интегралы

$$\bar{r}_c = \frac{1}{M_{(v)}} \int \bar{r} dm, \quad (3.6)$$

$$x_c = \frac{1}{M_{(v)}} \int x dm; \quad y_c = \frac{1}{M_{(v)}} \int y dm; \quad z_c = \frac{1}{M_{(v)}} \int z dm. \quad (3.7)$$

3. Момент инерции твердого тела

3.1. Момент инерции тела относительно оси. Радиус инерции. Моментом инерции тела относительно оси называется скалярная величина, равная сумме произведений масс всех точек тела на квадрат их расстояний от этой оси (рис. 3.1)

$$J_z = \sum m_k h_k^2. \quad (3.8)$$

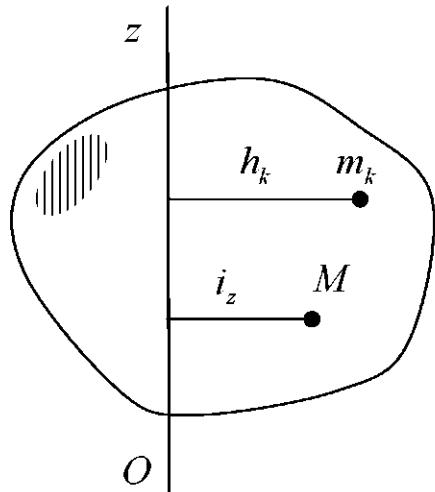


Рис. 3.1

Осевой момент инерции определяет меру инертности тела при вращательном движении, т.е. играет такую же роль, как масса тела при поступательном движении.

Из определения вытекает, что осевой момент инерции тела является величиной положительной. В инженерной практике часто пользуются понятием радиуса инерции тела.

Радиусом инерции тела относительно оси Oz называется линейная величина i_z , определяемая равенством

$$J_z = Mi_z^2. \quad (3.9)$$

Из формулы (3.9) следует, что радиус инерции равен расстоянию от оси до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы момент инерции этой точки относительно оси равнялся моменту инерции всего тела.

Моменты инерции относительно координатных осей Ox, Oy, Oz можно выразить через координаты точек тела (рис. 3.2):

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \sum m_k (y_k^2 + z_k^2); \\ J_y &= \sum m_k (z_k^2 + x_k^2); \\ J_z &= \sum m_k (x_k^2 + y_k^2). \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

Момент инерции относительно полюса O определяется как сумма произведений масс всех точек тела на квадрат их расстояний от точки O , т.е.

$$J_0 = \sum m_k r_k^2 = \sum m_k (x_k^2 + y_k^2 + z_k^2). \quad (3.11)$$

Между моментами инерции тела относительно координатных осей $Oxyz$ и началом координат (полюсом O) существует зависимость

$$2J_0 = J_x + J_y + J_z. \quad (3.12)$$

Для сплошных тел суммы в правых частях равенств (3.10) и (3.11) переходят в интегралы по всему объему тела, т.е.

$$\left. \begin{aligned} J_x &= \int_{(v)} (y^2 + z^2) dm, \\ J_y &= \int_{(v)} (x^2 + z^2) dm, \\ J_z &= \int_{(v)} (x^2 + y^2) dm; \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

$$J_0 = \int_{(v)} (x^2 + y^2 + z^2) dm. \quad (3.13')$$

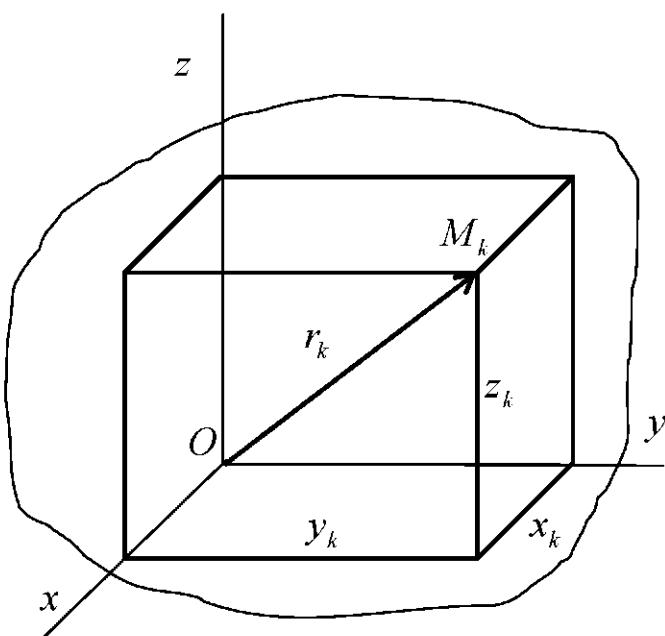


Рис. 3.2

Момент инерции зависит лишь от формы тела и распределения масс в нем, но не зависит от движения тела.

3.2. Теорема о моментах инерции тела относительно параллельных осей (теорема Гюйгенса). Эта теорема устанавливает связь между моментами инерции тела относительно параллельных осей, одна из которых проходит через центр масс: *момент инерции тела относительно некоторой оси равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс тела, сложенному с произведением массы тела на квадрат расстояния между осями.*

Для доказательства этой теоремы проведем через центр масс C тела координатные оси x, y, z , а через точку O , лежащей на оси Cz , проведем ось Oz_1 , параллельную оси Cz (рис. 3.3).

Тогда, согласно (3.8), имеем

$$J_{Oz_1} = \sum m_k h_{1k}^2. \quad (3.14)$$

Как видно из рис. 3.3,

$$h_{1k}^2 = h_k^2 + d^2 - 2dh_k \cos \alpha_k,$$

где d – расстояние между осями

или

$$h_{1k}^2 = h_k^2 + d^2 - 2y_kd, \text{ т.к. } h_k \cos \alpha_k = y_k.$$

Тогда $J_{z_1} = \sum m_k(h_k^2 + d^2 - 2y_kd) = \sum m_k h_k^2 + d^2 \sum m_k - 2d \sum m_k y_k.$

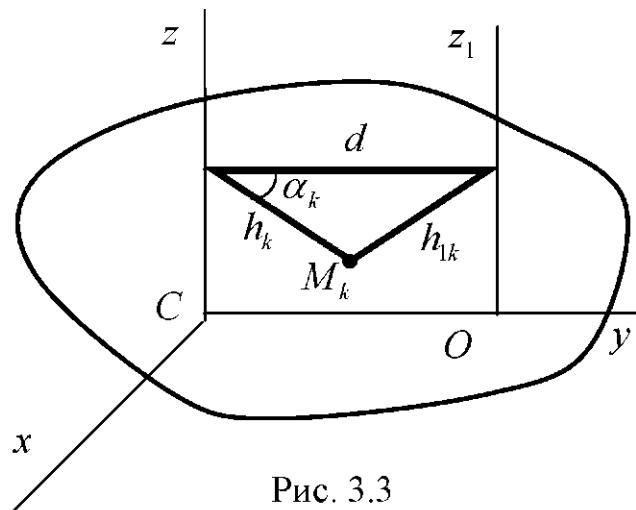


Рис. 3.3

$$\text{Но } \sum m_k h_k^2 = J_{cz}, \quad \sum m_k = M,$$

$$\sum m_k y_k = My_c = 0, \quad \text{т.к. } y_c = 0,$$

следовательно,

$$J_{z_1} = J_{cz} + Md^2. \quad (3.15)$$

Таким образом, теорема доказана.

3.3. Центробежные моменты инерции. Главные оси инерции тела.

Осьевой момент инерции не всегда полностью характеризует распределение масс в системе. Так, например, момент инерции симметричной системы, состоящей из двух точечных масс, соединенных между собой невесомым стержнем, относительно оси вращения z (рис. 3.4), будет равен

$$J_z = 2ml^2.$$

Момент инерции асимметричной системы, состоящей из тех же точечных масс, что и в симметричном случае, и таком же отдалении от оси z (рис. 3.5), также будет равен

$$J_z = 2ml^2.$$

Между тем произошло перераспределение масс в системе и это, безусловно, скажется на динамике системы. Для учета асимметрии в распределении масс, введем понятия центробежных моментов инерций. Центробежными моментами инерции отно-

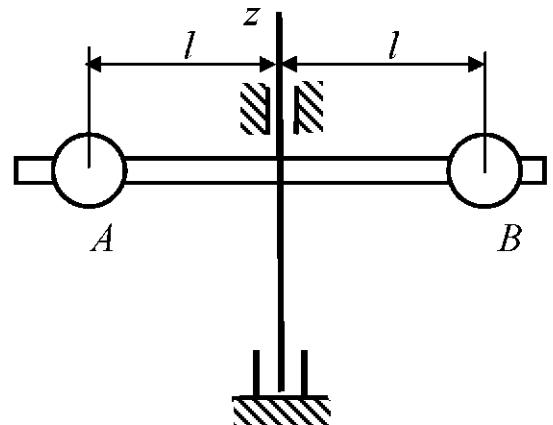


Рис. 3.4

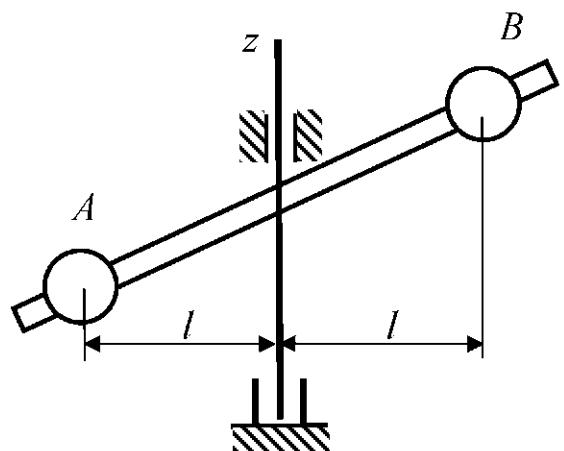


Рис. 3.5

сительно координатных осей $Oxyz$ будем называть величины J_{xy}, J_{yz}, J_{zx} , определяемые равенствами

$$J_{xy} = \sum m_k x_k y_k, \quad J_{yz} = \sum m_k y_k z_k, \quad J_{zx} = \sum m_k z_k x_k. \quad (3.16)$$

Из (3.16) очевидно, что $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{yz} = J_{zy}$, $J_{xz} = J_{zx}$.

Центробежные моменты инерции, в отличие от осевых, могут принимать не только положительные, но и отрицательные значения и даже обращаться в нули.

Пусть тело имеет ось симметрии. Если координатную ось Oz совместить с осью симметрии, то в силу симметрии каждой точке тела с массой m_k и координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать симметричная ей точка с такой же массой и с координатами $(-x_k, -y_k, z_k)$.

В результате будем иметь

$$\sum m_k x_k z_k = 0; \quad \sum m_k y_k z_k = 0,$$

следовательно,

$$J_{xz} = 0; \quad J_{yz} = 0. \quad (3.17)$$

Ось Oz , для которой центробежные моменты инерции J_{xz} и J_{yz} , содержащие в своих индексах наименование этой оси, равны нулю, называется главной осью инерции тела для точки O .

Таким образом, если тело имеет ось симметрии, то эта ось является главной осью инерции тела для любой ее точки.

Покажем, что главной осью инерции может быть не только ось симметрии. Пусть тело имеет плоскость симметрии. Если в какой-либо точке этой плоскости провести координатные оси $Oxyz$ так, чтобы ось Oz была перпендикулярна плоскости симметрии, то в силу симметрии каждой точке с массой m_k и координатами (x_k, y_k, z_k) будет соответствовать ей точка с такой же массой и координатами $(x_k, y_k, -z_k)$.

В результате будем иметь

$$\sum m_k x_k z_k = 0; \quad \sum m_k y_k z_k = 0,$$

или

$$J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0. \quad (3.18)$$

Следовательно, согласно (3.17), ось Oz в (3.18) также является главной осью инерции для точки O .

Таким образом, если тело имеет плоскость симметрии, то любая ось, перпендикулярная этой плоскости, является главной осью инерции тела для точки O , в которой ось пересекает плоскость.

Моменты инерции тела относительно главных осей инерции называются главными моментами инерции тела. Если главные оси инерции построены для центра масс, то они называются главными центральными осями инерции.

3.4. Момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через начало координат. Возьмем в теле точку O , которую примем за начало координатных осей $Oxyz$.

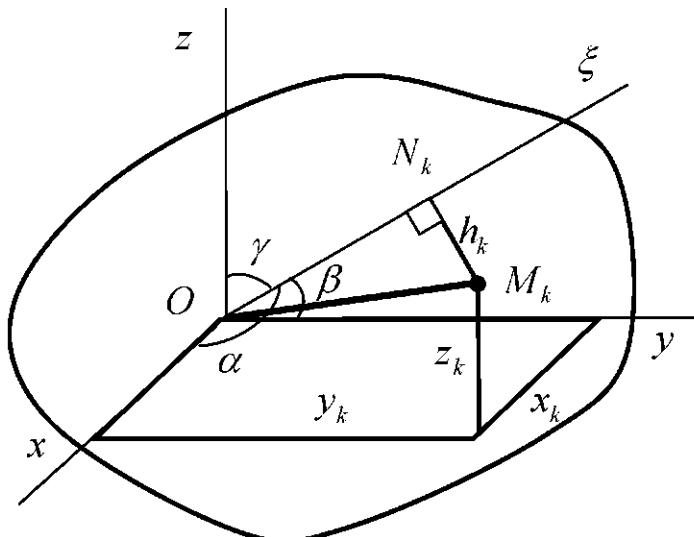


Рис. 3.6

Через точку O проведем ось ξ , составляющую с осями x, y, z углы α, β, γ соответственно (рис. 3.6). Определим момент инерции тела относительно этой оси. Согласно (3.8), момент инерции J_ξ , будет равен

$$J_\xi = \sum m_k h_k^2, \quad (3.19)$$

$$\text{но} \quad h_k^2 = OM_k^2 - ON_k^2,$$

$$\text{где} \quad OM_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2,$$

$$ON_k = x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma - \text{проекция отрезка } OM_k \text{ на ось } O\xi.$$

Следовательно,

$$h_k^2 = x_k^2 + y_k^2 + z_k^2 - (x_k \cos \alpha + y_k \cos \beta + z_k \cos \gamma)^2. \quad (3.20)$$

Умножив сумму $x_k^2 + y_k^2 + z_k^2$ в (3.20) на единицу в виде

$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$, после несложных преобразований, получим

$$h_k^2 = (y_k^2 + z_k^2) \cos^2 \alpha + (z_k^2 + x_k^2) \cos^2 \beta + (x_k^2 + y_k^2) \cos^2 \gamma - \\ - 2x_k y_k \cos \alpha \cos \beta - 2x_k z_k \cos \alpha \cos \gamma - 2y_k z_k \cos \beta \cos \gamma.$$

Подставляя значение h_k^2 в (3.19), находим

$$J_\xi = \cos^2 \alpha \sum m_k (y_k^2 + z_k^2) + \cos^2 \beta \sum m_k (z_k^2 + x_k^2) + \cos^2 \gamma \sum m_k (x_k^2 + y_k^2) - \\ - 2 \cos \alpha \cos \beta \sum m_k x_k y_k - 2 \cos \alpha \cos \gamma \sum m_k x_k z_k - 2 \cos \beta \cos \gamma \sum m_k y_k z_k.$$

Имея в виду (3.10) и (3.16), последнее равенство перепишем в виде:

$$J_{\xi} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \alpha \cos \gamma. \quad (3.21)$$

По формуле (3.21) можно определить момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через начало координат, если известны осевые и центробежные моменты инерции относительно координатных осей.

Как следует из (3.21), для определения момента инерции J_{ξ} , кроме углов α, β, γ , необходимо знать для точки O шесть моментов инерции:

$J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{yz}, J_{zx}$. Расположим их как элементы матрицы:

$$J = \begin{pmatrix} J_x & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{yx} & J_y & -J_{yz} \\ -J_{zx} & -J_{zy} & J_z \end{pmatrix}. \quad (3.22)$$

Матрица (3.22) называется тензором инерции в точке O . В тензоре инерции центробежные моменты инерции берутся со знаком минус. Элементы этой матрицы называются компонентами тензора инерции.

3.5. Эллипсоид инерции. Формула (3.21) позволяет определить момент инерции тела относительно любой оси ξ в зависимости от направляющих косинусов этой оси и центробежных моментов инерции.

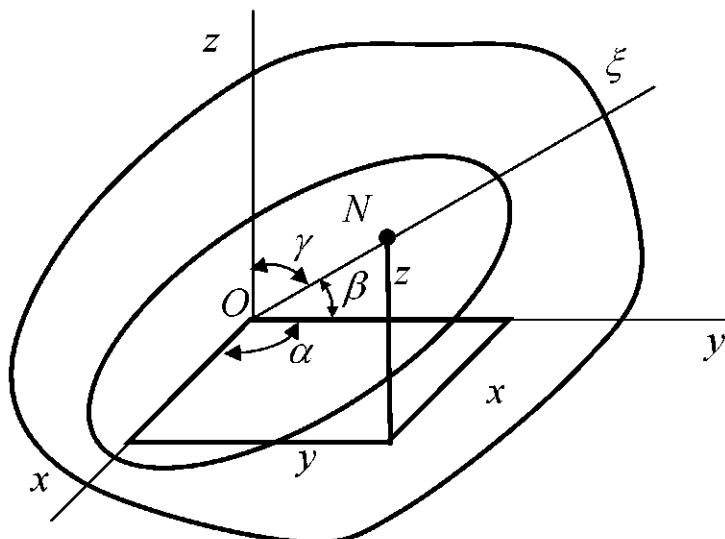


Рис. 3.7

Таким образом, зная компоненты тензора инерции в точке O и направляющие косинусы оси ξ , можно определить момент инерции относительно любой оси, проходящей через начало координат. Можно дать и геометрическую картину распределения моментов инерции относительно пучка осей, проходящих через точку O , путем построения эллипсоида инерции.

Для построения эллипсоида инерции на каждой оси $O\xi$, проходящей через точку O , отложим отрезок ON , длина которого

$$ON = \frac{1}{\sqrt{J_\xi}}. \quad (3.23)$$

Выразим направляющие косинусы оси ξ через координаты x, y, z точки N и длину отрезка ON :

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{x}{ON} = x \sqrt{J_\xi}; \\ \cos \beta &= \frac{y}{ON} = y \sqrt{J_\xi}; \\ \cos \gamma &= \frac{z}{ON} = z \sqrt{J_\xi}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Подставляя эти значения в (3.21) и деля обе части равенства на J_ξ , получим

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 - 2J_{xy}xy - 2J_{yz}yz - 2J_{zx}xz = 1. \quad (3.25)$$

Уравнение (3.25) определяет поверхность, по которой перемещается точка N , при изменении углов α, β и γ . Эта поверхность называется эллипсоидом инерции. Центр эллипса инерции находится в начале координат. Три оси симметрии эллипса инерции называются главными осями инерции тела в точке O . Если координатные оси $Oxyz$ совместить с осями симметрии эллипса инерции, то в уравнении (3.25) исчезают члены, содержащие центробежные моменты инерции и оно принимает вид:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 = 1. \quad (3.26)$$

Для каждой точки O имеется свой эллипс инерции, который характеризует момент инерции тела относительно любой оси, проходящей через данную точку. Так, например, если построен эллипс инерции для точки O , то момент инерции относительно некоторой оси $O\xi$ можно определить по расстоянию ON от начала координат до точки N , в которой эта ось пересекает эллипс инерции (рис. 3.7)

$$J_\xi = \frac{1}{ON^2}. \quad (3.27)$$

3.6. Момент инерции тела относительно произвольной оси.

Рассмотрим общий случай, когда требуется определить момент инерции тела относительно оси ξ_1 , не проходящей через начало координат.

Начало координат совместим с центром масс тела (рис. 3.8). Для определения момента инерции тела относительно произвольной оси ξ_1 сначала определим его момент инерции относительно оси $C\xi$, параллельной оси ξ_1 , по формуле (3.21). Затем, используя теорему о моментах инерции относительно параллельных осей (3.15), находим

$$J_{\xi_1} = J_{C\xi} + Md^2. \quad (3.28)$$

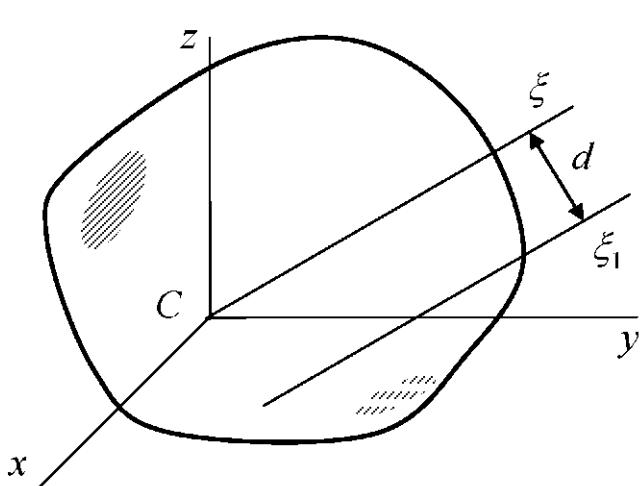


Рис. 3.8

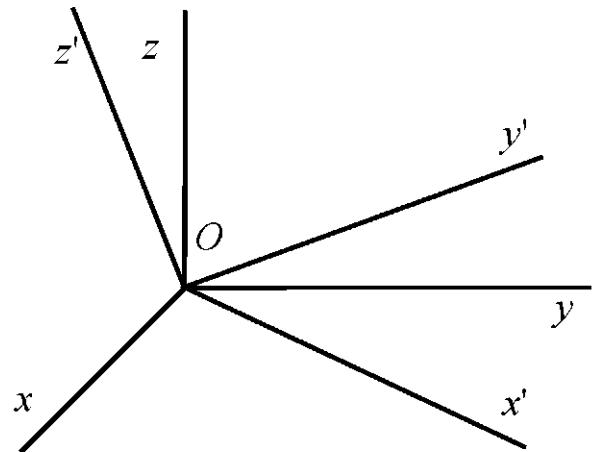


Рис. 3.9

3.7. Вычисление тензора инерции.

Пусть требуется определить тензор инерции J тела для системы координат $Oxyz$. Предположим, что нам известны направления главных осей инерции x', y', z' и соответствующие главные моменты инерции $J_{x'}, J_{y'}, J_{z'}$ (рис. 3.9), и пусть направления главных осей инерции $Ox'y'z'$ определяются таблицей углов:

| | x' | y' | z' |
|-----|------------|-----------|------------|
| x | α_1 | β_1 | γ_1 |
| y | α_2 | β_2 | γ_2 |
| z | α_3 | β_3 | γ_3 |

Моменты инерции J_x, J_y, J_z относительно осей x, y и z можно определить по формуле (3.21). Принимая последовательно за ось $O\xi$ оси координат x, y, z , получим

$$\left. \begin{aligned} J_x &= J_{x'} \cos^2 \alpha_1 + J_{y'} \cos^2 \beta_1 + J_{z'} \cos^2 \gamma_1, \\ J_y &= J_{x'} \cos^2 \alpha_2 + J_{y'} \cos^2 \beta_2 + J_{z'} \cos^2 \gamma_2, \\ J_z &= J_{x'} \cos^2 \alpha_3 + J_{y'} \cos^2 \beta_3 + J_{z'} \cos^2 \gamma_3. \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

Теперь перейдем к определению центробежных моментов инерции тела относительно осей x, y, z . Центробежные моменты инерции сплошных тел определяются равенствами:

$$J_{xy} = \int xy dm; \quad J_{yz} = \int yz dm; \quad J_{zx} = \int xz dm, \quad (3.30)$$

где x, y, z – координаты произвольной точки тела. Эти координаты связаны с координатами x', y', z' следующими зависимостями:

$$\left. \begin{array}{l} x = x' \cos \alpha_1 + y' \cos \beta_1 + z' \cos \gamma_1; \\ y = x' \cos \alpha_2 + y' \cos \beta_2 + z' \cos \gamma_2; \\ z = x' \cos \alpha_3 + y' \cos \beta_3 + z' \cos \gamma_3. \end{array} \right\} \quad (3.31)$$

Так как оси x', y', z' являются главными осями инерции, то все центробежные моменты инерции относительно этих осей равны нулю:

$$J_{x'y'} = 0; \quad J_{y'z'} = 0; \quad J_{z'x'} = 0. \quad (3.32)$$

Имея в виду (3.31) и (3.32), центробежные моменты инерции (3.30) будут равны

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int x'^2 dm + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \int y'^2 dm + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \int z'^2 dm; \\ J_{yz} &= \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \int x'^2 dm + \cos \beta_2 \cos \beta_3 \int y'^2 dm + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 \int z'^2 dm; \\ J_{zx} &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \int x'^2 dm + \cos \beta_1 \cos \beta_3 \int y'^2 dm + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 \int z'^2 dm. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Из условий ортогональности координатных осей $Oxyz$ имеем

$$\begin{aligned} \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 &= 0; \\ \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3 + \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 &= 0; \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\left. \begin{array}{l} \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = -(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2), \\ \cos \gamma_2 \cos \gamma_3 = -(\cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + \cos \beta_2 \cos \beta_3), \\ \cos \gamma_1 \cos \gamma_3 = -(\cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + \cos \beta_1 \cos \beta_3). \end{array} \right\} \quad (3.34),$$

Используя соотношения (3.34), выражения (3.33) после несложных преобразований перепишем в виде:

$$\begin{aligned} J_{xy} &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \int [(x'^2 + y'^2) - (y'^2 + z'^2)] dm + \cos \beta_1 \cos \beta_2 \int [(y'^2 + x'^2) - (x'^2 + z'^2)] dm; \\ J_{yz} &= \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 \int [(x'^2 + y'^2) - (y'^2 + z'^2)] dm + \cos \beta_2 \cos \beta_3 \int [(x'^2 + y'^2) - (z'^2 + x'^2)] dm; \\ J_{zx} &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 \int [(x'^2 + y'^2) - (z'^2 + y'^2)] dm + \cos \beta_1 \cos \beta_3 \int [(x'^2 + y'^2) - (z'^2 + x'^2)] dm, \end{aligned}$$

или

$$\left. \begin{aligned} J_{xy} &= (J_{z'} - J_{x'}) \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + (J_{z'} - J_{y'}) \cos \beta_1 \cos \beta_2; \\ J_{yz} &= (J_{z'} - J_{x'}) \cos \alpha_2 \cos \alpha_3 + (J_{z'} - J_{y'}) \cos \beta_2 \cos \beta_3; \\ J_{zx} &= (J_{z'} - J_{x'}) \cos \alpha_1 \cos \alpha_3 + (J_{z'} - J_{y'}) \cos \beta_1 \cos \beta_3, \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

где

$$\int (x'^2 + y'^2) dm = J_{z'}, \quad \int (y'^2 + z'^2) dm = J_{x'}, \quad \int (x'^2 + z'^2) dm = J_{y'}.$$

Формулы (3.29) и (3.35) позволяют определить все компоненты тензора инерции в системе координат $Oxyz$, если известны главные моменты инерции и углы этих осей с главными осями инерции.

3.8. Примеры определения моментов инерции тел.

Пример 1. Определить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой M относительно оси, проходящей через его центр масс и перпендикулярной оси стержня (рис. 3.10).

Решение. Направим ось x по оси стержня, а ось y - перпендикулярно оси x (рис. 3.10). Вычислим момент инерции стержня относительно оси Cy . Согласно формуле (3.13), имеем:

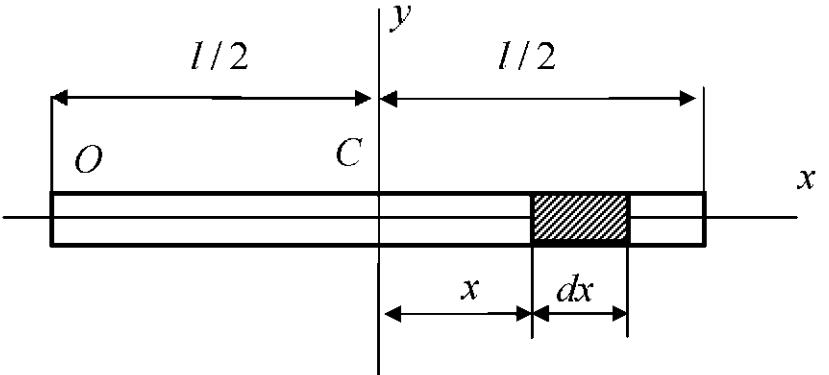


Рис. 3.10

$$J_y = \int (x^2 + z^2) dm = \int x^2 dm = \rho \int_{-l/2}^{l/2} x^2 dx = \rho \frac{l^3}{12},$$

так как $z = 0$ (стержень тонкий), $dm = \rho dx$, где ρ – масса единицы длины

стержня. Заменив ρ его значением $\rho = \frac{M}{l}$, найдем окончательно

$$J_y = \frac{Ml^2}{12}. \quad (3.36)$$

Момент инерции стержня относительно оси Oy_1 , параллельной оси Cy и проходящей через конец стержня (рис. 3.10), определим по теореме Гюйгенса (3.15)

$$J_{y_1} = J_{cy} + M \left(\frac{l}{2} \right)^2 = \frac{Ml^2}{12} + \frac{Ml^2}{4} = \frac{Ml^2}{3}. \quad (3.37)$$

Пример 2. Вычислить момент инерции тонкой прямоугольной пластины со сторонами a и b и массой M относительно координатных осей x, y, z (рис. 3.11).

Решение. Для определения момента инерции относительно оси Cx разобьем пластину на элементарные полоски шириной dy и массой $dm = \rho ady$.

Согласно (3.13), имеем

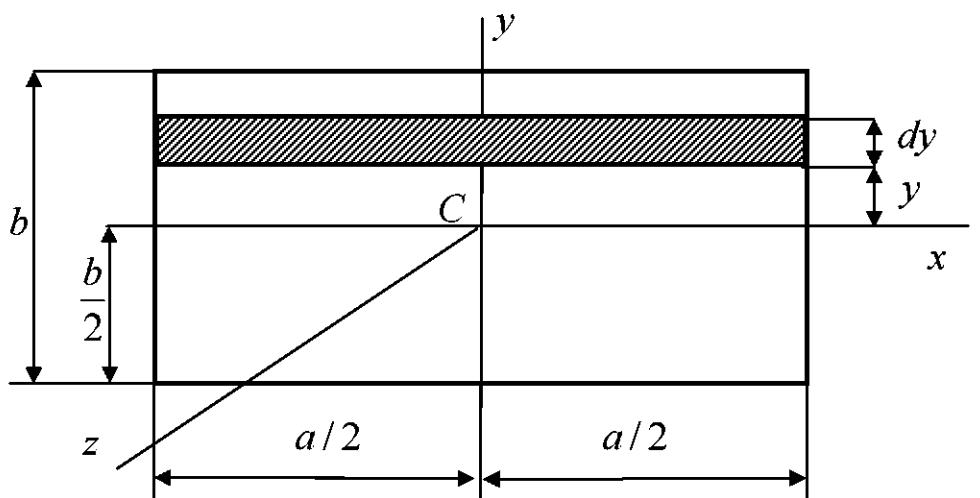


Рис. 3.11

$$J_{Cx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm = \int y^2 dm = \rho a \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy = \rho a \frac{y^3}{3} \Big|_{-b/2}^{b/2} = \frac{\rho ab^3}{12}.$$

Имея в виду, что $\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{ab}$, окончательно находим

$$J_{Cx} = \frac{Mb^2}{12}. \quad (3.38)$$

По аналогии момент инерции относительно оси Cy будет равен

$$J_{Cy} = \frac{Ma^2}{12}. \quad (3.39)$$

Момент инерции относительно оси Cz , согласно (3.13), будет равен

$$\begin{aligned} J_{Cz} &= \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = \rho \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} (x^2 + y^2) dx dy = \\ &= \rho \left[\int_{-a/2}^{a/2} x^2 dx \int_{-b/2}^{b/2} dy + \int_{-a/2}^{a/2} dx \int_{-b/2}^{b/2} y^2 dy \right] = \rho \frac{ab}{12} (a^2 + b^2). \end{aligned}$$

Имея в виду, что $\rho = \frac{M}{ab}$, окончательно находим

$$J_{Cz} = \frac{M}{12} (a^2 + b^2). \quad (3.40)$$

Пример 3. Вычислить момент инерции однородной тонкой круглой пластинки радиуса R и массы M относительно координатных осей x, y, z (рис. 3.12).

Решение. Вначале определим момент инерции относительно оси Oz перпендикулярной плоскости пластины. Для этого выделим на пластине элементарное кольцо радиуса r и толщиной dr . Согласно (3.13), имеем

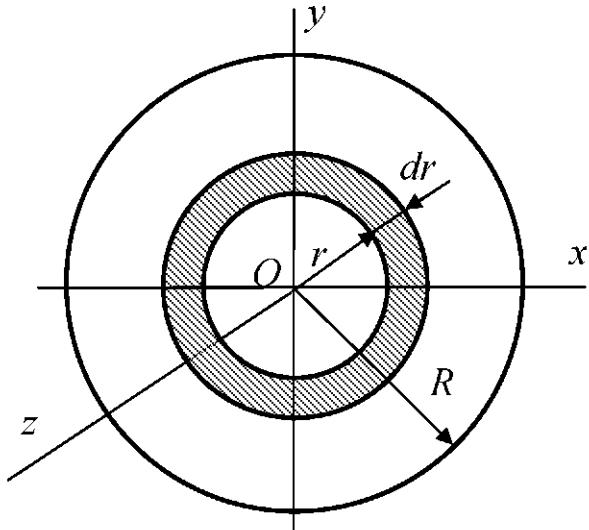


Рис. 3.12

$$J_z = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm = \int_0^R r^2 dm = \rho 2\pi \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \pi\rho \frac{R^4}{2}.$$

Здесь $dm = \rho ds = \rho 2\pi r dr$.

Имея в виду, что $\rho = \frac{M}{S} = \frac{M}{\pi R^2}$, находим

$$J_z = \frac{MR^2}{2}. \quad (3.41)$$

Для тонкой пластины момент инерции J_z совпадает с полярным моментом инерции J_0 . Следовательно,

$$J_0 = J_z = \frac{MR^2}{2}. \quad (3.42)$$

Для определения моментов инерции относительно координатных осей Ox и Oy воспользуемся формулой (3.12). Также будем иметь в виду, что в силу симметрии $J_x = J_y$. Следовательно,

$$J_0 = 2J_x,$$

$$\text{откуда } J_x = J_y = \frac{J_0}{2} = \frac{MR^2}{4}. \quad (3.43)$$

Пример 4. Определить момент инерции однородного цилиндра радиуса R , высоты H и массы M относительно координатных осей x, y, z (рис. 3.13).

Решение. Разобьём цилиндр на концентрические слои. Пусть радиус какого-то слоя равен r , толщина dr (рис. 3.13). Тогда масса этого слоя будет равна

$dm = 2\pi\rho H r dr$. Момент инерции относительно оси Cz , согласно (3.13), будет равен

$$J_{Cz} = \int (x^2 + y^2) dm = \int_0^R r^2 dm = 2\pi\rho H \int_0^R r^3 dr = 2\pi\rho H \frac{r^4}{4} \Big|_0^R = \frac{\pi\rho H R^4}{2}.$$

Имея в виду, что $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\pi R^2 H}$, окончательно находим

$$J_{Cz} = \frac{MR^2}{2}. \quad (3.44)$$

Для определения моментов инерции относительно осей Cx и Cy разобьём цилиндр на тонкие диски массой dm и толщиной dz (рис. 3.13). Момент инерции такого тонкого диска относительно оси Ox' , согласно (3.43), будет равен

$$dJ_{x'} = \frac{dmR^2}{4},$$

$$dm = \rho\pi R^2 dz,$$

а его момент инерции относительно оси Cx , параллельной оси Ox' , по теореме Гюйгенса, равен

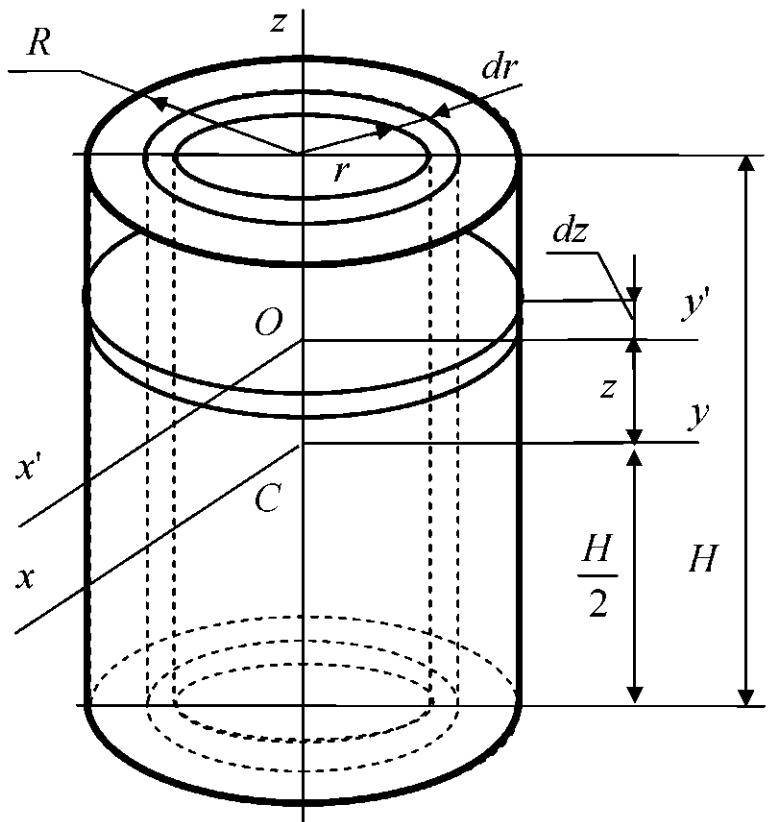


Рис. 3.13

$$dJ_{Cx} = \frac{dmR^2}{4} + dmz^2. \quad (3.45)$$

Момент инерции всего цилиндра относительно оси Cx будет равен интегралу от (3.45), т.е.

$$J_{Cx} = \int_M \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) dm = \rho\pi R^2 \int_{-H/2}^{H/2} \left(\frac{R^2}{4} + z^2 \right) dz = \rho\pi R^2 \left(\frac{R^2 H}{4} + \frac{H^3}{12} \right).$$

Имея в виду, что $\rho = \frac{M}{\pi R^2 H}$, окончательно находим

$$J_{Cx} = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right). \quad (3.46)$$

В силу симметрии $J_{Cx} = J_{Cy}$. Следовательно,

$$J_{Cy} = M \left(\frac{R^2}{4} + \frac{H^2}{12} \right). \quad (3.47)$$

Пример 5. Определить момент инерции однородного конуса высоты H , радиуса основания R и массы M относительно геометрической оси (рис. 3.14).

Решение. Круговой конус представляет собой тело вращения. Телом вращения называется тело, поверхность которого образована вращением некоторой плоской кривой вокруг оси; эта кривая называется образующей. В нашем случае в роли образующей выступает прямолинейный отрезок OA , лежащий в одной плоскости с осью Oz .

Разобьем тело на тонкие диски

массой dm и толщиной dz (рис. 3.14). Тогда момент инерции такого диска относительно оси Oz будет равен

$$dJ_z = \frac{1}{2} dm r^2, \text{ но } dm = \rho \pi r^2 dz, \text{ а } \frac{r}{R} = \frac{z}{H},$$

следовательно, $dJ_z = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{R^4}{H^4} z^4 dz.$

Момент инерции всего конуса относительно оси Oz будет равен

$$J_z = \int_V dJ_z = \frac{1}{2} \rho \pi \frac{R^4}{H^4} \int_0^H z^4 dz = \frac{\rho \pi R^4}{2 H^4} \frac{H^5}{5} = \frac{\rho \pi R^4 H}{10}.$$

Имея в виду, что $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{1}{3} \pi R^2 H} = \frac{3M}{\pi R^2 H}$,

окончательно находим

$$J_z = \frac{3}{10} M R^2. \quad (3.48)$$

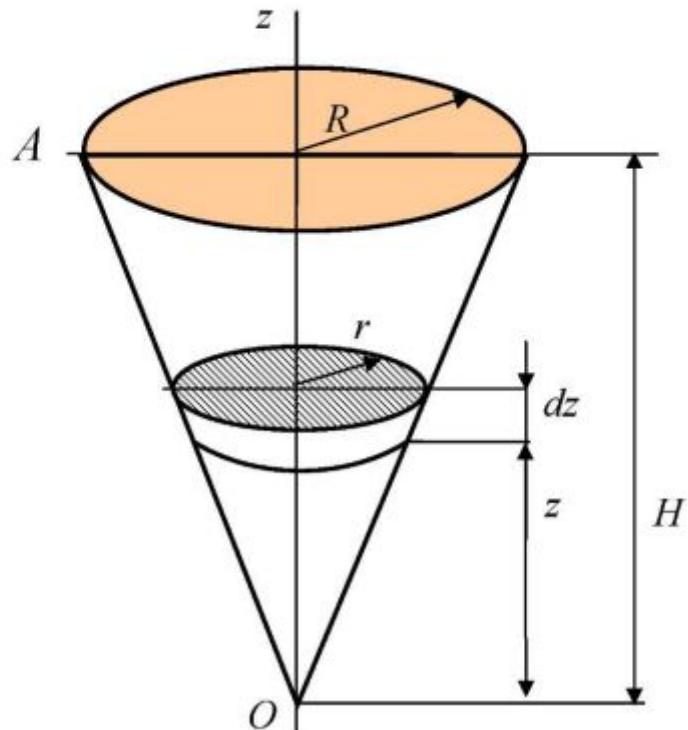


Рис.3. 14

Пример 6. Определить момент инерции однородного шара радиуса R и массы M .

Решение. Разобьем шар на тонкие диски, параллельных плоскости Cxy , массой dm и толщиной dz (рис. 3.15). Момент инерции элементарного тонкого диска относительно оси Cz будет равен

$$dJ_z = \frac{dmr^2}{2},$$

но $dm = \rho\pi r^2 dz$, а $r^2 = R^2 - z^2$.

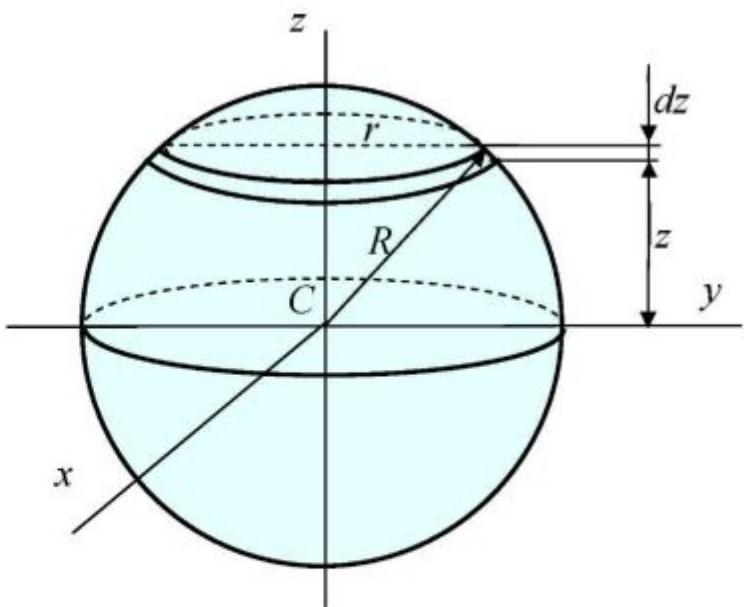


Рис. 3.15

Следовательно,

$$dJ_z = \frac{1}{2} \rho\pi(R^2 - z^2)^2 dz.$$

Тогда момент инерции всего шара будет равен

$$J_{Cz} = \int_M dJ_z = \frac{1}{2} \rho\pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2} \rho\pi \int_{-R}^R (R^4 - 2R^2z^2 + z^4) dz = \frac{16}{30} \rho\pi R^5.$$

Имея в виду, что $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3M}{4\pi R^3}$,

окончательно находим

$$J_{Cz} = \frac{4}{10} MR^2 \quad (3.49)$$

В силу симметрии $J_{Cx} = J_{Cy} = J_{Cz}$, следовательно,

$$J_{Cx} = J_{Cy} = 0,4 MR^2. \quad (3.50)$$

Пример 7. Вычислить момент инерции тонкого однородного стержня длиной l и массой M относительно оси η , наклоненной к оси стержня (рис. 3.16) под углом α .

Решение. Обозначим через x расстояние от центра масс стержня до элементарного участка dx (рис. 3.16). Масса элементарного участка равна $dm = \rho dx$.

Момент инерции его равен $dI_\eta = dm h^2 = \rho dx x^2 \sin^2 \alpha$, а момент инерции всего стержня

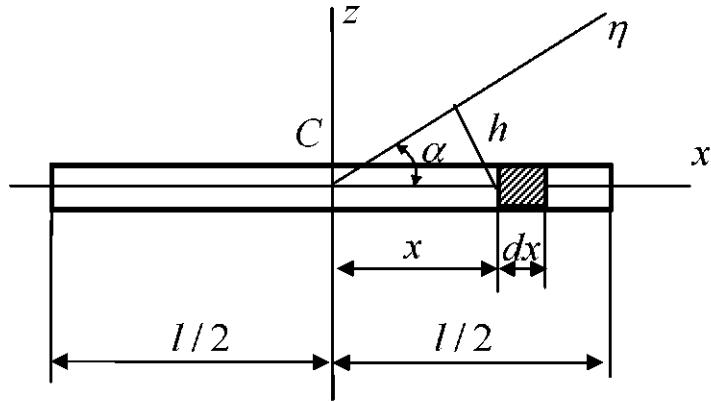


Рис. 3.16

$$I_\eta = 2 \int_0^{l/2} dm h^2 = 2\rho \sin^2 \alpha \int_0^{l/2} x^2 dx = 2\rho \sin^2 \alpha \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \rho \sin^2 \alpha \frac{l^3}{12}.$$

Имея в виду, что $\rho = \frac{M}{l}$, окончательно находим

$$I_\eta = \frac{1}{12} M l^2 \sin^2 \alpha. \quad (3.51)$$

Пример 8. Однородный круглый диск массы M насажен на ось z , проходящую через его центр масс C . Ось симметрии диска z_1 лежит в вертикальной плоскости xz и образует с осью z угол α . Радиус диска равен r . Вычислить центробежные моменты инерции диска J_{xz}, J_{yz}, J_{xy} (рис. 3.17).

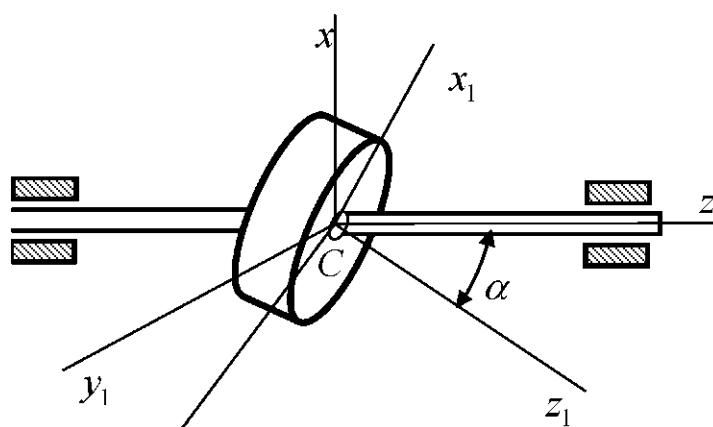


Рис. 3.17

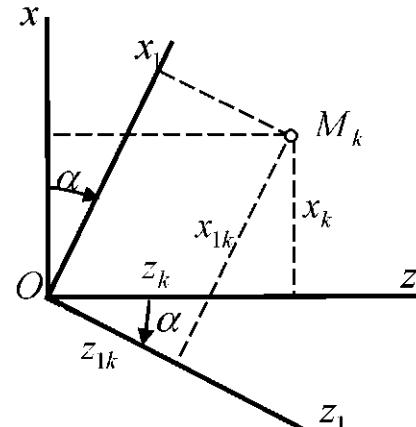


Рис. 3.18

Решение. Так как ось Cy (на чертеже след её совпадает с точкой C) является для диска осью симметрии, т.е. является главной осью инерции диска, то $J_{xy} = J_{yz} = 0$.

Для вычисления J_{xz} воспользуемся формулой

$$J_{zx} = \sum m_k z_k x_k.$$

Выразим координаты z_k и x_k , используя формулу поворота осей координат (рис. 3.18)

$$z_k = x_{1k} \sin \alpha + z_{1k} \cos \alpha,$$

$$x_k = x_{1k} \cos \alpha - z_{1k} \sin \alpha.$$

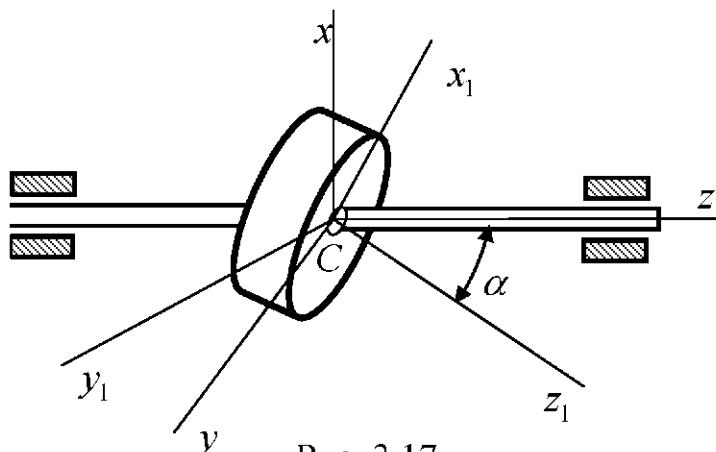


Рис. 3.17

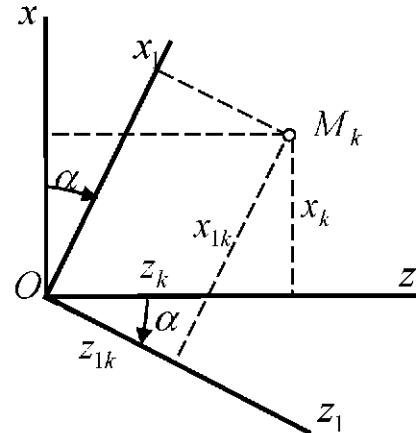


Рис. 3.18

Подставим эти значения в формулу J_{zx} и сделаем некоторые математические преобразования

$$\begin{aligned} J_{zx} &= \sum m_k (x_{1k} \sin \alpha + z_{1k} \cos \alpha)(x_{1k} \cos \alpha - z_{1k} \sin \alpha) = \\ &= \sum m_k x_{1k}^2 \sin \alpha \cos \alpha + \sum m_k z_{1k} x_{1k} \cos^2 \alpha - \sum m_k z_{1k} x_{1k} \sin^2 \alpha - \\ &- \sum m_k z_{1k}^2 \sin \alpha \cos \alpha = J_{z_1} \sin \alpha \cos \alpha + J_{z_1 x_1} \cos^2 \alpha - J_{z_1 x_1} \sin^2 \alpha \\ &- J_{x_1} \sin \alpha \cos \alpha = (J_{z_1} - J_{x_1}) \sin \alpha \cos \alpha, \end{aligned}$$

т.к. $J_{z_1 x_1} = 0$, потому что оси x_1 и z_1 являются осями симметрии, а следовательно, главными осями инерции диска. Учитывая, что

$$J_{z_1} = \frac{Mr^2}{2} \text{ и } J_{x_1} = \frac{Mr^2}{4},$$

окончательно получим

$$J_{zx} = \frac{Mr^2}{8} \sin 2\alpha. \quad (3.52)$$

ГЛАВА IV. ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ДИНАМИКИ СИСТЕМЫ

1. Дифференциальные уравнения движения системы

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Выделим какую-нибудь точку системы M_k с массой m_k . Обозначим равнодействующую всех приложенных к точке внешних сил (и активных, и реакций связей) через \bar{F}_k^e , а равнодействующую всех внутренних сил через \bar{F}_k^i . Если ускорение точки $\bar{a}_k = d^2 \bar{r}_k / dt^2$, то по основному закону динамики

$$m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i.$$

Такое уравнение можно записать для любой точки системы. Следовательно, для всей системы будет:

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 \bar{r}_1}{dt^2} &= \bar{F}_1^e + \bar{F}_1^i, \\ m_2 \frac{d^2 \bar{r}_2}{dt^2} &= \bar{F}_2^e + \bar{F}_2^i, \\ \dots & \\ m_n \frac{d^2 \bar{r}_n}{dt^2} &= \bar{F}_n^e + \bar{F}_n^i. \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Уравнения (4.1) называются дифференциальными уравнениями движения системы в векторной форме. Если спроектировать их на какие-нибудь координатные оси, то получим систему $3n$ дифференциальных уравнений, описывающих движения точек механической системы.

Для нахождения законов движения точек по заданным силам и начальным условиям нужно проинтегрировать систему $3n$ дифференциальных уравнений.

Задача об интегрировании дифференциальных уравнений движения, представляющая даже в случае одной точки системы некоторые трудности,

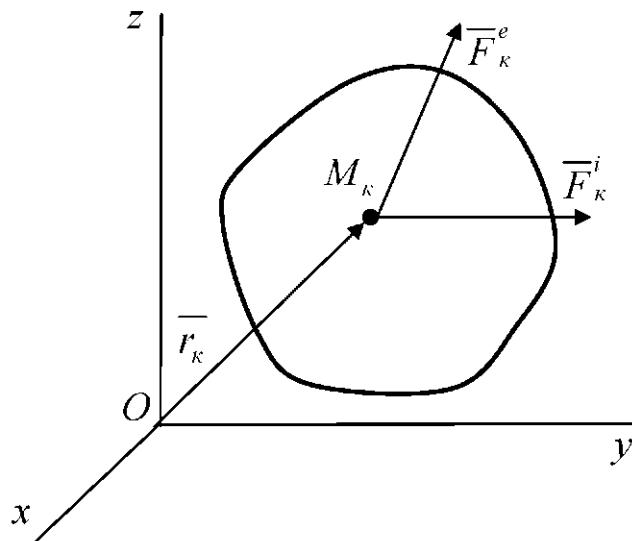


Рис. 4.1

становится подчас непосильной, когда приходится иметь дело с движением системы материальных точек.

Однако в некоторых случаях оказывается достаточным определить изменение некоторых суммарных мер движения системы в целом в зависимости от суммарных мер действия сил, а не движением каждой из ее точек в отдельности.

Такого рода соотношения между изменениями во времени суммарных мер движения системы и суммарными мерами действия приложенных к точкам совокупности сил выражают общие теоремы динамики системы материальных точек.

Роль уравнений (4.1) состоит в том, что они являются исходными для получения общих теорем. Общие теоремы динамики системы могут быть выведены из дифференциальных уравнений движения как в дифференциальной, так и в конечной (интегральной) формах.

2. Теорема о движении центра масс

Иногда для определения характера движения системы достаточно знать закон движения ее центра масс. Чтобы найти этот закон сложим почленно левые и правые части уравнений (4.1)

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i. \quad (4.2)$$

Преобразуем левую часть этого равенства, используя формулу (3.4) для радиус-вектора центра масс

$$\sum m_k \bar{r}_k = M \bar{r}_c.$$

Беря от обеих частей этого равенства вторую производную по времени и замечая, что производная от суммы равна сумме производных, найдем:

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = M \frac{d^2 \bar{r}_c}{dt^2},$$

или

$$\sum m_k \frac{d^2 \bar{r}_k}{dt^2} = M \bar{a}_c, \quad (4.3)$$

где \bar{a}_c – ускорение центра масс системы. Учитывая свойства внутренних сил системы, что $\sum \bar{F}_k^i = 0$, и, подставляя все найденные значения в (4.2), получим окончательно

$$M \bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) и выражает теорему о движении центра масс системы: *произведение массы системы на ускорение ее центра масс равно геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил.*

Проектируя обе части равенства (4.4) на координатные оси, получим:

$$M \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum F_{kx}^e, \quad M \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum F_{ky}^e, \quad M \frac{d^2 z_c}{dt^2} = \sum F_{kz}^e. \quad (4.5)$$

Эти уравнения являются дифференциальными уравнениями движения центра масс в проекциях на оси декартовой системы координат.

3. Закон сохранения движения центра масс

Из теоремы о движении центра масс можно получить следующие важные следствия.

1) если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, т.е. $\sum \bar{F}_k^e = 0$, то из (4.4) следует, что ускорение центра масс $\ddot{a}_c = 0$, а следовательно, скорость центра масс $\dot{v}_c = const$, т.е. центр масс движется прямолинейно и равномерно или находится в покое.

2) если сумма проекций всех внешних сил, действующих на систему на какую-либо координатную ось, например на ось Ox , равна нулю, то из (4.5) следует, что $d^2 x_c / dt^2 = 0$, а, следовательно, проекция скорости центра масс системы на эту ось есть величина постоянная. В частности, если в начальный момент $v_{cx} = 0$, то и в любой последующий момент эта величина не изменяется, т.е. центр масс системы в этом случае вдоль оси Ox перемещаться не будет.

Все эти результаты выражают собою закон сохранения движения центра масс системы. Рассмотрим некоторые примеры, иллюстрирующие его приложения:

а). Движение по горизонтальной плоскости. При отсутствии трения человек с помощью своих мускульных усилий (силы внутренние) не мог бы двигаться вдоль горизонтальной плоскости, так как в этом случае сумма проекций на любую горизонтальную ось всех приложенных к человеку внешних сил будет равна нулю и центр масс человека вдоль плоскости перемещаться не будет ($x_c = const$).

Если, например, человек выносит правую ногу вперед, то левая нога одновременно будет скользить назад, а его центр масс не изменит горизонтальной координаты. Только благодаря силам трения подошв о пол возникает горизонтальная реакция, переносящая центр масс тела в горизонтальном направлении. Эти силы всегда направлены в сторону движения человека и являются по от-

ношению к нему внешними. Так как силы трения возникают при соответствующем напряжении мускулов человека, то создается впечатление того, что движущими силами являются напряжения мускулов, т.е. внутренние силы.

Внешними силами, вызывающими движение локомотива или автомобиля по горизонтальному пути, являются силы трения, приложенные к ведущим колесам в точках соприкосновения их с поверхностью по которой они двигаются.

Действительно, к ведущему колесу со стороны двигателя приложен врашающий момент M_{ep} , стремящийся вращать колесо вокруг его оси (рис. 4.2, а). Такому вращению препятствует действующая со стороны пути сила трения F_{mp} .

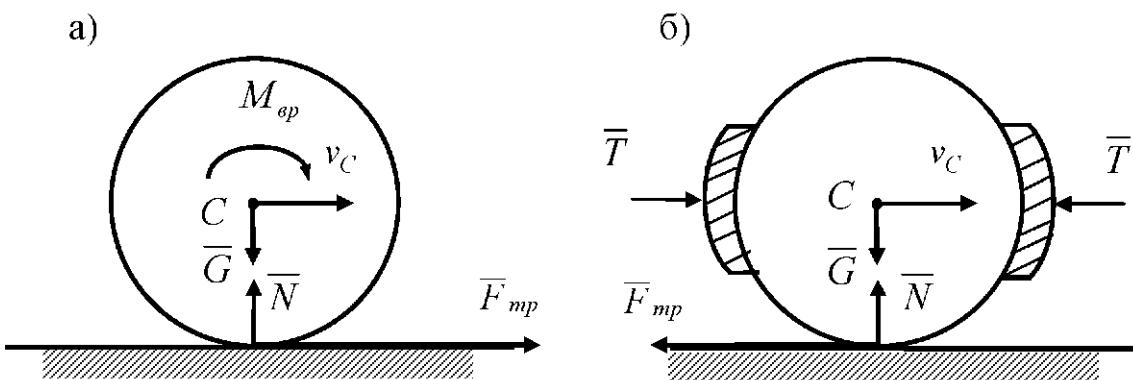


Рис. 4.2

Эта сила заставляет колесо катиться, а локомотив или автомобиль двигаться в ту сторону, куда она направлена. Вращающий момент, действующий на колесо со стороны двигателя, относится к внутренним силам и вызвать движение центра тяжести локомотива (автомобиля) не может. Этот момент только вызывает появление внешних сил трения.

Локомотив, поставленный на абсолютно гладкие рельсы, под действием вращающего момента не сдвинется с места, так как при отсутствии сцепления ведущие колеса будут только вращаться вокруг своих осей (буксовать).

Торможение поезда (автомобиля) тоже вызывается внешними силами, приложенными к колесам со стороны пути. Силы взаимодействия между колесами и тормозными колодками являются внутренними и не могут привести к торможению поезда (автомобиля), но эта сила вызывает увеличение модуля внешней силы F_{mp} (рис. 4.2, б), так как качение колес заменяется их скольжением. Эта внешняя сила и будет замедлять движение поезда или автомобиля, т.е. создавать торможение;

б). Действие пары сил на тело. Если на свободное твердое тело, находившемуся в равновесии, начинает действовать пара сил (\bar{F}, \bar{F}') , то геометрическая сумма этих внешних сил будет равна нулю $\bar{F} + \bar{F}' = 0$, и согласно первому следствию теоремы центр масс тела должен сохранить состояние покоя или равномерного прямолинейного движения. Таким образом, после приложения к свободному твердому телу пары сил, тело начинает вращаться вокруг своего центра масс;

в). Колебания поршней и других деталей двигателя внутреннего сгорания служат источниками периодически возмущающих сил, вызывающих вибрации фундамента двигателя. Упругие реакции грунта вместе с силами тяжести являются единственными внешними силами, приложенными к системе “машина-фундамент”. Если сосредоточить внимание на движении только фундамента со станиной и неподвижными частями машины, то их общий центр масс должен менять свое положение вследствие изменения положения общего центра масс движущихся элементов. Такого рода вибрации особенно велики в нестационарных двигателях, например у автомобиля.

В непоршневых двигателях, например в электромоторах, вибрации статора объясняются тем, что при недостаточной центровке ротора его центр тяжести не совпадает с осью вращения. Перемещения центра тяжести ротора вызывают вибрацию статора с фундаментом и переменность опорных реакций.

4. Примеры применения теоремы о движении центра масс механической системы

Пример 1. Однородный стержень AB длиной $2l$, опирающийся своим концом на гладкую горизонтальную плоскость, начинает падать, образуя в начальный момент с плоскостью угол α . Определить траекторию верхнего конца B стержня при падении.

Решение. Проведем оси координат в плоскости движения стержня, приняв за начало координат O начальное положение конца A стержня (рис.4.3, а).

Движение стержня совершается под действием двух внешних сил: веса \bar{G} и реакции гладкой поверхности \bar{N} . Так как обе силы вертикальны и в начальный момент стержень находился в покое, то, по второму следствию теоремы, горизонтальная координата центра масс стержня не изменится и во все время движения будет равна своему начальному значению:

$$x_C = x_{Co} = l \cos \alpha .$$

Учитывая, что центр тяжести стержня AB движется по вертикали, определим координаты x и y верхнего конца стержня в зависимости от угла φ , составленного стержнем с плоскостью в произвольный момент времени t

$$x = x_{C_0} + l \cos \varphi = l \cos \alpha + l \cos \varphi,$$

$$y = 2l \sin \varphi.$$

Исключив из этих уравнений параметр φ , найдем уравнение траектории точки B :

$$\cos \varphi = \frac{x - l \cos \alpha}{l}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{2l};$$

$$\frac{(x - l \cos \alpha)^2}{l^2} + \frac{y^2}{4l^2} = 1.$$

Полученное уравнение показывает, что конец B описывает эллипс. Центр эллипса находится в точке O_1 с координатами $l \cos \alpha$ и 0 , а длины полуосей равны l и $2l$.

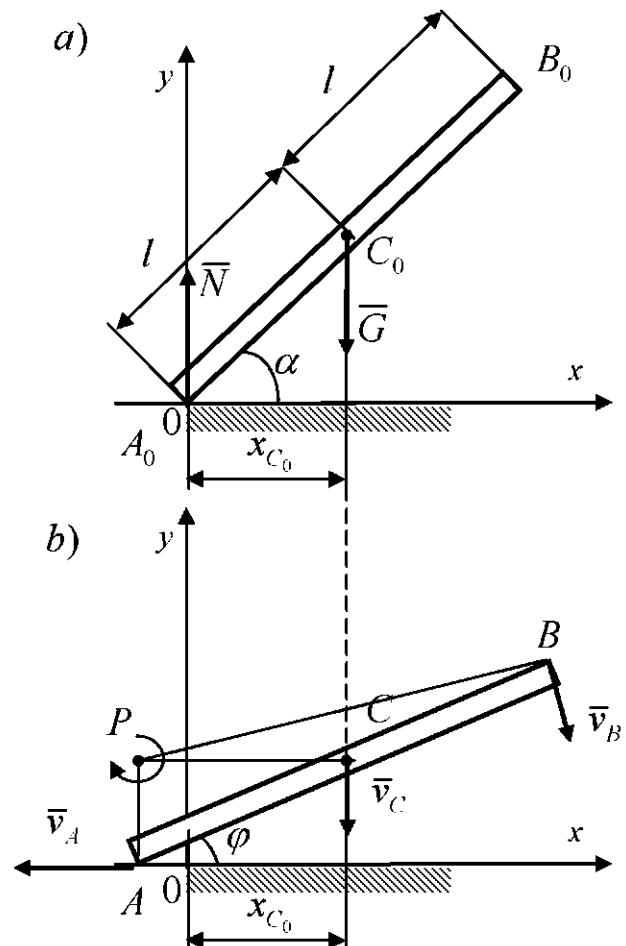


Рис. 4.3

Пример 2. Центр масс ротора электродвигателя смешен от оси вращения на величину AB . а. Масса ротора M_1 , а масса всех остальных частей мотора равна M_2 . Определить, по какому закону будет двигаться электродвигатель, поставленный на гладкую горизонтальную плоскость, когда вал вращается с постоянной угловой скоростью ω .

Решение. При незакрепленном моторе все действующие на него силы $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{N}_1, \bar{N}_2$ (рис. 4.4) будут вертикальными. Следовательно, будет иметь место закон сохранения движения центра масс системы вдоль оси Ox . Будем считать начальным то положение мотора, когда точки A и B лежат на одной вертикали (на оси Oy).

Тогда в произвольном положении координата x_c остается постоянной и равной нулю. Определим координату центра масс системы в любой момент времени t по формуле (4.5) и приравняем ее нулю, учитывая, что угол поворота $\varphi = \omega t$

$$x_c = \frac{-M_2 x + M_1(a \sin \omega t - x)}{M_1 + M_2} = 0,$$

откуда

$$x = \frac{M_1 a}{M_1 + M_2} \sin \omega t.$$

Следовательно, мотор будет совершать гармонические колебания с круговой частотой ω .

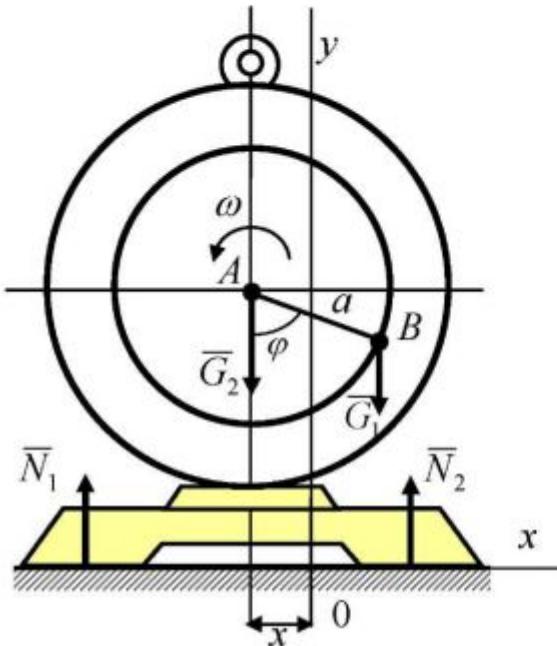


Рис. 4.4

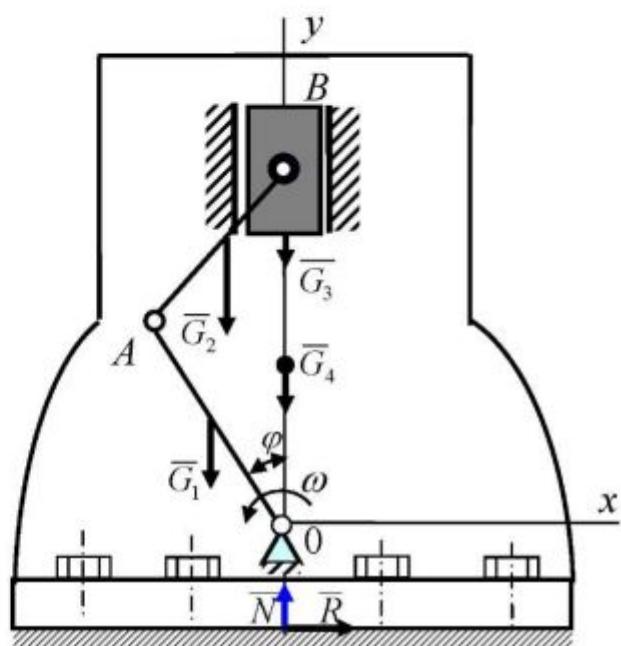


Рис. 4.5

Пример 3. Корпус кривошипно-ползунного механизма укреплен на гладком основании с помощью болтов (рис. 4.5). Кривошип OA вращается с постоянной угловой скоростью $\omega = 14 \text{ c}^{-1}$. Найти горизонтальное усилие, воспринимаемое болтами при работе механизма, если $OA = AB = l = 0,5 \text{ м}$, массы кривошипа OA и шатуна AB $M_1 = M_2 = 1 \text{ кг}$, масса ползуна $M_3 = 2 \text{ кг}$, масса корпуса $M_4 = 6 \text{ кг}$.

Решение. Выберем начало координат в точке O , направим ось x горизонтально, а ось y вертикально. Изобразим механизм в произвольном положении при $\varphi \neq 0$. Приложим внешние силы $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{G}_4, R, \bar{N}$ и составим уравнение теоремы о движении центра масс системы в проекции на ось x :

$$\overset{\bullet\bullet}{M} x_c = R,$$

где M – масса всего механизма, R – равнодействующая сил реакций болтов.

Запишем формулу для координаты центра масс системы в данном положении механизма

$$x_c = \frac{-(M_1 + M_2)}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \cdot \frac{l}{2} \sin \phi.$$

Учитывая, что $\phi = \omega t$, найдем x_c

$$\ddot{x}_c = \frac{M_1 + M_2}{M_1 + M_2 + M_3 + M_4} \frac{l\omega^2}{2} \sin \omega t.$$

Подставив это выражение в уравнение теоремы, получим

$$R = (M_1 + M) \frac{l\omega^2}{2} \sin \omega t = 98 \sin 14t.$$

Сила, воспринимаемая болтами, по величине равна реакции болтов. Максимальное ее значение достигается при $\sin 14t = 1$, т.е. при $\phi = \pi/2, 3\pi/2$ и равна 98 Н.

5. Дифференциальные уравнения поступательного движения тела

При поступательном движении твердого тела ускорения всех его точек в каждый момент времени одинаковы и, следовательно, равны ускорению центра масс тела. А так как ускорение центра масс \bar{a}_c определяется теоремой о движении центра масс системы, то эту теорему можно использовать для вывода уравнений поступательного движения. Из теоремы о движении центра масс получаем следующее дифференциальное уравнение поступательного движения твердого тела в векторной форме:

$$M\bar{a} = \sum \bar{F}_k^e,$$

где \bar{a} – ускорение любой точки тела, M – масса тела.

Спроектировав это равенство на оси координат, получим дифференциальные уравнения поступательного движения твердого тела в проекциях на прямоугольные оси координат:

$$M \ddot{x} = \sum F_{kx}^e, \quad M \ddot{y} = \sum F_{ky}^e, \quad M \ddot{z} = \sum F_{kz}^e,$$

где x, y, z – координаты произвольной точки тела.

Полученные уравнения аналогичны дифференциальным уравнениям движения материальной точки, масса которой равна массе всего тела и к которой приложены все внешние силы, действующие на систему.

6. Теорема об изменении количества движения системы

Количеством движения системы называют векторную величину, равную геометрической сумме количеств движения всех точек системы

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k . \quad (4.6)$$

Найдем формулу, с помощью которой значительно легче вычислить величину \bar{Q} , а также уяснить ее физический смысл.

Из определения центра масс механической системы следует, что $M\bar{r}_c = \sum m_k \bar{r}_k$. Взяв производную по времени от этого равенства, получим, что $M \frac{d\bar{r}_c}{dt} = \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt}$, или $M\bar{v}_c = \sum m_k \bar{v}_k$, следовательно,

$$\bar{Q} = \sum m_k \bar{v}_k = M\bar{v}_c , \quad (4.7)$$

где M – масса системы, а \bar{v}_c – скорость ее центра масс.

Проекции количества движения на оси прямоугольной системы координат записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum m_k v_{kx} = Mv_{cx}, \\ Q_y &= \sum m_k v_{ky} = Mv_{cy}, \\ Q_z &= \sum m_k v_{kz} = Mv_{cz}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из формулы (4.7) видно, что если тело (система) движется так, что центр масс остается неподвижным, то количество движения тела равно нулю. Если тело совершает сложное движение, состоящее из поступательного переносного движения со скоростью центра масс и относительного движения по отношению к системе координат, имеющей начало в центре масс, количество движения системы будет характеризовать только поступательное переносное движение, т.е. не характеризует движение системы в целом.

Например, для катящегося колеса $\bar{Q} = M\bar{v}_c$, независимо от того, как вращается колесо вокруг его центра масс.

Для механической системы, состоящей из n материальных точек, запишем дифференциальные уравнения системы в векторной форме (4.1)

$$m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

Так как масса каждой точки постоянна, внесем ее под знак производной, после чего просуммируем все эти уравнения:

$$\sum \frac{d}{dt} (m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{F}_k^e + \sum \bar{F}_k^i .$$

Поскольку операции суммирования и дифференцирования переместительны, а главный вектор внутренних сил равен нулю, будем иметь

$$\frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{F}_k^e ,$$

или

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \sum \bar{F}_k^e. \quad (4.9)$$

Уравнение (4.9) выражает теорему об изменении количества движения системы в дифференциальной форме: *производная по времени от количества движения системы равна геометрической сумме всех действующих на систему внешних сил*. В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$\frac{dQ_x}{dt} = \sum F_{kx}^e, \quad \frac{dQ_y}{dt} = \sum F_{ky}^e, \quad \frac{dQ_z}{dt} = \sum F_{kz}^e. \quad (4.10)$$

Формулу (4.9) можно переписать иначе:

$$d\bar{Q} = \sum \bar{F}_k^e dt = \sum d\bar{S}_k^e, \quad (4.11)$$

что представляет вторую дифференциальную форму теоремы: дифференциал количества движения системы равен векторной сумме элементарных импульсов внешних сил, приложенных к системе.

Найдем интегральную форму теоремы. Для этого положим, что в момент $t = 0$ количество движения системы равно \bar{Q}_0 , а в момент t_1 становится равным \bar{Q}_1 , и после интегрирования (4.11) получим:

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e, \quad (4.12)$$

т.е. изменение количества движения системы за некоторый промежуток времени равно векторной сумме импульсов внешних сил за тот же промежуток времени.

В проекциях на координатные оси будем иметь:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e. \quad (4.13)$$

Доказанная теорема связана с теоремой о движении центра масс системы. Установим эту связь. Так как $\bar{Q} = M\bar{v}_c$, то, подставляя это значение в равенство

(4.9) и учитывая, что $\frac{d\bar{v}_c}{dt} = \bar{a}_c$, получим $M\bar{a}_c = \sum \bar{F}_k^e$, т.е. уравнение (4.4).

Следовательно, теорема о движении центра масс и теорема об изменении количества движения системы представляют собой, по существу, две различные формы одной и той же теоремы. При изучении движения твердых тел можно в равной степени пользоваться любой из этих форм. При изучении движения непрерывной среды (жидкость, газ) понятие о центре масс всей системы теряет смысл. Поэтому пользуются теоремой об изменении количества движения системы.

7. Закон сохранения количества движения системы

Теорема об изменении количества движения принимает особенно простой вид, если главный вектор внешних сил равен нулю, т.е. $\sum F_k^e = 0$, тогда $d\bar{Q}/dt = 0$ и, следовательно, главный вектор количества движения системы

$$\bar{Q} = \text{const} , \quad (4.14)$$

т.е. если главный вектор внешних сил, действующих на систему, равен нулю, то количество движения системы будет постоянным как по модулю, так и по направлению. Это утверждение носит название закона сохранения количества движения. Если одна из проекций главного вектора внешних сил равна нулю, то неизменной остается соответствующая проекция количества движения; например, если

$$\sum F_{kx}^e = 0, \text{ то } \frac{dQ_x}{dt} = 0 \text{ и } Q_x = \text{const}. \quad (4.15)$$

Примеры выполнения закона сохранения количества движения или его проекции часто встречаются в природе и технике. Например, если человек переходит с кормы на нос первоначально неподвижной лодки, то лодка будет двигаться в направлении, противоположном движению человека. Суммарное количество движения системы человек-лодка останется равным нулю, т.е. таким, каким оно было до начала движения человека.

Принцип реактивного движения также основан на законе сохранения количества движения. Действительно, если рассматривать корпус ракеты и вылетающие из нее газы как одну систему, то силы взаимодействия газов и корпуса являются внутренними и не могут изменить общего количества движения системы. Поэтому при вылете газов корпус ракеты движется в противоположном направлении со скоростью, обеспечивающей равенство нулю общего количества движения системы ракета-газы.

8. Примеры применения теоремы об изменении количества движения системы

Пример 1 [5]. Из наконечника пожарного рукава с поперечным сечением 16 см^2 бьет струя воды под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту со скоростью 8 м/с . Определить силу давления струи на вертикальную стену, пренебрегая действием силы тяжести на форму струи и считая, что частицы жидкости после встречи со стеной приобретут скорости, направленные вдоль стены (рис. 4.6).

Решение. Для решения задачи применим первое из уравнений (4.13)

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kr}^e$$

к части струи, заключенной в данный момент в объеме ABC .

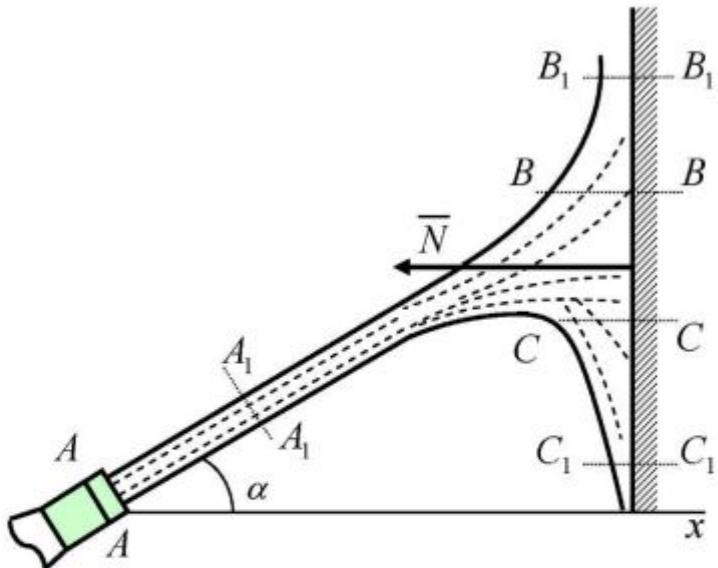


Рис. 4.6

Вычислим для выделенного объема разность $Q_{1x} - Q_{0x}$ за некоторый промежуток времени Δt . За время Δt этот объем перемещается в положение A_1, B_1, C_1 . При этом значение Q_x уменьшится на величину ΔMv , где ΔM – масса объема AA_1 . Жидкость же, перетекающая в объемы BB_1 и CC_1 , движется перпендикулярно оси x и величину Q_x не увеличит. Так как мы имеем только уменьшение Q_x , то

$$Q_{1x} - Q_{0x} = -\Delta M v \cos \alpha. \quad (a)$$

Внешней силой, действующей на выделенный объем и дающей проекцию на ось x , будет только реакция стенки \bar{N} . Считая величину N постоянной, получим

$$\sum S_{kx}^e = -N\Delta t.$$

В результате равенство (a) дает

$$\Delta M v \cos \alpha = N\Delta t. \quad (b)$$

Вычислим величину ΔM . Так как перемещение $AA_1 = v\Delta t$, то

$$\Delta M = \rho S v \Delta t,$$

где ρ – плотность воды, S – площадь поперечного сечения струи на участке AA_1 , равная площади сечения рукава. Подставляя эти значения в равенство (b) и учитывая, что для воды $\rho = 1000 \text{ кг}/\text{м}^3$, найдем окончательно:

$$N = \rho S v^2 \cos \alpha = 1000 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 8^2 \cos 30^\circ = 88,7 \text{ Н.}$$

Сила давления струи на стенку равна этой же величине.

Пример 2 [5]. По понтонному мосту A массы M движется автомобиль массой m по закону $s(t) = b(\alpha t + e^{-\alpha t} - 1)$.

Пренебрегая сопротивлением воды и течением, определить: 1) скорость \bar{v}_A , с которой двигался бы мост, если его не скрепить с берегом; 2) силу \bar{T} на тяжение тросов, удерживающих мост.

Решение. Все внешние силы, действующие на систему (силы тяжести $\bar{P} = m\bar{g}$, $\bar{Q} = M\bar{g}$ и выталкивающая сила \bar{R}), будут вертикальными (рис. 4.7).

Проведем ось x перпендикулярно им и запишем теорему об изменении количества движения системы в проекциях на эту ось:

$$\frac{dQ_x}{dt} = 0.$$

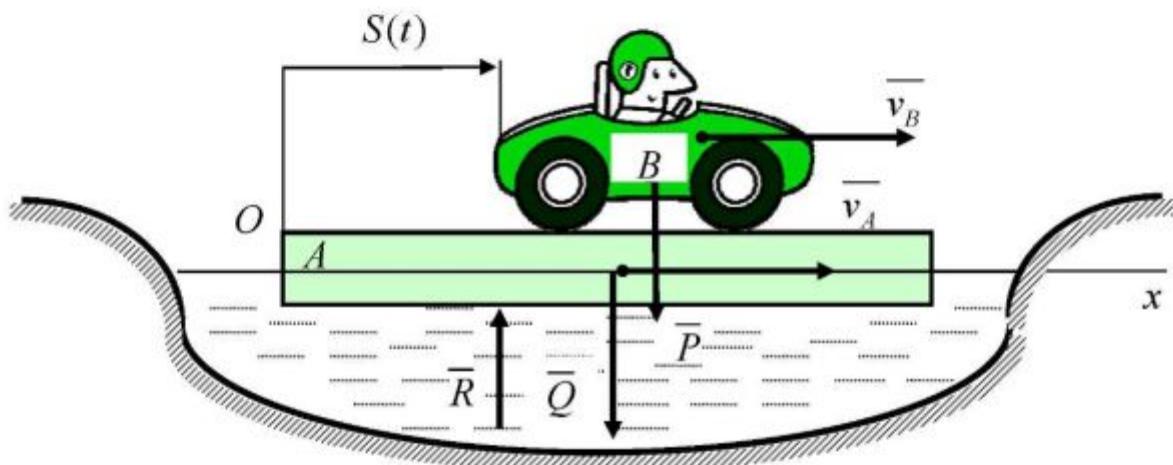


Рис. 4.7

Таким образом, мы имеем случай сохранения проекции количества движения системы

$$Q_{1x} = Q_{Ox}.$$

Поскольку в начальный момент система неподвижна, $Q_{Ox} = 0$ и решение задачи сводится к тому, чтобы найти количество движения в момент времени $t > 0$ и приравнять полученное выражение нулю. Обозначим скорость понтона через \bar{v}_A и направим ее в сторону положительного направления оси Ox . Скорость автомобиля относительно платформы обозначим \bar{v}_r ; при этом

$$v_r = \dot{s} = b\alpha(1 - e^{-\alpha t}).$$

Абсолютная скорость автомобиля равна

$$v_B = v_e + v_r = v_A + b\alpha(1 - e^{-\alpha t}).$$

Тогда

$$Q_x = Mv_A + m[v_A + b\alpha(1 - e^{-\alpha t})] = 0,$$

откуда

$$v_A = -\frac{mb\alpha}{M+m}(1 - e^{-\alpha t}).$$

Знак минус показывает, что понтон будет перемещаться в сторону, противоположную движению автомобиля.

Взяв производную по времени от скорости v_A , мы найдем ускорение понтонов

$$\dot{v}_A = -\frac{mb\alpha^2 e^{-\alpha t}}{M+m}.$$

Тогда сила натяжения тросов будет равна

$$T = mb\alpha^2 e^{-\alpha t}.$$

Пример 3 [6]. В стиральной машине типа “Эврика – 3” (рис. 4.8), стирка и отжим белья происходит в барабане с горизонтальной осью вращения.

Определить горизонтальное движение машины при отжиме, если масса мокрого белья равна 5 кг, смещение ОА его центра масс относительно оси вращения барабана равно $l = 0,085$ м, скорость вращения барабана при отжиме равна 380 об/мин, а масса самой машины равна 80 кг. Так же определить силу давления машины на пол в процессе отжима. Трением в осях опорных роликов и их массой пренебречь.

Решение. К системе приложены внешние силы: силы тяжести \bar{P} , \bar{G} и реакция пола \bar{N} . Все они вертикальны, а ось x проведем горизонтально. Начало отсчета O_1 выберем в положении, которое занимает ось барабана O при $\varphi = 0$, т.е. при $t = 0$. Запишем теорему в проекциях на оси координат:

$$dQ_x / dt = \sum F_{kx}^e = 0;$$

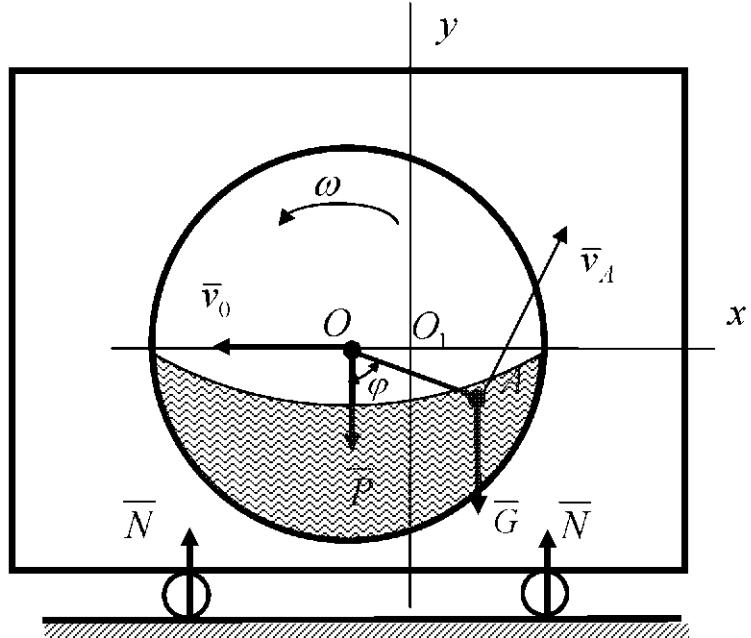


Рис. 4.8

следовательно, $Q_x = \text{const} = Q_{x_0} = 0$, так как до включения мотора система машина-белье была в покое;

$$dQ_y/dt = \sum F_{ky}^e = N - P - G,$$

откуда $N = P + G + \frac{dQ_y}{dt}$. Таким образом, задача сводится к определению проекции количества движения системы на оси x и y . Предположим, что в данный момент времени центр барабана O движется влево со скоростью v_0 ; тогда

$$Q_x = -m_1 v_0 + m_2 v_{Ax}, \quad Q_y = m_2 v_{Ay},$$

где m_1 – масса машины, m_2 – масса белья, \bar{v}_A – абсолютная скорость центра масс белья.

Переносной скоростью для точки A является скорость \bar{v}_0 , относительной – скорость при вращении белья вокруг точки O ; $v_r = \omega l$. Тогда

$$Q_x = -(m_1 + m_2)v_0 + m_2\omega l \cos \omega t, \quad Q_y = m_2\omega l \sin \omega t.$$

Так как $Q_x = 0$, получаем, что

$$v_0 = \frac{dx_0}{dt} = \frac{m_2\omega l}{m_1 + m_2} \cos \omega t,$$

откуда $x_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \omega t + C$. Из начальных условий ($t = 0, x_0 = 0$) находим

$$x_0 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l \sin \omega t = \frac{5}{80 + 5} 0,085 \sin \frac{\pi \cdot 380}{30} t = 0,005 \sin 39,8t.$$

Машина будет совершать гармонические горизонтальные колебания с амплитудой 0,005 м и частотой 39,8 рад/с (6,3 Гц) относительно начального положения центра барабана О. Сила давления машины на пол по величине равна реакции пола, поэтому

$$N = (m_1 + m_2)g + m_2\omega^2 l \cos \omega t = (80 + 5) 9,8 + 5 \cdot 39,8t = 833 + 673,2 \cos 39,8t$$

Минимальное значение N достигается при $\cos 39,8t = -1$, т.е. при $\varphi = 180^\circ$, а максимальное – при $\varphi = 0$:

$$N_{\min} = (m_1 + m_2)g - m_2\omega^2 l = 159,8 \text{ Н},$$

$$N_{\max} = (m_1 + m_2)g + m_2\omega^2 l = 1506,2 \text{ Н}.$$

9. Кинетический момент системы материальных точек

Кинетическим моментом системы материальных точек относительно данного центра O называется векторная величина \bar{L}_0 , равная геометрической сумме моментов количеств движения всех точек системы относительно этого центра

$$\bar{L}_0 = \sum \bar{m}_0 (m_k \bar{v}_k) = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k . \quad (4.16)$$

Вектор \bar{L}_0 приложен в самой точке O , относительно которой он вычисляется.

Если вектор \bar{L}_0 спроектировать на оси координат, проходящие через центр O , то получим проекции кинетического момента на эти оси L_x , L_y , L_z , которые одновременно представляют кинетические моменты системы относительно осей координат:

$$\begin{aligned} L_x &= \sum m_x (m_k \bar{v}_k) = \sum m_k \left(y_k \dot{z}_k - z_k \dot{y}_k \right), \\ L_y &= \sum m_y (m_k \bar{v}_k) = \sum m_k \left(z_k \dot{x}_k - x_k \dot{z}_k \right), \\ L_z &= \sum m_z (m_k \bar{v}_k) = \sum m_k \left(x_k \dot{y}_k - y_k \dot{x}_k \right). \end{aligned} \quad (4.17)$$

Единица кинетического момента в СИ

$-\frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}}$. Кинетический момент системы является характеристикой вращательного движения системы.

Вычислим кинетический момент твердого тела вращающегося вокруг неподвижной оси с угловой скоростью ω (рис. 4.9) через его проекции на оси координат.

Найдем сначала наиболее важную для приложений формулу L_z , т.е. кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения.

Для любой точки вращающегося тела, отстоящей от оси вращения на расстоянии h_k , скорость $v_k = \omega h_k$. Следовательно, для этой точки

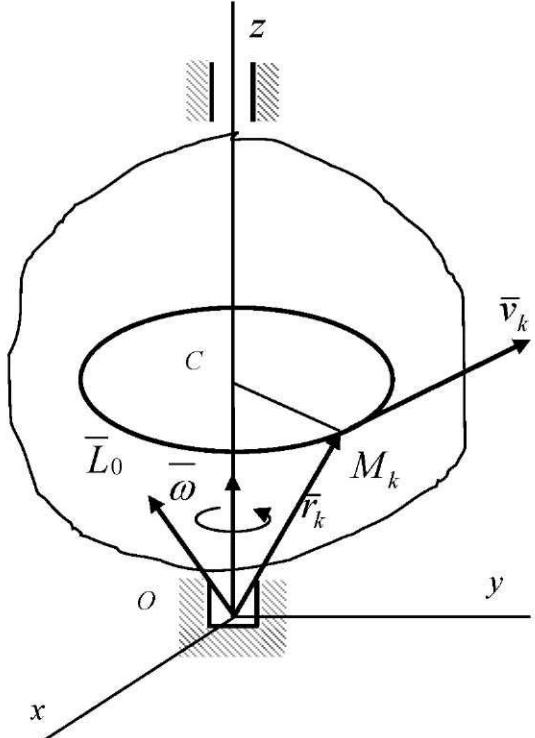


Рис. 4.9

$$m_z(m_k \bar{v}_k) = m_k v_k h_k = m_k \omega h_k^2.$$

Тогда для всего тела, вынося общий множитель ω за скобку, получим

$$L_z = \sum m_z(m_k \bar{v}_k) = (\sum m_k h_k^2) \omega = J_z \omega,$$

или

$$L_z = J_z \omega. \quad (4.17')$$

Таким образом, кинетический момент вращающегося тела относительно оси вращения равен произведению момента инерции тела относительно этой оси на угловую скорость тела.

Без вывода приведем формулы для кинетических моментов относительно двух других координатных осей x и y . Имеем

$$L_x = -J_{xz} \omega; \quad L_y = -J_{yz} \omega,$$

где $J_{xz} = \sum m_k x_k z_k$ и $J_{yz} = \sum m_k y_k z_k$ – центробежные моменты инерции вращающегося тела.

По проекциям определяем модуль кинетического момента и косинусы углов его с осями координат по известным формулам

$$L_c = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2};$$

$$\cos(\bar{L}_0, \bar{i}) = \frac{L_x}{L_0}, \quad \cos(\bar{L}_0, \bar{j}) = \frac{L_y}{L_0}, \quad \cos(\bar{L}_0, \bar{k}) = \frac{L_z}{L_0}.$$

Если ось вращения Oz является главной осью инерции тела для точки O , то $J_{xz} = J_{yz} = 0$ и, следовательно, $L_x = L_y = 0$ для этой точки. В этом случае кинетический момент \bar{L}_0 относительно точки O направлен по оси вращения и $L_0 = L_z$.

Аналогичным образом найдем кинетический момент материального тела, совершающего плоскопараллельное движение, относительно неподвижного центра O_1 , лежащего в плоскости тела. Кроме неподвижных осей $O_1 x_1 y_1 z_1$ введем подвижные координатные оси $C x_2 y_2 z_2$, перемещающиеся поступательно относительно инерциальных осей

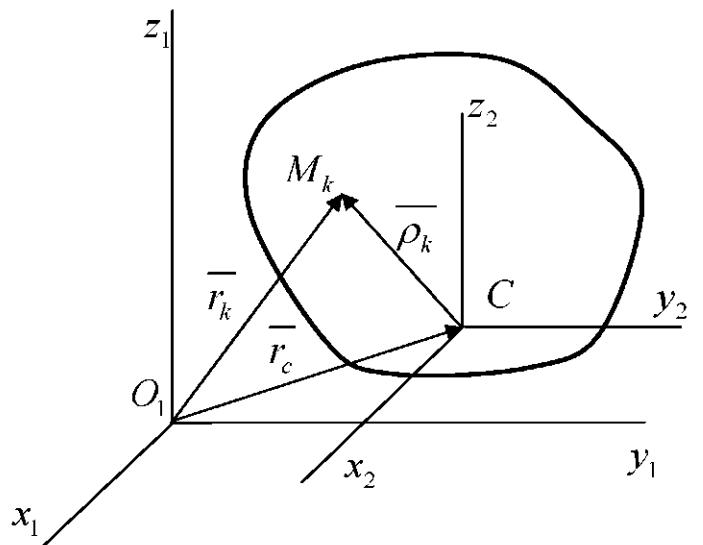


Рис. 4.10

$O_1x_1y_1z_1$ и имеющих начало в центре масс C материальной системы (рис. 4.10).

Будем рассматривать движение материальной системы как относительно неподвижных осей $O_1x_1y_1z_1$, так и относительно поступательно перемещающихся осей $Cx_2y_2z_2$. Очевидно, что в любой момент времени будет выполняться векторное равенство

$$\bar{r}_k = \bar{r}_c + \bar{\rho}_k. \quad (4.18)$$

Из кинематики известно, что скорость \bar{v}_k точки M_k относительно неподвижных осей складывается из переносной \bar{v}_{ek} и относительной \bar{v}_{rk} скоростей:

$$\bar{v}_k = \bar{v}_{ek} + \bar{v}_{rk}. \quad (4.19)$$

Учитывая, что подвижные оси перемещаются поступательно будем иметь

$$\bar{v}_{ek} = \bar{v}_c, \quad \bar{v}_{rk} = \frac{d\bar{\rho}_k}{dt}. \quad (4.20)$$

Кинетический момент тела в абсолютном движении относительно неподвижного центра O_1 равен

$$\bar{L}_{O_1} = \sum \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k. \quad (4.21)$$

Подставляя в (4.21) значения \bar{r}_k и \bar{v}_k из (4.18) и (4.19), после некоторых преобразований, будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{L}_{O_1} &= \sum (\bar{r}_c + \bar{\rho}_k) \times m_k \left(\bar{v}_c + \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} \right) = \sum \bar{r}_c \times m_k \bar{v}_c + \sum \bar{r}_c \times m_k \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} + \\ &+ \sum \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_c + \sum \bar{\rho}_k \times m_k \frac{d\bar{\rho}_k}{dt}. \end{aligned}$$

Преобразуем каждое из четырех полученных слагаемых:

$$\sum \bar{r}_c \times m_k \bar{v}_c = \bar{r}_c \times \bar{v}_c \sum m_k = \bar{r}_c \times M \bar{v}_c = \bar{r}_c \times \bar{Q},$$

где $M = \sum m_k$ – масса тела, \bar{Q} – главный вектор количества движения тела; второе и третье слагаемые равны нулю:

$$\sum \bar{r}_c \times m_k \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} = \bar{r}_c \times \sum \frac{d}{dt} (m_k \bar{\rho}_k) = \bar{r}_c \times \frac{d}{dt} (\sum m_k \bar{\rho}_k) = 0,$$

$\sum \bar{\rho}_k \times m_k \bar{v}_c = (\sum m_k \bar{\rho}_k) \times \bar{v}_c = 0$, поскольку $\sum m_k \bar{\rho}_k = 0$, что следует из определения центра масс. Так как $\bar{v}_{rk} \perp \bar{\rho}_k$, то модуль последнего слагаемого равен

$$\left| \sum \bar{\rho}_k \times m_k \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} \right| = \sum |\bar{\rho}_k| m_k |\bar{v}_{rk}| = \sum m_k \rho_k^2 \omega = \omega \sum m_k \rho_k^2 = \omega J_{Cx_2},$$

где J_{Cx_2} – момент инерции тела относительно оси, перпендикулярной плоскости его движения и проходящей через его центр масс, т.е. это слагаемое определяется вращением фигуры вокруг центра масс. Обозначим его L'_C . Тогда

$$\bar{L}_{O_1} = \bar{r}_c \times \bar{Q} + L'_C. \quad (4.22)$$

Равенство (4.22) можно сформулировать следующим образом: момент количества абсолютного движения \bar{L}_{O_1} относительно неподвижного центра O_1 равен сумме момента относительно того же центра количества движения центра масс системы, в предположении, что в нем сосредоточена вся ее масса, и момента относительного центра масс количества относительного движения системы.

В проекциях на неподвижные оси координат векторное равенство (4.22) эквивалентно трем скалярным:

$$L_{x_1} = m_{x_1} (M \bar{v}_c) + L'_{Cx_2}; \quad L_{y_1} = m_{y_1} (M \bar{v}_c) + L'_{Cy_2}; \quad L_{z_1} = m_{z_1} (M \bar{v}_c) + L'_{Cz_2}. \quad (4.23)$$

Пример [5]. Вычислить главный момент количества движения планетарной передачи относительно неподвижной оси Z , совпадающей с осью вращения кривошипа OC_3 . Неподвижное колесо 1 и подвижное колесо 3 – одинакового радиуса r . Масса колеса 3 равна m . Колесо 2 массы m_2 имеет радиус r_2 . Кривошип вращается с угловой скоростью, проекция которой на ось Z равна ω_z . Массой кривошипа пренебречь. Колеса считать однородными дисками (рис. 4.11).

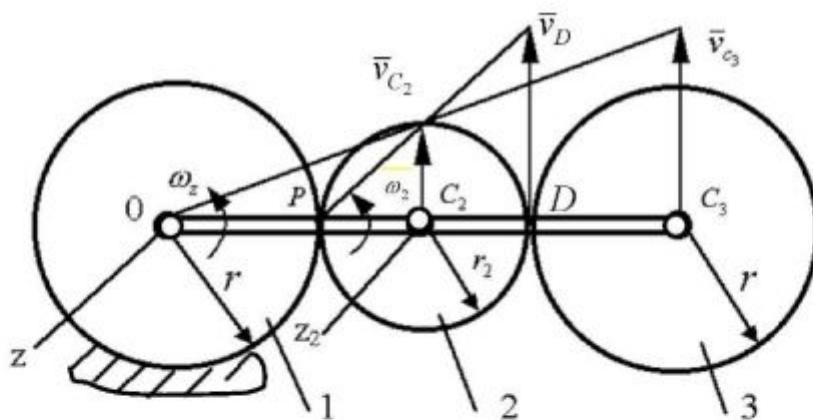


Рис. 4.11

Решение. Так как колесо 1 неподвижно, то кинетический момент планетарной передачи L_{OZ} относительно неподвижной оси Oz будет

$$L_{OZ} = L_{OZ}^{(2)} + L_{OZ}^{(3)},$$

где $L_{OZ}^{(2)}$ и $L_{OZ}^{(3)}$ – моменты количеств движения относительно оси Oz колеса 2 и колеса 3 соответственно.

Колесо 2 совершает плоское движение. Поэтому для вычисления его кинетического момента относительно оси Oz воспользуемся третьей формулой (4.23)

$$L_{OZ}^{(2)} = m_{Oz} (m_2 \bar{v}_{c_2}) + L_{C_2 z_2}^r.$$

Плечо вектора $m_2 \bar{v}_{c_2}$ относительно оси Oz равно $(r + r_2)$, следовательно,

$$m_{Oz} (m_2 \bar{v}_{c_2}) = m_2 v_{c_2} (r + r_2).$$

Относительное движение колеса 2 представляет вращение вокруг оси $C_2 z_2$. Поэтому

$$L_{C_2 z_2}^r = J_{z2} \omega_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2} \omega_2.$$

Так, как скорости точек D и C_3 колеса 3 равны по модулю и параллельны, то это колесо относительно неподвижной оси Oz совершает поступательное движение; поэтому его кинетический момент относительно этой оси определяется только одним первым слагаемым формулы (4.23)

$$L_{OZ}^{(3)} = m_{Oz} (m_3 \bar{v}_{c_3}) = m v_{c_3} (2r + 2r_2).$$

Для полного решения задачи остается выразить v_{c_2}, v_{c_3} и ω_2 через заданную угловую скорость ω_z .

Из построений на чертеже (рис. 4.11) видно, что

$$\omega_2 r_2 = \omega_z (r + r_2), \quad v_{c_2} = \omega_z (r + r_2), \quad v_{c_3} = 2\omega_z (r + r_2),$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_z \frac{r + r_2}{r_2}.$$

После подстановки всех этих значений в основную формулу получим ответ

$$\begin{aligned} L_{Oz} &= m_2 \omega_z (r + r_2)^2 + \frac{1}{2} m_2 r_2 \omega_z (r + r_2) + 4m \omega_z (r + r_2)^2 = \\ &= m_2 (2r + 3r_2) + 8m (r + r_2) \frac{(r + r_2) \omega_z}{2}. \end{aligned}$$

10. Теорема об изменении кинетического момента системы

Теорема моментов, доказанная для одной материальной точки (2.28), будет справедлива для каждой точки системы, т.е.

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где \bar{F}_k^e и \bar{F}_k^i – равнодействующие всех внешних и внутренних сил действующих на данную точку.

Составляя такие уравнения для всех точек системы, складывая их по членно и учитывая, что сумма производных равна производной от суммы, получим

$$\sum \frac{d}{dt}(\bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k) = \sum m_0(F_k^e) + \sum m_0(F_k^i).$$

Но последняя сумма по свойству внутренних сил системы равна нулю.

Тогда, учитывая равенство (4.21), найдем окончательно

$$\frac{d\bar{L}_0}{dt} = \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k^e). \quad (4.24)$$

Следовательно, *производная по времени от кинетического момента системы относительно какого-либо неподвижного центра равна векторной сумме моментов внешних сил, действующих на систему, относительно того же центра*.

Проецируя (4.24) на неподвижные оси координат – $Oxyz$, получаем теоремы об изменении кинетического момента системы относительно этих осей координат, т.е.

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum m_x(\bar{F}_k^e), \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum m_y(\bar{F}_k^e), \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum m_z(\bar{F}_k^e). \quad (4.25)$$

Теорема об изменении кинетического момента позволяет изучать вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной оси или точки или вращательную часть движения при сложном движении тела.

Получим теорему об изменении кинетического момента системы для точки A , движущейся относительно инерциальной системы отсчета со скоростью v_A (рис. 4.12).

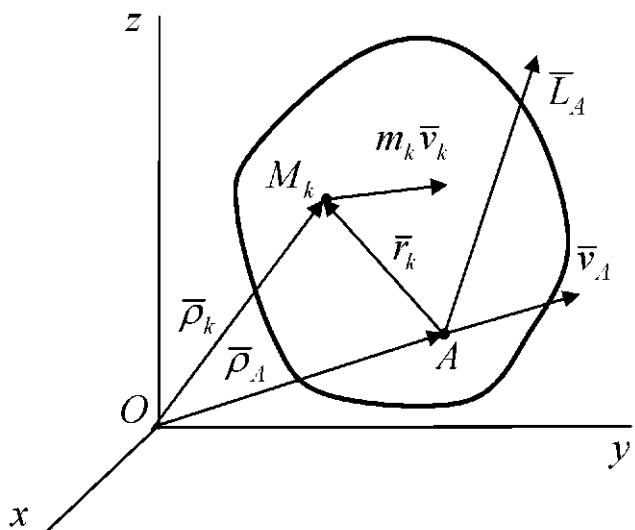


Рис.4.12

Кинетический момент системы относительно точки A согласно (4.21) имеет вид:

$$\bar{L}_A = \sum \bar{m}_A (\bar{m}_k \bar{v}_k) = \sum \bar{r}_k \times \bar{m}_k \bar{v}_k.$$

Вычислим производную по времени от кинетического момента \bar{L}_A по правилу дифференцирования векторных произведений. Получим

$$\frac{d\bar{L}_A}{dt} = \sum \left(\frac{d\bar{r}_k}{dt} \times \bar{m}_k \bar{v}_k + \bar{r}_k \times \bar{m}_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} \right).$$

Преобразуем правую часть этого равенства с учетом следующего.

Так как $\bar{r}_k = \bar{\rho}_k - \bar{\rho}_A$, то

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}_k}{dt} &= \frac{d\bar{\rho}_k}{dt} - \frac{d\bar{\rho}_A}{dt} = \bar{v}_k - \bar{v}_A; \\ m_k \frac{d\bar{v}_k}{dt} &= \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i; \quad \bar{v}_k \times m\bar{v}_k = 0; \quad \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^i = 0. \end{aligned}$$

Равенство примет следующий вид:

$$\frac{d\bar{L}_A}{dt} = -\bar{v}_A \times \sum m_k \bar{v}_k + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e.$$

Учитывая, что $\sum m_k \bar{v}_k = M\bar{v}_c$, получим

$$\frac{d\bar{L}_A}{dt} = -\bar{v}_A \times M\bar{v}_c + \sum \bar{r}_k \times \bar{F}_k^e,$$

или окончательно

$$\frac{d\bar{L}_A}{dt} = M\bar{v}_c \times \bar{v}_A + \sum \bar{m}_A (\bar{F}_k^e). \quad (4.26)$$

Если точка A совпадает с центром масс системы, то $M\bar{v}_c \times \bar{v}_c = 0$, и теорема принимает такой же вид, как и (4.24), т.е.

$$\frac{d\bar{L}_c}{dt} = \sum \bar{m}_c (\bar{F}_k^e). \quad (4.27)$$

Из формул (4.24), (4.26) и (4.27) видно, что внутренние силы непосредственно не влияют на изменение кинетического момента системы, что позволяет при изучении вращательного движения системы исключить их.

11. Закон сохранения кинетического момента системы

Из теоремы моментов можно получить следующие важные следствия.

1). Если главный момент всех внешних сил системы относительно какого-нибудь неподвижного центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра остается постоянным, т.е. если

$$\sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) = \frac{d\bar{L}_0}{dt} = 0, \text{ то } \bar{L}_0 = \text{const.} \quad (4.28)$$

2). Если же сумма моментов всех внешних сил системы относительно какой-либо неподвижной оси равна нулю, то проекция вектора кинетического момента системы на эту ось остается постоянной величиной, т.е. если

$$\sum m_z (\bar{F}_k^e) = \frac{dL_z}{dt} = 0, \text{ то } L_z = \text{const.} \quad (4.29)$$

Утверждения (4.28) и (4.29) представляют собой закон сохранения кинетического момента системы. Из них также следует, что внутренние силы изменить кинетический момент системы не могут.

Закон сохранения кинетического момента часто встречается в природе и используется в технических приложениях.

Рассмотрим случай вращающейся системы. Пусть система вращается вокруг неподвижной (проходящей через центр масс) оси Oz . Если внешние силы параллельны оси или пересекают ось, то $\sum m_z (\bar{F}_k^e) = 0$ и $L_z = J_z \omega = \text{const}$. При этом могут быть два случая:

a). Если система неизменяемая (абсолютно твердое тело), то для него $J_z = \text{const}$ и, следовательно, $\omega = \text{const}$, т.е. твердое тело вращается в этом случае с постоянной угловой скоростью.

б). Если система изменяемая, то под действием внутренних сил отдельные ее части могут менять свое положение относительно оси, что вызывает изменение J_z . Но поскольку $J_z \omega = \text{const}$, то при изменении J_z должна меняться и ω . Таким образом, действием внутренних сил можно изменить угловую скорость вращения изменяемой системы. Примером этого может служить выполнение одного из элементов фигурного катания на коньках вращение на месте с переменной угловой скоростью. Действительно, сумма моментов действующих на фигуриста внешних сил (веса и реакции льда) относи-

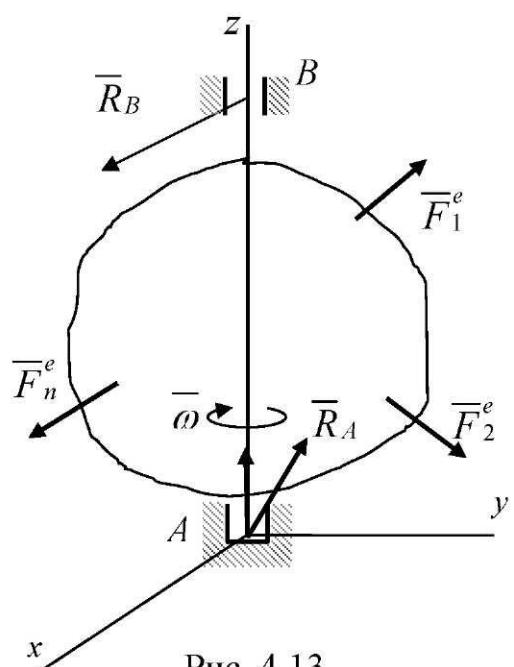


Рис. 4.13

тельно оси вращения равны нулю, и кинетический момент фигуриста относительно этой оси остается постоянным $J_z\omega = \text{const}$. Поэтому для увеличения угловой скорости фигурист прижимает руки к туловищу: его J_z уменьшается, а угловая скорость его увеличивается. Если же фигурист хочет замедлить вращение, то он разводит руки в стороны; при этом J_z увеличивается, а ω уменьшается.

12. Примеры применения теоремы об изменении кинетического момента системы

Пример 1. Используя теорему об изменении кинетического момента получить дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси Oz (рис. 4.13).

Решение. Пусть твердое тело вращается вокруг неподвижной оси Az под действием системы внешних сил $(\bar{F}_1^e, \bar{F}_2^e, \dots, \bar{F}_n^e, \bar{R}_B, \bar{R}_A)$. Чтобы исключить из рассмотрения неизвестные реакции \bar{R}_B и \bar{R}_A , запишем уравнение теоремы об изменении кинетического момента системы в проекции на ось вращения:

$$\frac{dL_z}{dt} = \sum m_z (\bar{F}_k^e).$$

Как известно, кинетический момент твердого тела относительно оси вращения равен $L_z = J_z\omega$. Поэтому

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt} (J_z\omega) = J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \frac{d^2\phi}{dt^2},$$

т.к. J_z – постоянный для твердого тела момент инерции относительно неподвижной оси. Учитывая это, получаем

$$J_z \frac{d^2\phi}{dt^2} = \sum m_z (\bar{F}_k^e). \quad (4.30)$$

Это уравнение по своей структуре аналогично основному уравнению динамики точки. В нем роль массы играет осевой момент инерции, а суммы сил – сумма моментов сил относительно оси вращения.

В частном случае, когда

$$\sum m_z (\bar{F}_k^e) = \text{const}, \text{ то } \ddot{\phi} = \text{const},$$

т.е. вращение тела происходит с постоянным угловым ускорением; если

$$\sum m_z (\bar{F}_k^e) = 0, \text{ то } \dot{\phi} = 0 \text{ и } \phi = \text{const}.$$

Это случай равномерного вращения тела по инерции.

Уравнение (4.30) позволяет решать две основные задачи динамики для вращательного движения: 1) по заданному уравнению вращения тела определить вращающий момент внешних сил; 2) по заданному вращательному моменту и начальным условиям находить закон вращения тела.

Пример 2 [5]. Горизонтальная трубка CD может свободно вращаться вокруг вертикальной оси AB . Внутри трубы на расстоянии $M_0C = a$ от оси находится шарик M . В некоторый момент времени трубке сообщается начальная угловая скорость ω_0 . Определить угловую скорость ω трубы в момент, когда шарик вылетит из трубы. Момент инерции трубы относительно оси вращения равен J , l – ее длина; трением пренебречь, шарик считать материальной точкой массы m (рис. 4.14).

Решение. Направим ось x вдоль трубы, а ось y совместим с осью вращения AB . Изобразим все внешние силы: силы тяжести \bar{G}_1 , \bar{G}_2 и реакции подшипников \bar{R}_A и \bar{R}_B . Все они или параллельны оси вращения, или пересекают ее, следовательно, их моменты относительно этой оси равны нулю. Поэтому

$$\frac{dL_y}{dt} = \sum m_y (\bar{F}_k^e) = 0,$$

т.е. выполняется закон сохранения кинетического момента системы относительно оси y , в связи с чем $L_y = const$, и задача сводится к подсчету кинетического момента в начальный момент и в момент, когда точка M достигнет конца трубы.

Так как система состоит из двух тел, то ее кинетический момент относительно оси y равен сумме кинетических моментов трубы и шарика

$$L_y = L_y^{pp} + L_y^{sh}.$$

При подсчете кинетических моментов следует помнить, что в их выражения входят абсолютные скорости. В начальный момент, когда шарик относительно трубы не двигался, имеем

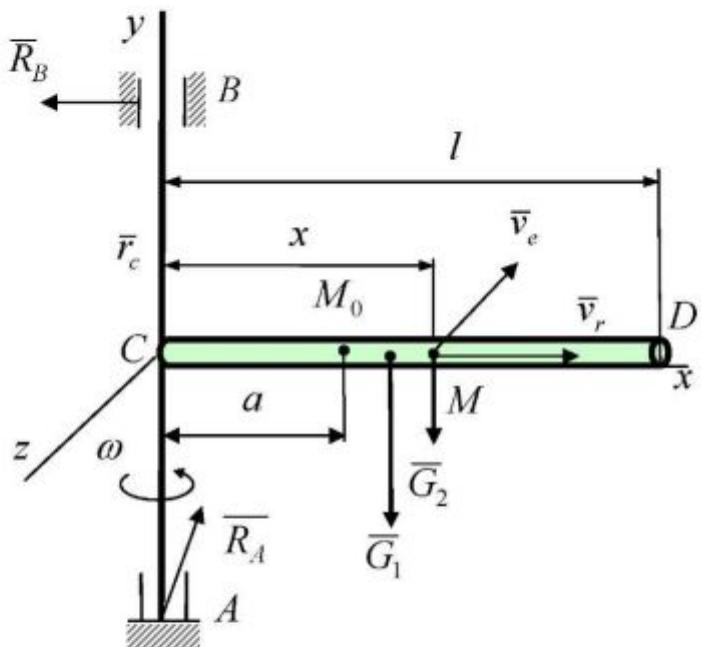


Рис. 4.14

$$L_{y(t=0)} = J\omega_0 + m\omega_0 a^2,$$

относительная скорость шарика в этот момент равна нулю.

В момент вылета из трубы

$$L_{y(t=t_1)} = J\omega + m\omega l^2.$$

Относительная скорость шарика и в этот момент не повлияет на изменение кинетического момента системы, т.к. ее направление всегда лежит в плоскости оси вращения. Поэтому

$$(J + ml^2)\omega = (J + ma^2)\omega_0,$$

откуда

$$\omega = \frac{J + ma^2}{J + ml^2} \omega_0.$$

Пример 3 [5]. Барабан A массы M_1 и радиуса r приводится во вращение посредством груза C массой M_2 , привязанного к концу нерастяжимого троса. К барабану A приложен момент сопротивления m_c , пропорциональный угловой скорости барабана; коэффициент пропорциональности равен α . Определить угловую скорость барабана, если в начальный момент система находилась в покое. Массой каната пренебречь. Барабан считать сплошным однородным цилиндром.

Решение. Изобразим систему, состоящую из барабана и груза в произвольный момент времени (рис. 4.15).

Покажем действующие на систему внешние силы: силы тяжести \bar{G}_A , \bar{G}_C и реакцию шарнира барабана \bar{R}_0 , неизвестную ни по модулю, ни по направлению. Положение барабана определяется его углом поворота φ , а положение груза – координатой s , которые связаны зависимостью $s = \varphi r$.

Для исключения из рассмотрения неизвестной реакции оси барабана \bar{R}_0 составим уравнение теоремы об изменении кинетического момента системы в проекции на эту ось

$$\frac{dL_z}{dt} = G_c r - m_c = M_2 gr - \alpha\omega.$$

Определим для рассматриваемого положения системы ее кинетический момент $L_z = L_z^{(A)} + L_z^{(C)}$. Тело C движется поступательно, поэтому его кинетический

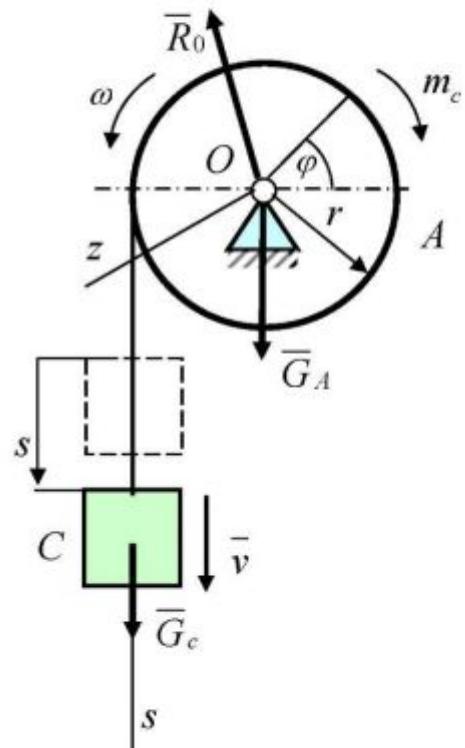


Рис. 4.15

момент относительно оси O_Z равен моменту его количества движения относительно точки O : $L_Z^{(C)} = M_2 vr = M_2 \omega r^2$ (здесь мы использовали равенство $v = \omega r$), а кинетический момент барабана относительно оси вращения равен

$$L_Z^{(A)} = J_{OZ} \omega = \frac{1}{2} M_1 r^2 \omega.$$

Итак,

$$L_Z = \frac{1}{2} M_1 r^2 \omega + M_2 r^2 \omega = \frac{r^2}{2} (M_1 + 2M_2) \omega.$$

Подставив это выражение в формулу теоремы, получим

$$\frac{r^2}{2} (M_1 + 2M_2) \frac{d\omega}{dt} = M_2 gr - \alpha \omega.$$

Решая это дифференциальное уравнение, получим

$$\int_0^\omega \frac{d\omega}{M_2 gr - \alpha \omega} = \frac{2}{r^2 (M_1 + 2M_2)} \int_0^t dt ; -\frac{1}{\alpha} \ln(M_2 gr - \alpha \omega) \Big|_0^\omega = \frac{2}{r^2 (M_1 + 2M_2)} t;$$

$$\ln \frac{M_2 gr - \alpha \omega}{M_2 gr} = -\beta t,$$

где

$$\beta = \frac{2\alpha}{r^2 (M_1 + 2M_2)}.$$

Потенцируя и разрешая относительно ω , находим закон изменения угловой скорости барабана

$$\omega = \frac{M_2 gr}{\alpha} \left(1 - e^{-\beta t} \right).$$

Пример 4 [6]. После выключения вентилятора, вращавшегося с угловой скоростью ω_0 , он тормозится силами аэродинамического сопротивления, момент которых пропорционален квадрату угловой скорости $M_c = \alpha \omega^2$, где $\alpha = \text{const} > 0$.

Определить время, за которое угловая скорость вентилятора уменьшится вдвое, и угол, на который повернется вентилятор за это время, если его момент инерции относительно оси вращения J .

Решение. Для решения задачи применим дифференциальное уравнение вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси

$$J_Z \frac{d\omega}{dt} = \sum m_Z (\bar{F}_k^e),$$

приняв за ось вращения координатную ось Oz . Считая, что моменты сил тяжести и реакций подшипников относительно оси вращения равны нулю и $J_Z = J$, получим

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\alpha\omega^2.$$

Разделим переменные и проинтегрируем это дифференциальное уравнение в соответствующих пределах:

$$\int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega^2} = -\frac{\alpha}{J} \int_0^t dt, \quad \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega_0} = \frac{\alpha}{J} t.$$

Разрешая относительно ω , находим закон изменения угловой скорости

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{J\omega_0}{J + \alpha\omega_0 t}. \quad (a)$$

Если положить в равенстве (a) $\omega = \frac{\omega_0}{2}$, то $t = t_1$, где t_1 искомое время

$$\frac{1}{2}\omega_0 = \frac{J\omega_0}{J + \alpha\omega_0 t_1}, \text{ откуда } t_1 = \frac{J}{\alpha\omega_0}.$$

Интегрируя (a), найдем закон вращения вентилятора

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = J\omega_0 \int_0^t \frac{dt}{J + \alpha\omega_0 t}, \quad \varphi = \frac{J}{\alpha} \ln \left(1 + \frac{\alpha\omega_0}{J} t \right). \quad (b)$$

Полагая $t = t_1$ найдем из (б) искомый угол поворота φ_1

$$\varphi_1 = \frac{J}{\alpha} \ln 2.$$

13. Кинетическая энергия системы

Кинетический момент и количество движения системы и даже совокупность этих динамических характеристик не могут описать движение системы, происходящего за счет внутренних сил. Поэтому в теоретической механике рассматривается еще одна мера механического движения, называемая кинетической энергией.

Напомним, что кинетической энергией материальной точки называется скалярная (всегда положительная) величина, равная половине произведения массы точки на квадрат ее скорости: $mv^2 / 2$.

Кинетической энергией системы n материальных точек называется арифметическая сумма кинетических энергий всех точек системы:

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2}. \quad (4.31)$$

Кинетическая энергия механической системы равна нулю только в том случае, когда все точки ее неподвижны. В противном случае кинетическая энергия отлична от нуля, независимо от того, внешними или внутренними силами вызвано движение точек системы. Однако, будучи величиной скалярной, кинетическая энергия не определяет направления движения, поэтому она (так же, как и количество движения, и кинетический момент) не является универсальной мерой движения механической системы.

Если механическая система состоит из нескольких тел, совершающих различные движения, то ее кинетическая энергия равна, очевидно, сумме кинетических энергий этих тел:

$$T = \sum T_k. \quad (4.32)$$

Найдем формулы для вычисления кинетической энергии тела в различных случаях его движения, пользуясь формулой (4.31).

1. Поступательное движение. В этом случае скорости всех точек тела одинаковы, т.е. $\bar{v}_k = \bar{v} = \bar{v}_c$ (где \bar{v}_c – скорость центра масс тела) и поэтому кинетическая энергия твердого тела при поступательном движении равна

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \frac{v^2}{2} \sum m_k = \frac{Mv_c^2}{2}, \quad (4.33)$$

где $M = \sum m_k$ – масса тела.

Таким образом, кинетическая энергия тела при поступательном движении равна половине произведения массы тела на квадрат скорости его центра масс.

2. Вращательное движение. Скорости точек тела определяются в этом случае $v_k = \omega h_k$, где h_k – расстояние от точки тела до оси вращения, а ω – угловая скорость тела, одинаковая для всех его точек. Тогда

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} = \sum \frac{m_k \omega^2 h_k^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_k h_k^2.$$

По определению (3.8), $\sum m_k h_k^2$ является осевым моментом инерции тела, в данном случае относительно оси вращения (например, оси z), т.е. $\sum m_k h_k^2 = J_z$, и окончательно кинетическая энергия тела при его вращательном движении равна

$$T = \frac{J_z \omega^2}{2}, \quad (4.34)$$

т.е. кинетическая энергия тела при вращательном движении равна половине произведения момента инерции тела относительно оси вращения на квадрат его угловой скорости. От направления вращения она не зависит.

3. *Общий случай движения твердого тела.* Движение можно разделить на переносное поступательное вместе с его центром масс и относительное по отношению к системе координат, движущейся поступательно вместе с центром масс. Тогда, по доказанному в кинематике, скорость любой точки тела будет равна геометрической сумме скорости полюса \bar{v}_c и скорости \bar{v}_{kr} , которую точка получает при вращении вместе с телом вокруг мгновенной оси CP (рис. 4.16)

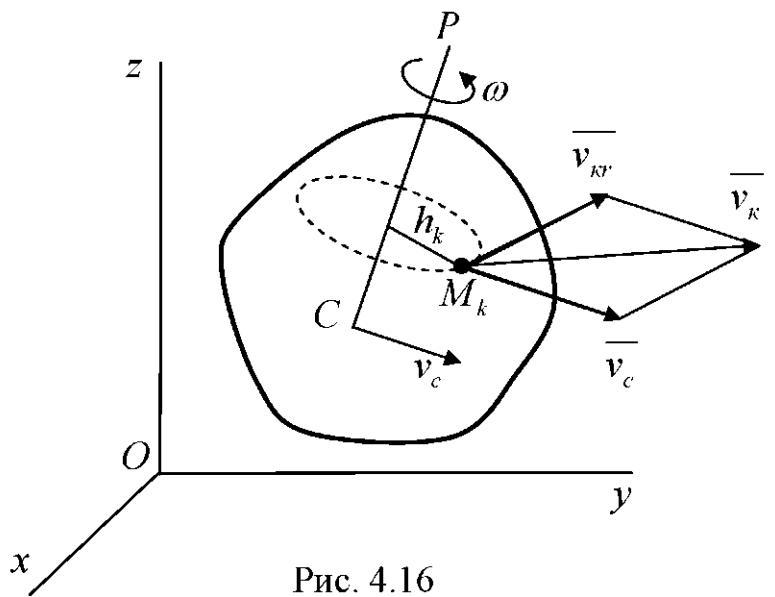


Рис. 4.16

$$\bar{v}_k = \bar{v}_c + \bar{v}_{kr}.$$

При этом по модулю $v_{kr} = \omega h_k$, где h_k – расстояние точки от оси CP , а ω – абсолютная угловая скорость вращения тела вокруг этой оси.

Отсюда следует, что

$$\bar{v}_k^2 = v_k^2 = (\bar{v}_c + \bar{v}_{kr})^2 = v_c^2 + v_{kr}^2 + 2\bar{v}_c \cdot \bar{v}_{kr}.$$

Подставляя это значение в равенство (4.31), после очевидных преобразований, получаем

$$T = \frac{v_c^2}{2} \sum m_k + \sum \frac{m_k v_{kr}^2}{2} + \bar{v}_c \cdot \sum m_k \bar{v}_{kr},$$

$$\text{но } \bar{v}_c \cdot \sum m_k \bar{v}_{kr} = \bar{v}_c \cdot \sum m_k \frac{d\bar{r}_k}{dt} = \bar{v}_c \cdot \frac{d}{dt} \sum m_k \bar{r}_k = 0,$$

так как $\sum m_k \bar{r}_k = 0$.

Учитывая, что $\sum m_k = M$ – масса системы, и обозначая T_c^r второе слагаемое, имеем

$$T = \frac{Mv_c^2}{2} + T_c^r, \quad (4.35)$$

где $T_c^r = \sum \frac{m_k v_{kr}^2}{2}$ является кинетической энергией относительного движения тела относительно системы координат, движущейся поступательно вместе с ее центром масс, или кинетической энергией тела относительно центра масс.

Формула (4.35) справедлива не только для твердого тела, но и в случае изменяемой механической системы и выражает так называемую теорему Кёнига: кинетическая энергия системы в абсолютном движении складывается из кинетической энергии центра масс, если в нем сосредоточить всю массу системы, и кинетической энергии системы относительно центра масс.

4. Плоскопараллельное движение. При плоском движении твердого тела кинетическую энергию можно вычислить по теореме Кёнига. Так как в этом случае относительное движение относительно центра масс является вращением вокруг центра масс с угловой скоростью ω , то

$$T_C^r = J_{C\xi} \frac{\omega^2}{2},$$

где $J_{C\xi}$ – момент инерции относительно оси $C\xi$, проходящей через центр масс тела перпендикулярно плоскости движения. Следовательно, на основании (4.35) для плоского движения твердого тела имеем

$$T = \frac{Mv_C^2}{2} + \frac{J_{C\xi}\omega^2}{2}. \quad (4.36)$$

Таким образом, при плоском движении тела кинетическая энергия складывается из кинетической энергии поступательного движения тела вместе с центром масс и кинетической энергии от вращения вокруг оси, проходящей через центр масс, перпендикулярной плоскости движения.

14. Теорема об изменении кинетической энергии системы

Если к точкам механической системы приложить все внешние и внутренние силы, то для каждой точки ее будет справедлива формула (2.45)

$$d\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k + \bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k,$$

где $\bar{F}_k^e \cdot d\bar{r}_k = dA_k^e$, $\bar{F}_k^i \cdot d\bar{r}_k = dA_k^i$ – элементарные работы действующих на k -ую точку внешних и внутренних сил. Составляя такие уравнения для всех n точек системы, складывая их почленно и вынося знак дифференциала за знак суммы, получим

$$d\sum\left(\frac{m_k v_k^2}{2}\right) = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i,$$

или

$$dT = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i. \quad (4.37)$$

Формула (4.37) выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в дифференциальной форме: дифференциал от кинетической энергии системы равен сумме элементарных работ всех внешних и внутренних сил, действующих на систему.

Проинтегрировав обе части равенства (4.37) в пределах, соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, где кинетическая энергия T_0 , в положение, где значение кинетической энергии становится равным T_1 , и изменения порядок суммирования и интегрирования местами, имеем

$$T_1 - T_0 = \sum \int_{M_{k0}}^{M_{k1}} dA_k^e + \sum \int_{M_{k0}}^{M_{k1}} dA_k^i,$$

или

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i. \quad (4.38)$$

Полученное уравнение выражает теорему об изменении кинетической энергии системы в конечной или интегральной формах: изменение кинетической энергии системы при перемещении ее из одного положения в другое равно сумме работ на этом перемещении всех приложенных к системе внешних и внутренних сил.

Как видно из (4.37) и (4.38), в отличие от предыдущих общих теорем динамики системы в них входят внутренние силы. Таким образом, непосредственно внутренние силы, не изменяют, ни количество движения системы, ни ее кинетический момент, но могут изменить ее кинетическую энергию.

Рассмотрим два важных частных случая.

1. Неизменяемая система (абсолютно твердое тело). Для такой системы, что легко доказать, сумма работ всех внутренних сил системы равна нулю:

$$\sum A_k^i = 0,$$

и уравнения (4.37) и (4.38) принимают вид

$$dT = \sum dA_k^e, \quad T_1 - T_0 = \sum A_k^e. \quad (4.39)$$

2. Система с идеальными связями. Рассмотрим систему со стационарными связями. Разделим все действующие на неё внешние и внутренние силы по

принципу активных сил и сил реакций наложенных на систему связей. Тогда уравнение (4.37) можно представить в виде:

$$dT = \sum dA_k^a + \sum dA_k^r,$$

где dA_k^a – элементарная работа действующих на k -ую точку системы внешних и внутренних активных сил, а dA_k^r – элементарная работа сил реакций наложенных на ту же точку внешних и внутренних связей.

Видим, что изменение кинетической энергии системы зависит от работы и активных сил и реакций связей. Но для идеальных связей выполняется следующее условие $\sum dA_k^r = 0$. Следовательно, для механической системы с идеальными стационарными связями будем, очевидно, иметь

$$dT = \sum dA_k^a, \quad T_1 - T_0 = \sum A_k^a. \quad (4.40)$$

Предыдущие теоремы позволяли исключить из уравнений движения внутренние силы, но все внешние силы, в том числе и наперед неизвестные реакции внешних связей, в уравнениях сохранялись. Теорема об изменении кинетической энергии позволяет исключить из уравнений движения неизвестные реакции идеальных связей.

15. Закон сохранения механической энергии

Теорему об изменении кинетической энергии системы запишем в виде:

$$dT = \sum dA_k,$$

где $\sum dA_k = \sum dA_k^e + \sum dA_k^i$.

Если все внешние и внутренние силы, действующие на систему, являются потенциальными, то $\sum dA_k = dU = -d\Pi$.

Поэтому

$$dT = -d\Pi.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства в пределах соответствующих перемещению системы из некоторого начального положения, в котором кинетическая и потенциальная энергии имеют значения T_0 и Π_0 , в некоторое конечное положение, в котором кинетическая и потенциальная энергия системы равны T_1 и Π_1 , получим

$$T_1 - T_0 = -\Pi_1 + \Pi_0,$$

или

$$T_1 + \Pi_1 = T_0 + \Pi_0 = \text{const.}$$

Сумма кинетической и потенциальной энергий механической системы называется ее механической энергией и обозначается E ; следовательно,

$$E = T + \Pi = \text{const.} \quad (4.41)$$

Формула (4.41) выражает закон сохранения механической энергии системы: при движении системы в потенциальном силовом поле внешних и внутренних сил её механическая энергия останется неизменной.

Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называются консервативными.

При наличии сил сопротивления движению часть механической энергии переходит в другие виды энергии (тепловую, электрическую, химическую и т.д.), происходит, как говорят, диссипация, т.е. рассеивание механической энергии, и поэтому силы сопротивления называют диссипативными силами.

Полная энергия всех видов (механическая, тепловая, химическая и т.д.) не изменяется при движении точки или системы в любом силовом поле. При этом происходит только преобразование одного вида энергии в другой.

16. Примеры применения теоремы об изменении кинетической энергии системы

Пример 1 [6]. Двухступенчатый барабан 1 массой $m_1 = 15$ кг связан с неподвижной точкой A посредством нерастяжимой нити, намотанную на малую ступень барабана радиуса r . Большая ступень барабана радиуса $R = 2r$ обмотана двумя нерастяжимыми нитями; к одной из них подвешен груз 2 массой $m_2 = 15$ кг, а к концу другой приложена сила $F = 196$ Н.

Найти скорость и ускорение груза 2 после того, как он опустится на величину $s = 1$ м. Радиус инерции барабана относительно оси, проходящей через его центр C , равен $\rho = \sqrt{Rr}$; нити остаются в процессе движения вертикальными; движение начинается из состояния покоя; массой нитей пренебречь.

Решение. Для решения воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии в дифференциальной форме:

$$\frac{dT}{dt} = \sum N_k^e + \sum N_k^i,$$

где N_k^e и N_k^i – мощности внешних и внутренних сил системы.

Так как система состоит из двух твердых тел, соединенных нерастяжимыми нитями, весом которых пренебрегают, то сумма мощностей внутренних сил равна нулю: $\sum N_k^i = 0$.

К системе приложены внешние силы: силы тяжести $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{F}$ и реакция нити \bar{T} (рис. 4.17). Система состоит из барабана 1, совершающего плоское движение, груза 2, движущегося поступательно, и поэтому её кинетическая энергия равна

$$T = T_1 + T_2 = \frac{m_1 v_C^2}{2} + \frac{J_C \omega^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}.$$

Так как точка P барабана является его мгновенным центром скоростей, то $\omega = v_C / r$. Кроме того, $v = v_2 = v_E = v_C = v_D / 3$, а момент инерции барабана $J_c = m_1 \rho^2 = m_1 Rr$, следовательно,

$$T = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_1 v^2 R}{2r} + \frac{m_2 v^2}{2} = \frac{v^2}{2} \left[m_1 \left(1 + \frac{R}{r} \right) + m_2 \right].$$

Определим сумму мощностей внешних сил:

$$\sum N_k^e = N_{\bar{G}_1} + N_{\bar{G}_2} + N_{\bar{F}} + N_{\bar{T}} = -G_1 v + G_2 v + F 3v = 3Fv,$$

мощность реакции \bar{T} равна нулю, так как эта сила приложена в мгновенном центре скоростей барабана точке P , мощности сил \bar{G}_1 и \bar{G}_2 равны по модулю, но противоположны по знаку.

Подставляя значения кинетической энергии и суммы мощностей в формулу теоремы, получим дифференциальное уравнение движения системы:

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{v^2}{2} (3m_1 + m_2) \right] = 3Fv,$$

или

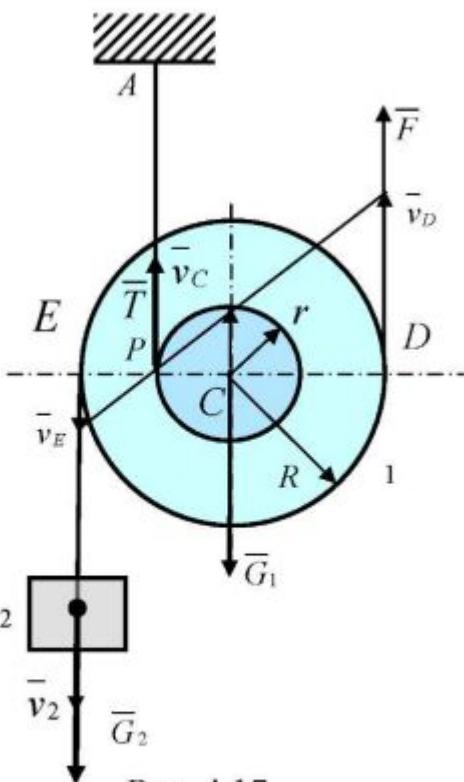


Рис. 4.17

$$v \frac{dv}{dt} \left(m_1 + \frac{m_2}{3} \right) = Fv, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{3F}{3m_1 + m_2}, \quad (a)$$

откуда

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{3F}{3m_1 + m_2} = \frac{3 \cdot 196}{3 \cdot 15 + 15} = 9,8 \frac{m}{c^2}.$$

Заменив переменную t на переменную s в уравнении (a), получим

$$v \frac{dv}{ds} = \frac{3F}{3m_1 + m_2}.$$

Интегрируя полученное уравнение в соответствующих пределах,

$$\int_0^v v dv = \frac{3F}{3m_1 + m_2} \int_0^s ds, \quad \frac{v^2}{2} = \frac{3FS}{3m_1 + m_2},$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{6FS}{3m_1 + m_2}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 196 \cdot 1}{3 \cdot 15 + 15}} = 4,43 \frac{m}{c}.$$

Пример 2 [5]. К барабану ворота радиуса r_1 и массы m_1 приложен постоянный вращающий момент M . К концу троса, намотанного на барабан, прикреплена ось С колеса массы m_2 . Колесо катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Какую угловую скорость приобретет барабан, сделав n оборотов? Барабан и колесо считать однородными круглыми цилиндрами. В начальный момент система находилась в покое. Массой троса и трением пренебречь.

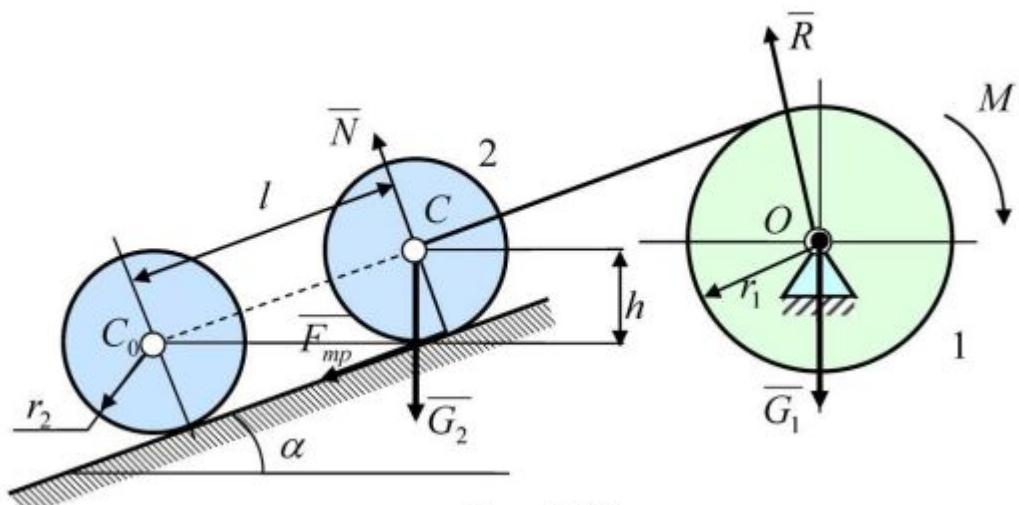


Рис. 4.18

Решение. Изобразим систему и действующие на неё внешние силы: $\bar{F}_{tp}, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{R}, \bar{N}$ и пару сил с моментом M (рис. 4.18).

Для решения задачи применим теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T_1 - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Так как система состоит из твердых тел, соединенных идеальными связями, то $\sum A_k^i = 0$. В начальном положении система неподвижна, следовательно, $T_0 = 0$. После n оборотов барабана он приобрел угловую скорость ω_1 и центр колеса, точка С будет иметь скорость $v_C = \omega_1 r_1$. Угловая скорость колеса $\omega_2 = \frac{v_C}{r_2} = \omega_1 \frac{r_1}{r_2}$, ибо точка контакта колеса с наклонной плоскостью является его мгновенным центром скоростей. Барабан вращается вокруг неподвижной оси O , а колесо совершает плоское движение и поэтому кинетическая энергия системы T после n оборотов барабана будет равна

$$T = T_1 + T_2 = \frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{m_2 v_c^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2}.$$

По условию задачи моменты инерции барабана и колеса равны соответственно $J_1 = \frac{m_1 r_1^2}{2}$ и $J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$, поэтому

$$T = \frac{m_1 r_1^2}{4} \omega_1^2 + \frac{m_2 r_2^2}{2} \omega_1^2 + \frac{m_2 r_1^2}{4} \omega_1^2 = \frac{\omega_1^2 r_1^2}{4} (m_1 + 3m_2).$$

При повороте барабана на угол $\varphi = 2\pi n$ центр колеса переместится вдоль наклонной плоскости на расстояние $l = \varphi r_1 = 2\pi n r_1$, т.е. поднимается на высоту $h = l \sin \alpha = 2\pi n r_1 \sin \alpha$. Определим работу внешних сил на этом конечном перемещении:

$$\sum A_k^e = A_M + A_{\bar{G}_2} = M\varphi - G_2 h = 2\pi n(M - m_2 g r_1 \sin \alpha).$$

Работы сил \bar{G}_1 и \bar{R} равны нулю, так как они приложены в неподвижной точке O . Работы сил \bar{N} и \bar{F}_{tp} так же равны нулю, так как они приложены в мгновенном центре скоростей колеса.

Подставим полученные значения T и $\sum A_k^e$ в формулу теоремы:

$$\frac{\omega_1^2 r_1^2}{4} (m_1 + 3m_2) = 2\pi n(M - m_2 g r_1 \sin \alpha),$$

и определим ω_1 :

$$\omega_1 = \frac{2}{r_1} \sqrt{2\pi n \frac{M - m_2 gr_1 \sin \alpha}{m_1 + 3m_2}}.$$

Пример 3. В начальном горизонтальном положении кривошипа OA кривошлино-ползунного механизма пружина BD жесткостью c не деформирована и угловая скорость кривошипа равна ω_0 (рис. 4.19). Механизм расположен в вертикальной плоскости, $OA = r$, $AB = l = \frac{5}{3}r$, массы кривошипа, шатуна и ползуна равны соответственно m_1, m_2, m_3 . Кривошип и шатун считать тонкими однородными стержнями. Пренебрегая трением, найти постоянный момент M , приложенный к кривошипу, если после поворота кривошипа на угол $\frac{\pi}{2}$ его угловая скорость увеличилась вдвое.

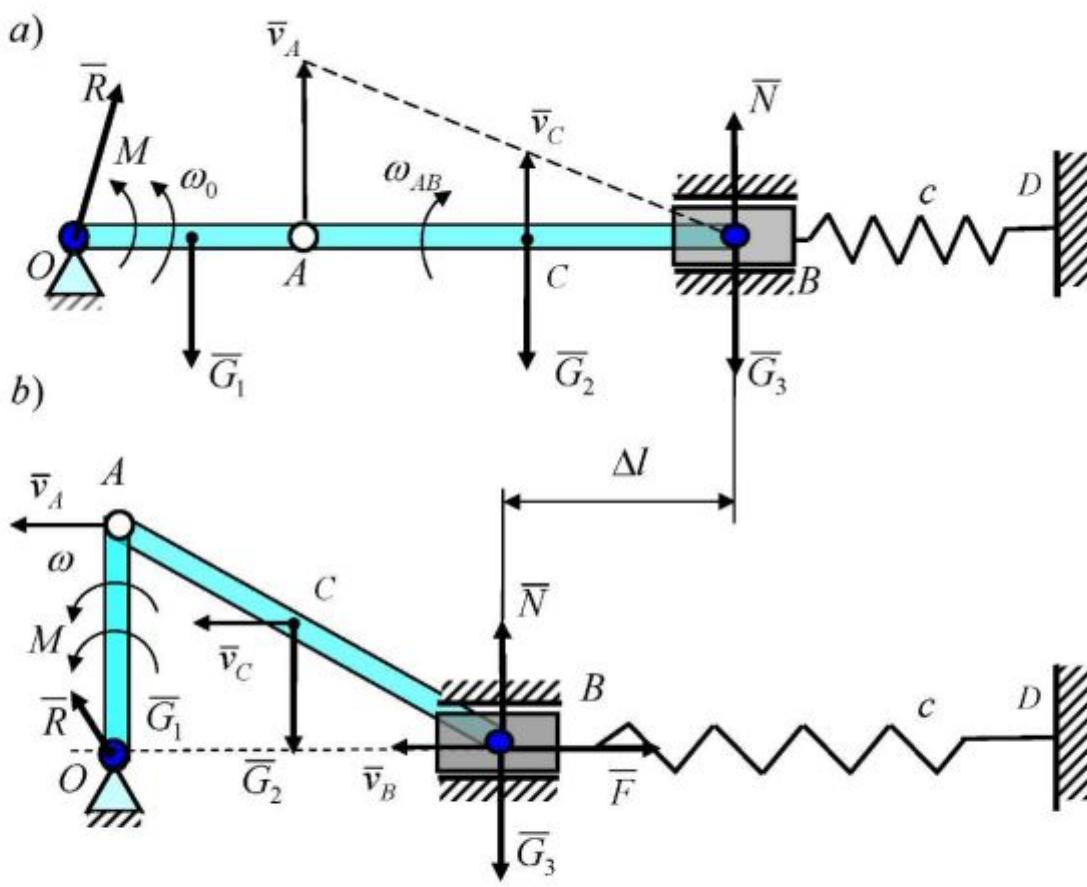


Рис. 4.19

Решение. Для решения применим теорему об изменении кинетической энергии системы в интегральной форме:

$$T_I - T_0 = \sum A_k^e + \sum A_k^i.$$

Так как система состоит из твердых тел, соединенных идеальными шарнирами (без трения), то $\sum A_k^i = 0$.

Изобразим механизм в начальном (рис. 4.19, а) и в конечном (рис. 4.19 б) положениях вместе с приложенными к нему внешними силами $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, \bar{R}, \bar{N}, \bar{F}$ и моментом M .

Вычислим кинетическую энергию системы в начальном и конечном положениях. Кривошип OA совершает вращательное движение, поэтому

$$T_1 = \frac{J_0 \omega_{OA}^2}{2} = \frac{1}{6} m_1 r^2 \omega_{OA}^2.$$

Шатун AB совершает плоское движение, поэтому

$$T_2 = \frac{m_2 v_c^2}{2} + \frac{J_c \omega_{AB}^2}{2} = \frac{m_2 v_c^2}{2} + \frac{1}{24} m_2 l^2 \omega_{AB}^2,$$

где v_c – скорость центра масс шатуна. Ползун B движется поступательно, следовательно,

$$T_3 = \frac{m_3 v_B^2}{2}.$$

В начальном положении механизма (рис. 4.19, а) точка B является мгновенным центром скоростей шатуна AB , значит $\omega_{AB} = \frac{v_A}{l} = \omega_0 \frac{r}{l}$, $v_c = \omega_{AB} \frac{l}{2} = \frac{\omega_0 r}{2}$, $v_B = 0$, а $v_A = \omega_0 r$, и, следовательно, кинетическая энергия системы в этом положении равна

$$T_0 = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{6} m_1 r^2 \omega_0^2 + \frac{1}{8} m_2 r^2 \omega_0^2 + \frac{1}{24} m_2 r^2 \omega_0^2 = \frac{r^2 \omega_0^2}{6} (m_1 + m_2).$$

В конечном положении механизма (рис. 4.19, б) шатун AB совершает мгновенно поступательное движение, поэтому

$$\omega_{AB} = 0, v_B = v_C = v_A = 2\omega_0 r,$$

следовательно,

$$T_I = \frac{m_1 r^2}{6} 4\omega_0^2 + \frac{m_2 r^2}{2} 4\omega_0^2 + \frac{m_3 r^2}{2} 4\omega_0^2 = \frac{2r^2}{3} \omega_0^2 (m_1 + 3m_2 + 3m_3).$$

При перемещении механизма из начального в конечное положение работу совершают момент M и силы $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{F}$. Остальные силы работы не совер-

шают, так как приложены или к неподвижной точке (сила \bar{R}), или перпендикулярны перемещениям точек их приложения (\bar{G}_3, \bar{N}). Работы сил тяжести \bar{G}_1 и \bar{G}_2 равны:

$$A_{G_1} = -m_1 g \frac{r}{2}, \quad A_{G_2} = -m_2 g \frac{r}{2}.$$

Работа упругой силы \bar{F} определяется формулой $A_F = \frac{c}{2}(\Delta l_0^2 - \Delta l_1^2)$, где

Δl_0 и Δl_1 – деформации пружины в начальном и конечном положениях.

По условию $\Delta l_0 = 0$, а $\Delta l_1 = (r+l) - \sqrt{l^2 - r^2} = \frac{4}{3}r$, следовательно,

$$A_F = -\frac{c}{2} \frac{16}{9} r^2 = -\frac{8}{9} c r^2.$$

Работа постоянного момента равна $A_M = M\varphi = M \frac{\pi}{2}$.

Окончательно получим

$$\sum A_k^e = M \frac{\pi}{2} - \frac{r}{2} g (m_1 + m_2) - \frac{8}{9} c r^2.$$

Подставим полученные значения T_1, T_0 и $\sum A_k^e$ в формулу теоремы:

$$\frac{2r^2}{3} \omega_0^2 (m_1 + 3m_2 + 3m_3) - \frac{r^2}{6} \omega_0^2 (m_1 + m_2) = M \frac{\pi}{2} - \frac{r}{2} g (m_1 + m_2) - \frac{8}{9} c r^2,$$

вычисляем искомый момент:

$$M = \frac{2}{\pi} \left[\frac{\omega_0^2 r^2}{6} (3m_1 + 11m_2 + 12m_3) + \frac{rg}{2} (m_1 + m_2) + \frac{8}{9} c r^2 \right].$$

Пример 4. По горизонтальной плоскости AB катится без скольжения диск радиуса r с постоянной скоростью его центра масс v_c и переходит на наклонную плоскость BD , образующую с горизонтом угол α . Какое наибольшее значение можно придать углу α , чтобы при переходе на наклонную плоскость диск не оторвался от опоры (рис. 4.20).

Решение. Для того чтобы не произошло отрыва диска при огибании точки B , необходимо, чтобы нормальная реакция в точке B все время оставалась больше нуля. Наименьшее значение ее получится в тот момент, когда угловая скорость

ω диска будет наибольшей, т.е. в момент начала качения по плоскости $B\bar{D}$. Составляя уравнение движения центра масс диска в проекции на нормаль BC_2 и беря предельный случай, когда реакция плоскости равна нулю, получаем:

$$M\omega^2 r = Mg \cos \alpha.$$

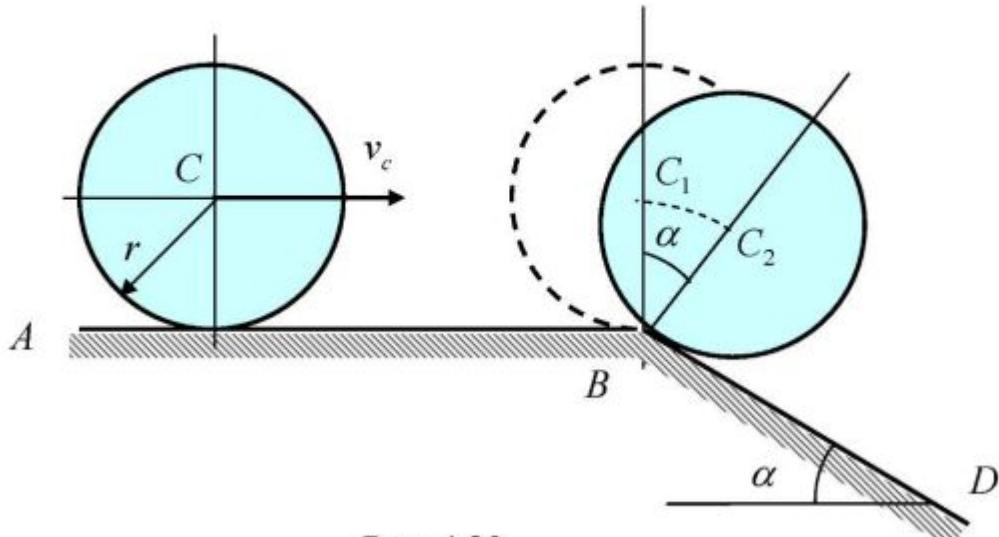


Рис. 4.20

Угловую скорость ω диска найдем по теореме об изменении кинетической энергии системы, рассматривая вращение диска вокруг точки B

$$\frac{J_B}{2}(\omega^2 - \omega_0^2) = Mgr(1 - \cos \alpha),$$

где $J_B = \frac{3}{2}Mr^2$, а $\omega_0 = \frac{v_c}{r}$.

Таким образом, наибольшее значение угла α определяется из уравнения

$$\frac{3}{2}Mr^2 \left(\frac{g \cos \alpha}{r} - \frac{v_c^2}{r^2} \right) = Mgr(1 - \cos \alpha),$$

откуда

$$\cos \alpha = \frac{4 + 3Mv_c^2}{4 + 3Mgr}.$$

Если $v_c = \sqrt{gr}$, то $\alpha = 0$; диск сделает скачок при любом отличном от нуля угле α , после чего центр диска будет двигаться по параболе.

ГЛАВА V. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА

1. Принцип Даламбера для материальной точки

Принцип Даламбера является одним из основных принципов механики. Рассмотрим сначала случай свободной материальной точки. Пусть на свободную материальную точку действует сила \bar{F} . Тогда основное уравнение динамики запишется в виде:

$$m \bar{a} = \bar{F},$$

где $\bar{F} = \sum \bar{F}_k$.

Перенесем член $m \bar{a}$ из левой части уравнения в правую

$$0 = \bar{F} + (-m \bar{a}) \text{ или } \bar{F} + \bar{\Phi} = 0, \quad (5.1)$$

где $\bar{\Phi} = -m \bar{a}$ – сила инерции точки.

Из уравнения (5.1) следует, что сумма векторов \bar{F} и $\bar{\Phi}$ равна нулю. Это означает, что в каждый момент времени силы, приложенные к точке, могут быть уравновешены добавлением к ним силы инерции. Это и есть принцип Даламбера для свободной материальной точки.

Для несвободной материальной точки принцип Даламбера запишется в виде:

$$\bar{F} + \bar{R} + \bar{\Phi} = 0, \quad (5.2)$$

где $\bar{F} = \sum \bar{F}_k$ – равнодействующая активных сил;

$\bar{R} = \sum \bar{R}_k$ – равнодействующая реакций связей, наложенных на точку;

$\bar{\Phi} = -m \bar{a}$ – сила инерции точки.

Система сил $(\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}) \sim 0$, так как эти силы образуют систему сходящихся сил и удовлетворяют условию (5.2).

Следовательно, в каждый момент времени активные силы и реакции связей вместе с силой инерции точки образуют уравновешенную систему сил. Это и есть принцип Даламбера для несвободной материальной точки.

2. Принцип Даламбера для механической системы

Рассмотрим механическую систему n материальных точек. Применим к каждой точке системы принцип Даламбера

$$\bar{F}_k + \bar{R}_k + \bar{\Phi}_k = 0 \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (5.3)$$

где \bar{F}_k – равнодействующая активных сил, приложенных к k -ой точке системы; \bar{R}_k – равнодействующая реакций связей, наложенных на k -ую точку системы; $\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k$ – сила инерции k -ой точки системы.

Условия (5.3) выражают принцип Даламбера для системы: в любой момент времени действующие на каждую точку системы активные силы и реакции связей вместе с силой инерции образуют уравновешенную систему сил.

Следовательно, сумма всех этих сил и сумма моментов этих сил относительно любой точки равны нулю, т.е.

$$\left. \begin{aligned} \sum F_k + \sum R_k + \sum \Phi_k &= 0; \\ \sum \bar{m}_0(\bar{F}_k) + \sum \bar{m}_0(\bar{R}_k) + \sum \bar{m}_0(\bar{\Phi}_k) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Величины $\sum \bar{\Phi}_k = \bar{\Phi}$, $\sum \bar{m}_0(\bar{\Phi}_k) = \bar{M}_0^{\Phi}$ представляют собой главный вектор и главный момент сил инерций относительно центра O .

Чтобы воспользоваться уравнениями (5.4), надо знать выражение главного вектора и главного момента сил инерции.

3. Главный вектор и главный момент сил инерции

Главный вектор всех сил инерции можно представить в виде:

$$\Phi = \sum \Phi_k = -\sum m_k a_k = -\sum m_k \frac{d v_k}{dt} = -\frac{d}{dt} \sum m_k v_k = -\frac{d}{dt} (M v_c) = -\frac{d Q}{dt}.$$

Следовательно,

$$\bar{\Phi} = -\frac{d \bar{Q}}{dt}, \quad (5.5)$$

где $\bar{Q} = M \bar{v}_c$ – количество движения системы.

Таким образом, главный вектор сил инерции точек материальной системы равен взятой со знаком минус производной по времени от количества движения системы.

Главный момент всех сил инерции относительно любого центра O равен

$$\begin{aligned} M_0^\Phi &= \sum m_0(\Phi_k) = \sum r_k \times \Phi_k = -\sum r_k \times m_k a_k = -\sum r_k \times m_k \frac{d v_k}{dt} = \\ &= -\frac{d}{dt} \sum r_k \times m_k v_k = -\frac{d}{dt} \sum m_0(m_k v_k) = -\frac{d}{dt} \sum I_{k0} = -\frac{d L_0}{dt}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{M}_0^\Phi = -\frac{d \overline{L}_0}{dt}, \quad (5.6)$$

где $\overline{L}_0 = \sum \overline{I}_{k0} = \sum \overline{m}_0(m_k \overline{v}_k)$ – кинетический момент системы относительно центра O .

Таким образом, главный момент всех сил инерции относительно некоторого центра O равен со знаком минус производной от кинетического момента системы относительно того же центра.

Перейдем к вычислению главного вектора и главного момента сил инерции точек твердого тела в разных случаях его движения.

Главный вектор сил инерции точек твердого тела вне зависимости от вида движения может быть определен по формуле

$$\overline{\Phi} = -M \overline{a}_c, \quad (5.7)$$

где $\overline{a}_c = \frac{d \overline{v}_c}{dt}$ – ускорение центра масс, M – масса тела.

Перейдем к вычислению главного момента сил инерции точек твердого тела.

Рассмотрим сначала наиболее общий случай, когда тело совершает свободное движение. Выбирая за полюс центр масс C тела, на основании (5.6), имеем

$$\overline{M}_c^\Phi = -\frac{d \overline{L}_c}{dt}, \quad (5.8)$$

где \overline{L}_c – кинетический момент тела относительно центра масс, определенный в подвижной системе координат $Cxyz$ (рис. 5.1).

Из курса кинематики известно, что если какой-либо вектор \overline{a} задан в подвижной системе координат, то абсолютная производная от этого вектора равна

$$\frac{d\bar{\boldsymbol{a}}}{dt} = \frac{d\tilde{\boldsymbol{a}}}{dt} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\boldsymbol{a}}, \quad (5.9)$$

где $\frac{d\tilde{\boldsymbol{a}}}{dt}$ – относительная производная; $\bar{\boldsymbol{\omega}}$ – угловая скорость подвижной системы координат вместе с телом.

Тогда в соответствии с формулой (5.9) можно записать

$$\bar{M}_C^\Phi = -\frac{d\tilde{L}_C}{dt} - \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{L}_C. \quad (5.10)$$

Преобразуем выражение (5.10), имея в виду, что

$$\frac{d\tilde{L}_C}{dt} = \bar{i} \frac{dL_{Cx}}{dt} + \bar{j} \frac{dL_{Cy}}{dt} + \bar{k} \frac{dL_{Cz}}{dt}; \quad (5.11)$$

$$\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{L}_C = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ L_{Cx} & L_{Cy} & L_{Cz} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}(\omega_y L_{Cz} - \omega_z L_{Cy}) + \bar{j}(\omega_z L_{Cx} - \omega_x L_{Cz}) + \bar{k}(\omega_x L_{Cy} - \omega_y L_{Cx}); \quad (5.12)$$

$$\bar{M}_C^\Phi = \bar{i} M_{Cx}^\Phi + \bar{j} M_{Cy}^\Phi + \bar{k} M_{Cz}^\Phi. \quad (5.13)$$

После подстановки (5.11)-(5.13) в уравнение (5.10) имеем

$$\left. \begin{aligned} M_{Cx}^\Phi &= -\frac{dL_{Cx}}{dt} - (\omega_y L_{Cz} - \omega_z L_{Cy}), \\ M_{Cy}^\Phi &= -\frac{dL_{Cy}}{dt} - (\omega_z L_{Cx} - \omega_x L_{Cz}), \\ M_{Cz}^\Phi &= -\frac{dL_{Cz}}{dt} - (\omega_x L_{Cy} - \omega_y L_{Cx}). \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

Далее имея в виду, что

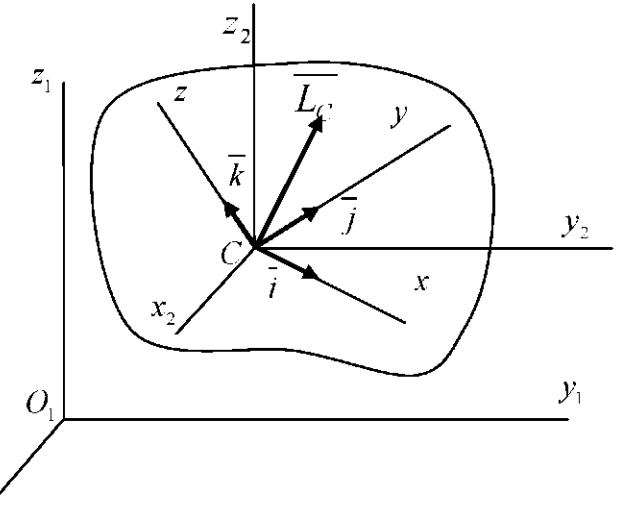


Рис. 5.1

O_1

x_1

y_2

y_1

z_2

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

j

k

L_C

x_2

y_2

z_2

x_1

y_1

z_1

C

i

$$\left. \begin{aligned} L_{Cx} &= J_x \omega_x - J_{xy} \omega_y - J_{xz} \omega_z; \\ L_{Cy} &= -J_{yx} \omega_x + J_y \omega_y - J_{yz} \omega_z; \\ L_{Cz} &= -J_{zx} \omega_x - J_{zy} \omega_y + J_z \omega_z, \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

выражение (5.14) перепишется в виде

$$\left. \begin{aligned} M_{Cx}^\phi &= -J_x \varepsilon_x + J_{xy} (\varepsilon_y - \omega_x \omega_z) + J_{xz} (\varepsilon_z + \omega_x \omega_y) - \\ &- J_{yz} (\omega_z^2 - \omega_y^2) - (J_z - J_y) \omega_y \omega_z; \\ M_{Cy}^\phi &= -J_y \varepsilon_y + J_{yx} (\varepsilon_x + \omega_y \omega_z) + J_{yz} (\varepsilon_z - \omega_y \omega_x) - \\ &- J_{xz} (\omega_x^2 - \omega_z^2) - (J_x - J_z) \omega_x \omega_z; \\ M_{Cz}^\phi &= -J_z \varepsilon_z + J_{zx} (\varepsilon_x - \omega_y \omega_z) + J_{zy} (\varepsilon_y + \omega_x \omega_z) - \\ &- J_{xy} (\omega_y^2 - \omega_x^2) - (J_y - J_x) \omega_x \omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

По этим формулам можно вычислить главный момент всех сил инерции точек твердого тела при свободном движении. Если тело совершает сферическое движение, то за полюс необходимо выбрать неподвижную точку.

Случай плоского движения твердого тела, имеющего плоскость симметрии

Если ось z направить перпендикулярно плоскости симметрии, совпадающей с плоскостью движения, то

$$J_{xz} = J_{yz} = 0, \quad \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0.$$

Следовательно, из формул (5.16) получим

$$M_{Cx}^\phi = 0, \quad M_{Cy}^\phi = 0, \quad M_{Cz}^\phi = -J_z \varepsilon_z. \quad (5.17)$$

Случай вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Если тело вращается вокруг неподвижной оси, и ось z совместить с осью вращения, а оси x и y жестко связать с вращающимся телом, то окажется, что

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0, \quad \omega_x = \omega_y = 0.$$

Следовательно, из формул (5.16) находим

$$M_x^\phi = J_{xz} \varepsilon_z - J_{yz} \omega_z^2, \quad M_y^\phi = J_{yz} \varepsilon_z + J_{xz} \omega_z^2, \quad M_z^\phi = -J_z \varepsilon_z. \quad \left. \right\} \quad (5.18)$$

4. Динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела

Пусть твердое тело под дей-

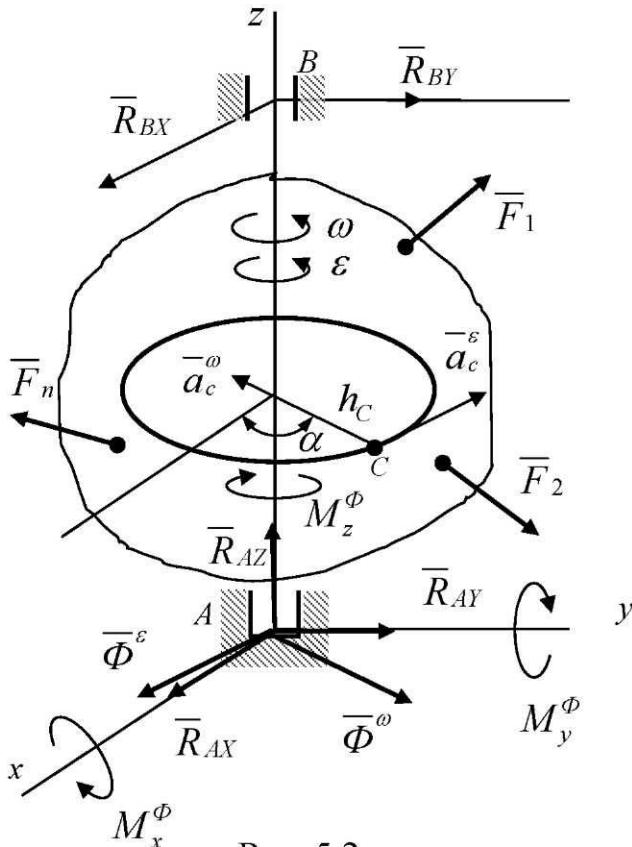


Рис. 5.2

ствием активных сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n$ совершают неравномерное вращение вокруг оси, закрепленной в подшипниках A и B (рис. 5.2).

Координатные оси $Axyz$ проведем так, чтобы ось z была совмещена с осью вращения тела, а оси x и y скрепим с вращающимся телом. Будем полагать, что нам известны масса m тела, его осевые и центробежные моменты инерции: $J_x, J_y, J_z, J_{xy}, J_{xz}, J_{zy}$.

Теперь, составляя согласно принципу Даламбера уравнения (5.4) в проекциях на координатные

оси $Axyz$, и, имея в виду (5.7) и (5.18), а также, что $h_c \sin \alpha = y_c$, $h_c \cos \alpha = x_c$, находим

$$\left. \begin{aligned} \sum F_{kx} + R_{Ax} + R_{Bx} + my_c \varepsilon + mx_c \omega^2 &= 0; \\ \sum F_{ky} + R_{Ay} + R_{By} - mx_c \varepsilon + my_c \omega^2 &= 0; \\ \sum F_{ky} + R_{Az} &= 0; \\ \sum m_x (\bar{F}_k) - R_{By} b + J_{xz} \varepsilon - J_{yz} \omega^2 &= 0; \\ \sum m_y (\bar{F}_k) + R_{Bx} b + J_{yz} \varepsilon + J_{xz} \omega^2 &= 0; \\ \sum m_z (\bar{F}_k) - J_z \varepsilon &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

где $b = AB$ – расстояние между подшипниками A и B .

Решая систему из шести уравнений, можно определить неизвестные реакции подшипников A и B и угловое ускорение ε , а следовательно, и угловую скорость ω .

Разложим полные реакции \bar{R}_A и \bar{R}_B на статические и динамические составляющие:

$$\bar{R}_A = \bar{R}_A^{cm} + \bar{R}_A^\delta; \quad \bar{R}_B = \bar{R}_B^{cm} + \bar{R}_B^\delta. \quad (5.20)$$

Для определения статических составляющих реакций \bar{R}_A и \bar{R}_B достаточно приравнять нулю в уравнениях (5.19) угловую скорость и угловое ускорение, т.е. $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$.

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \sum F_{kx} + R_{Ax}^{cm} + R_{Bx}^{cm} = 0; \\ \sum F_{ky} + R_{Ay}^{cm} + R_{By}^{cm} = 0; \\ \sum F_{kz} + R_{Az}^{cm} = 0; \\ \sum m_x(\bar{F}_k) - R_{By}^{cm}b = 0; \\ \sum m_y(\bar{F}_k) + R_{Bx}^{cm}b = 0. \end{array} \right\} \quad (5.21)$$

Уравнения для определения динамических составляющих реакций \bar{R}_A и \bar{R}_B найдем из уравнений (5.19), если учтем (5.20) и (5.21). В результате получим

$$\left. \begin{array}{l} R_{Ax}^\delta + R_{Bx}^\delta + my_c\varepsilon + mx_c\omega^2 = 0; \\ R_{Ay}^\delta + R_{By}^\delta - mx_c\varepsilon + my_c\omega^2 = 0; \\ -R_{By}^\delta b + J_{xz}\varepsilon - J_{yz}\omega^2 = 0; \\ R_{Bx}^\delta b + J_{yz}\varepsilon + J_{xz}\omega^2 = 0. \end{array} \right\} \quad (5.22)$$

Как видно из уравнений (5.22), динамические реакции зависят не только от ω и ε , но и от распределения масс тела по отношению к оси вращения, т.е. от центробежных моментов инерции и расположения центра масс. Для того, чтобы динамические реакции R_A^δ и R_B^δ были равны нулю, необходимо выполнение следующих условий:

$$x_c = y_c = 0; \quad (5.23)$$

$$J_{xz} = J_{yz} = 0. \quad (5.24)$$

Случай обращения в нуль динамических реакций называется динамической уравновешенностью.

Условия (5.23) и (5.24) означают, что центр масс тела должен находиться на оси вращения, а ось вращения должна быть главной центральной осью инерции тела. Таким образом, динамические реакции, действующие на ось вращающегося тела, будут равны статическим, если ось вращения является одной из главных центральных осей инерции тела.

5. Примеры применения принципа Даламбера

Пример 1. Пластина падает по вертикали с ускорением $a = 5 \text{ м/с}^2$. На ней помещается груз массой $m = 10 \text{ кг}$. Какое давление оказывает он на пластину во время движения?

Решение. На основании принципа Даламбера составим уравнение условного равновесия груза

$$m\bar{g} + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0,$$

где \bar{g} – ускорение свободного падения, \bar{N} – реакция пластины,

$\bar{\Phi} = -m\bar{a}$ – сила инерции груза.

Если ось z совместить с траекторией движения груза, то в проекции на эту ось будем иметь

$$mg - N - \Phi = 0 \quad \text{или} \quad mg - N - ma = 0,$$

откуда

$$N = mg - ma = m(g - a) = 48,1 \text{ Н.}$$

Давление на пластину, согласно третьему закону динамики, будет равно

$$N^1 = -N,$$

Следовательно,

$$N^1 = N = 48,1 \text{ Н.}$$

Пример 2. С каким ускорением \bar{a} надо двигать клин 1 по горизонтальной направляющей, чтобы груз 2 не скользил по наклонной поверхности клина (рис. 5.3).

Решение. Применим принцип Даламбера, составим уравнение условного равновесия груза

$$m\bar{g} + \bar{N} + \bar{\Phi} = 0, \quad (\text{a})$$

где \bar{N} – нормальная реакция, $\bar{\Phi}$ – сила инерции груза.

В проекциях на оси координат x и y уравнение (а) запишется в виде:

$$\left. \begin{array}{l} N \sin \alpha - ma = 0; \\ N \cos \alpha - mg = 0. \end{array} \right\} \quad (б)$$

Решая совместно уравнения (б), находим

$$a = gtg\alpha.$$

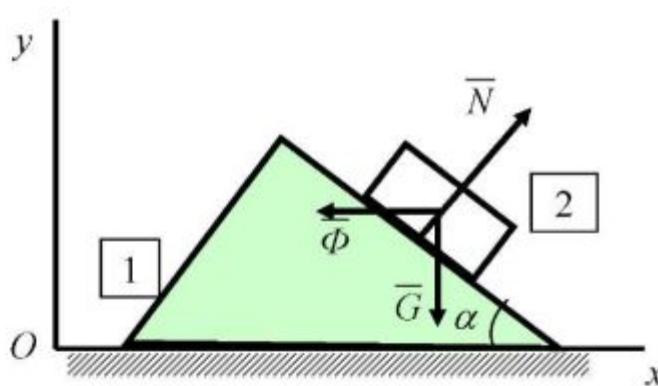


Рис. 5.3

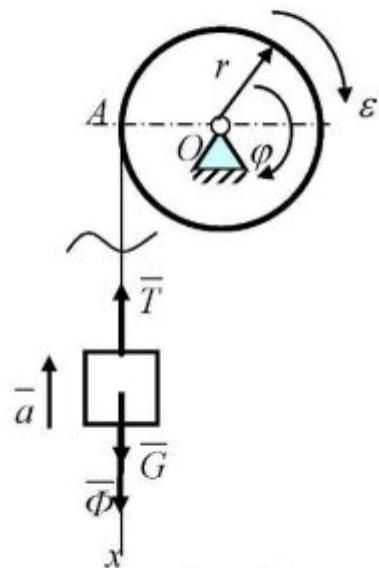


Рис. 5.4

Пример 3. Груз массой $m = 10$ кг подвешен на нити, которая наматывается на барабан, вращающийся согласно уравнению $\varphi = t + t^2$. Определить натяжение нити, если радиус $r = 0,5$ м (рис. 5.4).

Решение. На основании принципа Даламбера запишем уравнение условного равновесия груза

$$m \bar{g} + \bar{T} + \bar{\Phi} = 0, \quad (а)$$

где T – реакция нити, $\bar{\Phi}$ – сила инерции груза.

В проекции на ось x уравнение (а) перепишем в виде:

$$m g - T + \Phi = 0, \quad (б)$$

$$\Phi = ma = m a_A^\varepsilon = m \ddot{r} = m \varphi r = 2mr.$$

Таким образом,

$$T = mg + 2mr = m(g + 2r).$$

Пример 4. Однородный стержень AB длиной l и массой m прикреплен шарнирно к вертикальному валу, вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω (рис. 5.5). Определить величину натяжения троса BD , удерживающей стержень AB под углом α к вертикали, если угол $\beta = 90^\circ$.

Решение. На основании принципа Даламбера присоединим к действующим на стержень AB силам $m\bar{g}$, \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} , \bar{T} центробежные силы инерции $d\bar{\Phi}$ элементов стержня (так как вращение равномерное, то вращательных сил инерции не будет). Проведем вдоль стержня ось $A\eta$ (рис. 5.6). Тогда величина центробежной силы инерции элемента стержня будет определяться выражением

$$d\Phi = \frac{m}{l} \omega^2 \eta \sin \alpha \, d\eta.$$

Равнодействующая силы инерции точек стержня будет равна

$$\Phi = \int d\Phi = \frac{m}{l} \omega^2 \sin \alpha \int_0^l \eta d\eta = m\omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha.$$

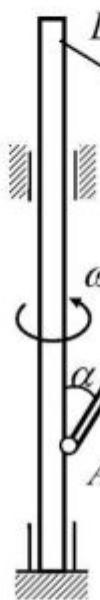


Рис. 5.5

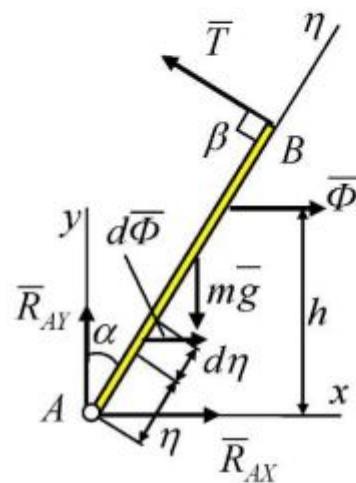


Рис. 5.6

Для определения точки приложения силы $\bar{\Phi}$ воспользуемся теоремой Вариньона: момент равнодействующей силы относительно любого центра равен сумме моментов составляющих сил системы относительно того же центра. Следовательно,

$$\Phi h = \int_0^l \eta \cos \alpha d\Phi = \frac{m}{l} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{l^3}{3},$$

где h – плечо равнодействующей;

$$\text{откуда } h = (2/3)l \cos \alpha.$$

Так как система сил $(m\bar{g}, \bar{R}_{Ax}, \bar{R}_{Ay}, \bar{T}, \bar{\Phi}) \sim 0$,

$$\text{то } \sum m_A(\bar{F}_k) = 0 \quad \text{или} \quad mg \frac{l}{2} \sin \alpha + \Phi h - Tl = 0,$$

откуда

$$T = \frac{m}{2} \left(g + \frac{2}{3} l \omega^2 \cos \alpha \right) \sin \alpha.$$

Пример 5. Однородный стержень AB длиной l и массой m концом A прикреплен шарниром к горизонтальному стержню CA длиной a , жестко связанному с вертикальным валом, вращающимся с постоянной угловой скоростью ω . Конец B стержня AB с пружиной DB , недеформированная длина которой a . Определить какова должна быть жесткость пружины c , чтобы стержень AB при данной угловой скорости отклонился от вертикали на угол α . Пружину считать расположенной горизонтально.

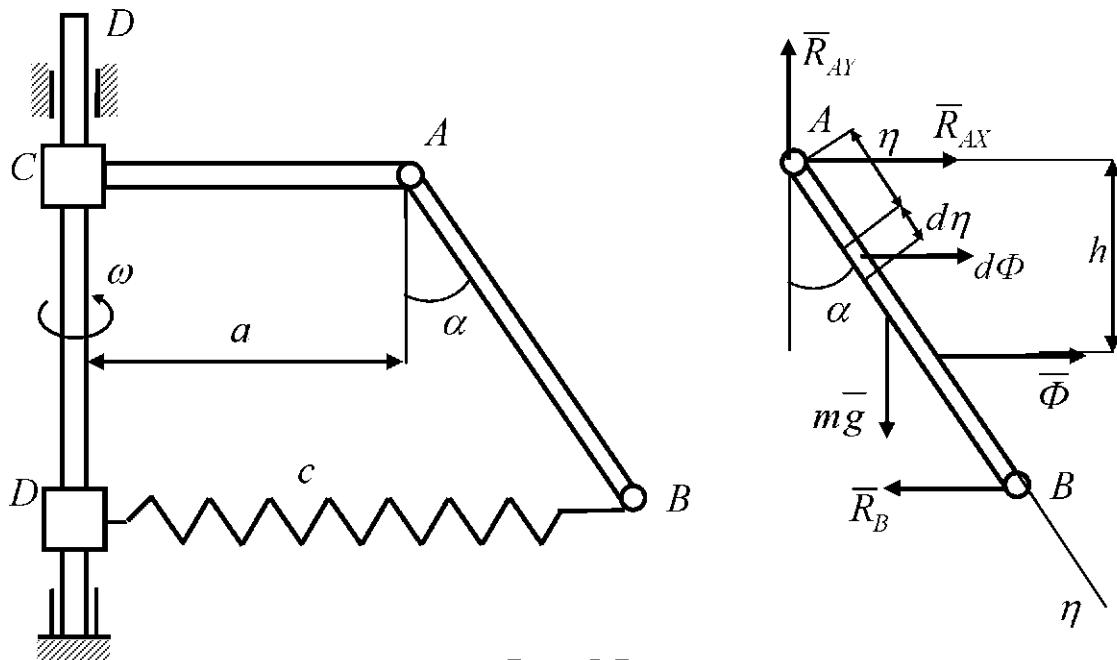


Рис. 5.7

Решение. На основании принципа Даламбера присоединим к действующим на стержень AB силам $m\bar{g}$, \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} , \bar{R}_B центробежные силы инерции $d\bar{\Phi}$ элементов стержня (вращение равномерное, поэтому вращательных сил инерции не будет).

По аналогии с предыдущим примером имеем

$$d\Phi = \frac{m}{l} \omega^2 (a + \eta \sin \alpha) d\eta;$$

$$\Phi = \int_0^l d\Phi = m\omega^2 \left(a + \frac{l}{2} \sin \alpha \right),$$

$$\Phi h = \int_0^l \eta \cos \alpha d\Phi = m\omega^2 \left(\frac{al}{2} + \frac{l^2 \sin \alpha}{3} \right) \cos \alpha = \frac{m\omega^2 l}{6} (3a + 2l \sin \alpha) \cos \alpha.$$

Так как система сил ($m\bar{g}$, \bar{R}_{Ax} , \bar{R}_{Ay} , \bar{R}_B , Φ) ~ 0 , то $\sum m_A(\bar{F}_k) = 0$

или

$$R_B l \cos \alpha + mg \frac{l}{2} \sin \alpha - \Phi h = 0,$$

откуда

$$R_B = \frac{\Phi h - mg \frac{l}{2} \sin \alpha}{l \cos \alpha} = \frac{m[\omega^2 (3a + 2l \sin \alpha) \cos \alpha - 3g \sin \alpha]}{6 \cos \alpha}. \quad (a)$$

С другой стороны, реакция пружины R_B равна

$$R_B = c\Delta = cl \sin \alpha, \quad (6)$$

где Δ – полная деформация пружины.

Сравнивая выражения (a) и (б), находим

$$c = \frac{m[\omega^2 (3a + 2l \sin \alpha) \cos \alpha - 3g \sin \alpha]}{3l \sin 2\alpha}.$$

Пример 6. Однородный диск массой m и радиусом r может вращаться вокруг горизонтальной оси z , перпендикулярной к плоскости диска и проходящей через точку O , так что $OC = 2/3r$ (рис. 5.8). Диск отпущен из наивысшего положения без начальной угловой скорости. Определить реакцию оси диска в тот момент, когда центр масс диска и его ось вращения лежат в одной горизонтальной плоскости.

Решение. Для применения принципа Даламбера необходимо к действующим на диск силам (сила тяжести и реакции опоры O) прикладывать силы инерции точек диска. Приведем силы инерции к точке O . При этом будем иметь

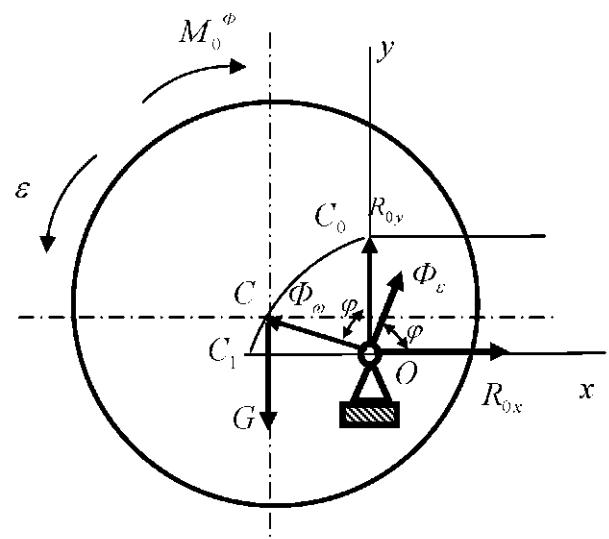


Рис. 5.8

в виду, что диск имеет плоскость симметрии и вращается вокруг оси z , перпендикулярной плоскости симметрии.

Следовательно, ось Oz является главной осью инерции диска для точки O , а значит

$$J_{xz} = J_{yz} = 0.$$

Главный вектор и главный момент сил инерции будут соответственно равны

$$\bar{\Phi} = -m\bar{a}_c, M_0^\Phi = M_{oz}^\Phi = -J_0\varepsilon.$$

Знаки минус указывают на то, что вектор Φ направлен противоположно вектору \bar{a}_c , а M_0^Φ направлен противоположно ε .

Разложим главный вектор сил инерции Φ на составляющие

$$\bar{\Phi} = \bar{\Phi}_e + \bar{\Phi}_\omega,$$

где $\bar{\Phi}_e = -m\bar{a}_c^e$, $\bar{\Phi}_\omega = -m\bar{a}_c^\omega$.

Модули $\bar{\Phi}_e$, $\bar{\Phi}_\omega$, M_0^Φ соответственно равны:

$$\Phi_e = m\bar{a}_c^e = \frac{2}{3}mr\varepsilon, \Phi_\omega = \frac{2}{3}mr\omega^2, M_0 = \frac{17}{18}mr^2\varepsilon. \quad \left. \right\} \quad (a)$$

На основании принципа Даламбера имеем

$$(\bar{R}_{0x}, \bar{R}_{0y}, \bar{\Phi}_\omega, \bar{\Phi}_e, \bar{G}, M_0^\Phi) \sim 0,$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} R_{0x} + \Phi_e \cos\varphi - \Phi_\omega \sin\varphi &= 0; \\ R_{0y} + \Phi_e \sin\varphi + \Phi_\omega \cos\varphi - mg &= 0; \\ \frac{2}{3}mgr \sin\varphi - M_0^\Phi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Так как Φ_ω , Φ_e , M_0^Φ являются функциями ε и ω , то вначале определим их из третьего уравнения (6)

$$\frac{17}{18}mr^2\varepsilon = \frac{2}{3}mgr \sin\varphi,$$

откуда

$$\varepsilon = \frac{12}{17} \frac{g}{r} \sin \varphi. \quad (\text{в})$$

Далее, имея в виду, что

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\omega d\omega}{d\varphi},$$

найдем

$$\int \omega d\omega = \frac{12}{17} \frac{g}{r} \int \sin \varphi d\varphi,$$

$$\frac{\omega^2}{2} = -\frac{12}{17} \frac{g}{r} \cos \varphi + B, \quad (\text{г})$$

где B – постоянная интегрирования

Подставляя начальные условия: при $t = 0, \varphi = 0, \omega = 0$ в уравнение (г), находим

$$B = \frac{12}{17} \frac{g}{r}.$$

Тогда

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{12}{17} \frac{g}{r} (1 - \cos \varphi),$$

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{6}{17} \frac{g}{r} (1 - \cos \varphi)}.$$

Из (а) и (б) находим

$$R_{0x} = \frac{2}{3} mr(\omega^2 \sin \varphi - \varepsilon \cos \varphi),$$

$$R_{0y} = m[g - \frac{2}{3} r(\varepsilon \sin \varphi + \omega^2 \cos \varphi)].$$

При $\varphi = 90^\circ \quad \varepsilon = \frac{12}{17} \frac{g}{r}, \quad \omega = 2 \sqrt{\frac{6}{17} \frac{g}{r}}, \quad \sin \varphi = 1, \quad \cos \varphi = 0.$

Следовательно,

$$R_{0x} = \frac{2}{3} mr\omega^2 = \frac{16}{17} mg, \quad R_{0y} = m(g - \frac{2}{3} r\varepsilon) = \frac{9}{17} mg.$$

ГЛАВА VI. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ И ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

1. Связи и их классификация

Условия, ограничивающие свободу перемещения точек механической системы, называются связями. Математически связи могут быть выражены уравнениями или неравенствами, в которые входят время, координаты точек системы и их производные по времени различных порядков.

Так, например, если материальная точка движется по некоторой неподвижной поверхности, то связью является эта поверхность. Координаты точки в каждый момент времени должны удовлетворять уравнению этой поверхности, т.е. уравнение этой поверхности и будет уравнением связи, наложенной на точку. Для одной точки уравнение связи в общем случае можно выразить в форме

$$f(x, y, z; \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}; \ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}; \dots; t) = 0. \quad (6.1)$$

Если ограничиться рассмотрением связей, в уравнения которых могут входить производные по времени от координат не выше первого порядка, то для механической системы, состоящей из n точек, уравнение связи записывается в виде:

$$f(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n; \dot{x}_1, \dot{y}_1, \dot{z}_1, \dots, \dot{x}_n, \dot{y}_n, \dot{z}_n; t) = 0. \quad (6.2)$$

В зависимости от вида данной функции связи бывают:

- 1) геометрические и дифференциальные (кинематические),
- 2) стационарные и нестационарные,
- 3) голономные и неголономные,
- 4) удерживающие и неудерживающие.

Если в уравнение связи (6.2) входят только координаты точек и не входят производные от координат, то связь называется геометрической. Уравнение геометрической связи для системы имеет форму

$$f(x_k, y_k, z_k, t) = 0, \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Дифференциальными называют связи, уравнения которых кроме координат точек системы содержат и производные от этих координат по времени и, может быть, время. Иногда дифференциальное уравнение связи можно представить как производную по времени от некоторой функции координат и, возможно, времени

$$\frac{d}{dt} \varphi(x_k, y_k, z_k, t) = 0.$$

После интегрирования такая кинематическая связь становится геометрической.

Все связи, в уравнения которых время явно не входит, называются стационарными или склерономными. Если время входит явно в уравнение связи, то связь называется нестационарной или репономной. Нестационарные связи обычно реализуются посредством движущихся или деформирующихся тел. Например, пусть нить, на которой подвешен математический маятник, втягивается в отверстие, совпадающее с точкой подвеса, с постоянной скоростью v (рис. 6.1).

Тогда длина маятника будет переменной:

$$l = l_0 - vt,$$

где l_0 – первоначальная длина нити маятника, и уравнение связи принимает вид:

$$x_m^2 + y_m^2 = l^2, \text{ или } x_m^2 + y_m^2 - (l_0 - vt)^2 = 0.$$

Так как время входит в уравнение явно, то эта связь нестационарная.

Все геометрические и интегрируемые кинематические связи называются голономными. Неинтегрируемые дифференциальные связи, которые нельзя свести к геометрическим, являются неголономными.

Если влияние связей не может прекратиться, т.е. система не может освободиться от связи, то последняя называется удерживающей. Если же система может покинуть связь, то связь является неудерживающей.

Неудерживающие связи выражаются неравенствами. Например, для точки M , скрепленной с концом жесткого стержня, другой конец которого закреплен в неподвижной точке O , связь является неосвобождающей (рис. 6.2). Ее уравнение

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

где l – длина стержня.

Если стержень заменить нитью такой же длины, то связь (нить) будет неудерживающей, так как в процессе движения нить может смяться, и расстояние OM окажется меньше l , т.е. точка M покинет связь. Она математически выражается неравенством

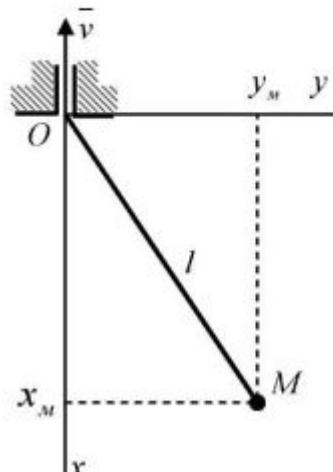


Рис. 6.1

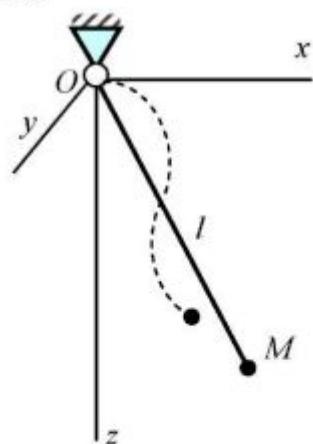


Рис. 6.2

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 \leq 0.$$

Все связи можно разделить на реальные и идеальные. Понятие идеальных связей будет дано в дальнейшем после понятия возможного перемещения системы.

2. Возможные перемещения. Идеальные связи

Прежде чем сформулировать принцип возможных перемещений, требуется ввести понятие возможного, или виртуального, перемещения. Для одной точки возможным перемещением называется такое бесконечно малое (элементарное) мысленное перемещение, которое допускается в данный момент времени наложенными на точку связями. В отличие от элементарного действительного перемещения точки $d\bar{r}$, которое совершается точкой за время dt , возможное перемещение $\delta\bar{r}$ определяется только связями в данный момент. Проекции возможного перемещения $\delta\bar{r}$ на оси координат, или вариации координат, обозначают δx , δy , δz , а проекции элементарного действительного перемещения на эти оси, или дифференциалы координат при изменении времени на dt , обозначают dx , dy , dz .

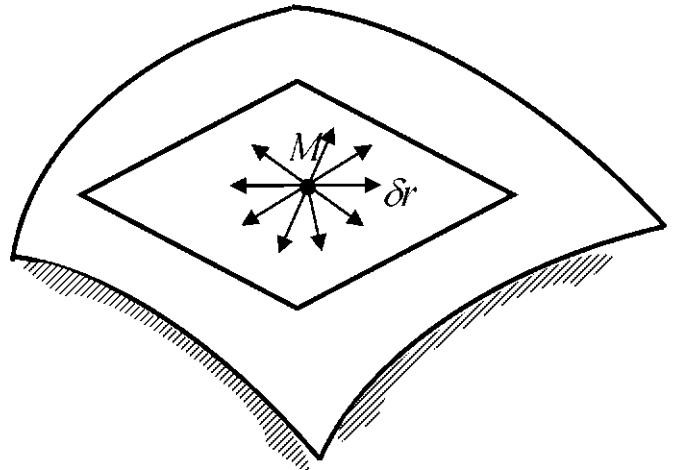


Рис.6.3

Если связью для точки является, например, движущая поверхность, уравнение которой $f(x, y, z, t) = 0$, то действительное перемещение точки $d\bar{r}$ за время dt является в общем случае векторной суммой перемещений по поверхности и вместе с поверхностью. Все возможные перемещения точки $\delta\bar{r}$ в данный момент времени t расположатся на поверхности в положении, которое она занимает в рассматриваемый момент времени. Действительное перемещение при заданных начальных условиях и силах только одно. Возможных перемещений у точки в момент времени t бесконечно много. Все они допускаются связью и как отрезки бесконечно малой длины расположатся в виде веера в касательной плоскости к поверхности в точке (рис. 6.3), в которой находится рассматриваемая точка в данный момент времени. Очевидно, что элементарное действительное перемещение точки принадлежит к числу возможных, если

связь стационарная и действительное перемещение не содержит перемещения вместе со связью.

Возможным перемещением системы называют любую совокупность возможных перемещений точек системы. В общем случае система может иметь бесконечно много возможных перемещений, но вследствие связей, наложенных на систему, не все возможные перемещения являются независимыми. Число независимых возможных перемещений называют числом степеней свободы системы (у свободной точки $s = 3$, у твердого тела $s = 6$).

Элементарную работу силы на возможном перемещении ее точки приложения вычисляют по формулам элементарной работы. Для механической системы, состоящей из n точек, к которым приложены силы, элементарная работа этих сил на каком-либо возможном перемещении системы будет равна

$$\delta A = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k \quad (6.3)$$

и называется возможной работой.

С понятием возможной работы связано еще одно деление связей на идеальные и неидеальные. Идеальной называется связь, сумма элементарных работ сил реакций которой на любом возможном перемещении точек системы равна нулю, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^r \cdot \delta \bar{r}_k = 0, \quad (6.4)$$

где \bar{F}_k^r – реакция связи, действующая на k -ую точку системы. Если же сумма возможных работ реакций связей отлична от нуля, то связь называется неидеальной.

К числу идеальных связей относятся все связи без трения и те из связей с трением, которые осуществляются качением без скольжения (если пренебречь

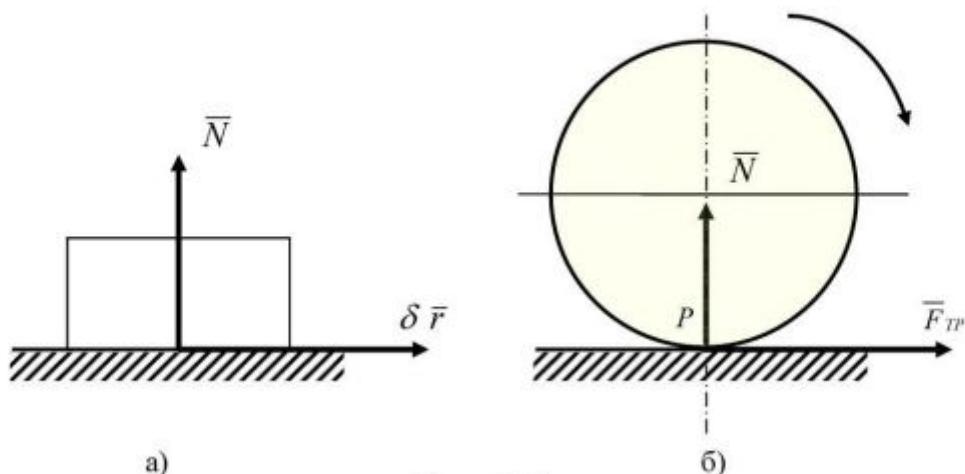


Рис. 6.4

трением качения). Так, для гладкой поверхности (рис. 6.4, а) $\delta A_N = \bar{N} \cdot \delta \bar{r} = 0$, а в случае качения без скольжения (рис. 6.4, б) $\sum \delta A_k^r = \bar{N} \cdot \delta r_p + \bar{F}_{TP} \cdot \delta r_p = 0$, так как точка P является мгновенным центром скоростей и, следовательно, ее возможное перемещение $\delta \bar{r}_p = 0$.

Так же идеальными будут связи, осуществляемые с помощью гибких нерастяжимых нитей, жестких невесомых стержней с шарнирами на концах.

3. Принцип возможных перемещений

Принцип возможных перемещений определяет необходимое и достаточное условие равновесия механической системы с идеальными голономными неосвобождающими стационарными связями. Он формулируется так: *для равновесия механической системы с идеальными голономными неосвобождающими связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на систему активных сил на любом возможном перемещении системы равнялась нулю*, т.е.

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0. \quad (6.5)$$

Таким образом, принцип возможных перемещений позволяет установить условия равновесия механической системы на основании учета только действующих на нее активных сил без предварительного определения неизвестных реакций связей.

Докажем необходимость условия (6.5) для равновесия системы, т.е. докажем, что если система находится в равновесии, то активные силы удовлетворяют условию (6.5). Действительно, если механическая система находится в равновесии, то для каждой ее точки активная сила \bar{F}_k^a и сила реакции связей \bar{F}_k^r удовлетворяют условию равновесия сил, приложенных к точке:

$$\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^r = 0, \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Мысленно сообщим рассматриваемой системе, находящейся в состоянии покоя, возможное перемещение из занимаемого ею положения и вычислим сумму работ сил, приложенных к каждой из точек системы, на возможном перемещении

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^r \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Так как связи, наложенные на систему, являются идеальными, то по определению этих связей $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^r \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ и окончательно получим условие (6.5).

Таким образом, необходимость выполнения этого условия доказана. Докажем его достаточность. Для этого предположим, что для системы с идеальными стационарными голономными удерживающими связями выполняется условие (6.5) и что при выполнении этого условия k -ая материальная точка под действием активной силы \bar{F}_k^a и реакции связей \bar{F}_k^r не остается в равновесии, т.е. для нее $\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^r = \bar{F}_k \neq 0$ (рис. 6.5). В силу нулевых начальных условий ее действительное перемещение $d\bar{r}_k$ совпадает с направлением равнодействующей сил \bar{F}_k^r и \bar{F}_k^a , то есть силы \bar{F}_k . Но тогда элементарная работа силы \bar{F}_k на перемещении $d\bar{r}_k$ положительна, т.е.

$$\bar{F}_k \cdot d\bar{r}_k = (\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^r) \cdot d\bar{r}_k > 0.$$

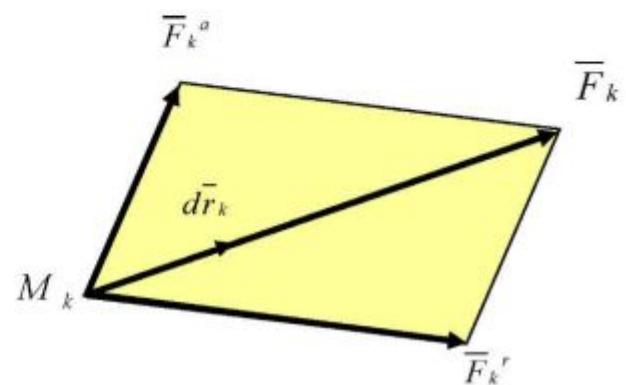


Рис. 6.5

Так как связи стационарные, действительное перемещение является одним из возможных $d\bar{r}_k = \delta \bar{r}_k$ и поэтому $(\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^r) \cdot \delta \bar{r}_k > 0$. Аналогичный результат получим и для любой другой точки, если допустить, что она не находится в равновесии. Поэтому для всех точек системы, движущихся и покоящихся,

$$\sum (\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^r) \cdot \delta \bar{r}_k > 0,$$

или

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^a \delta \bar{r}_k + \sum_{k=1}^n \bar{F}_k^r \delta \bar{r}_k > 0.$$

В силу идеальных связей $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^r \cdot \delta \bar{r}_k = 0$ и поэтому $\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k > 0$, что противоречит исходному положению и, следовательно, этот принцип является достаточным условием равновесия материальной системы.

Уравнение, выражающее принцип возможных перемещений, можно записать также в виде:

$$\sum_{k=1}^n F_k^a \delta r_k \cos(\bar{F}_k^a, \delta \bar{r}_k) = \sum_{k=1}^n (F_{kx}^a \delta x_k + F_{ky}^a \delta y_k + F_{kz}^a \delta z_k) = 0. \quad (6.6)$$

Принцип возможных перемещений применим для систем с неидеальными связями, а также для определения реакций идеальных связей. В этих случаях надо отбросить соответствующую связь, заменив ее реакцией, и включить последнюю в число активных сил. При этом одновременно надо считать для системы возможным те перемещения, которые она может иметь при отброшенной связи. Неидеальную связь заменяют идеальной, компенсируя неидеальность соответствующими силами. Так, если связью для тела является шероховатая поверхность, то ее можно заменить гладкой поверхностью, добавляя к активным силам силу трения скольжения. Таким образом, в принцип возможных перемещений входят в действительности не активные силы, а все приложенные к точкам системы сил, кроме тех сил реакций идеальных связей, которые по условиям задачи не требуется определять.

4. Общее уравнение динамики

Принцип Даламбера позволяет записывать динамические уравнения движения в виде уравнений равновесия, так как при добавлении сил инерции к активным силам и силам реакций связей, действующих на систему, получается уравновешенная система сил. Но если система сил уравновешена, то к ней применим принцип возможных перемещений. Последовательное применение этих принципов к движущейся механической системе, на которую наложены идеальные стационарные голономные удерживающие связи, позволяет сформулировать принцип Даламбера-Лагранжа: *если к движущейся механической системе, на которую наложены идеальные стационарные голономные удерживающие связи, условно приложить силы инерции всех ее точек, то в каждый момент времени сумма элементарных работ активных сил и сил инерции равна нулю на любом возможном перемещении системы, т.е.*

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^\Phi = 0, \quad (6.7)$$

или

$$\sum [(F_{kx}^a + \Phi_{kx}) \delta x_k + (F_{ky}^a + \Phi_{ky}) \delta y_k + (F_{kz}^a + \Phi_{kz}) \delta z_k] = 0.$$

Действительно, согласно принципа Даламбера для несвободной механической системы в любой момент времени геометрическая сумма равнодействующих

вующей задаваемых сил, равнодействующей реакций связей и силы инерции для каждой точки M_k механической системы равна нулю:

$$\bar{F}_k^a + \bar{F}_k^r + \bar{\Phi}_k = 0, \quad (k=1,2,\dots,n).$$

Если система получает возможное перемещение, при котором каждая точка будет иметь перемещение $\delta \bar{r}_k$, то сумма работ этих сил на этом перемещении должна быть равна нулю (согласно принципа возможных перемещений)

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k^a + \sum_{k=1}^n \delta A_k^r + \sum_{k=1}^n \delta A_k^\phi = 0.$$

Но при идеальных связях $\sum_{k=1}^n \delta A_k^r = 0$, и поэтому окончательно получаем равенство (6.7), выражающее принцип Даламбера-Лагранжа или общее уравнение динамики.

Общее уравнение динамики (6.7) позволяет составлять дифференциальные уравнения движения любой механической системы. Если механическая система состоит из отдельных твердых тел, то силы инерции точек каждого тела можно привести к одной силе, приложенной в некоторой точке тела, и паре сил. Сила равна главному вектору сил инерции точек этого тела, а момент пары равен главному моменту этих сил относительно центра приведения. Чтобы составить уравнения (6.7) к каждому телу прикладывают действующие на него задаваемые силы, а также прикладывают главный вектор и главный момент сил инерции. Затем системе сообщают возможное перемещение и для всей совокупности задаваемых сил и приведенных сил инерции составляют уравнения (6.7), число которых равно числу степеней свободы данной системы.

5. Примеры решения задач

Пример 1. На кривошип OA кривошипно-ползунного механизма, расположенного в вертикальной плоскости (рис. 6.6), действует пара сил с моментом M . Кривошип и шатун равной длины $OA = AB = l$ и равного веса $G_1 = G_2 = G$. Вес ползуна B равен $G_3 = 2G$. Пренебрегая трением, найти горизонтальную силу P , приложенную к ползуну и удерживающую механизм в равновесии.

Решение. К механизму приложены активные силы \bar{G}_1 , \bar{G}_2 , \bar{G}_3 , \bar{P} и момент M . Положение механизма определяется углом φ , т.е. система имеет одну степень свободы, и мы можем ей дать одно независимое возможное перемещение, уве-

личив угол φ на величину $\delta\varphi$. Применяя принцип возможных перемещений, получим

$$M\delta\varphi + G_{1x}\delta x_C + G_{1y}\delta y_C + G_{2x}\delta x_D + G_{2y}\delta y_D + P_x\delta x_B + P_y\delta y_B + G_{3x}\delta x_B + G_{3y}\delta y_B = 0.$$

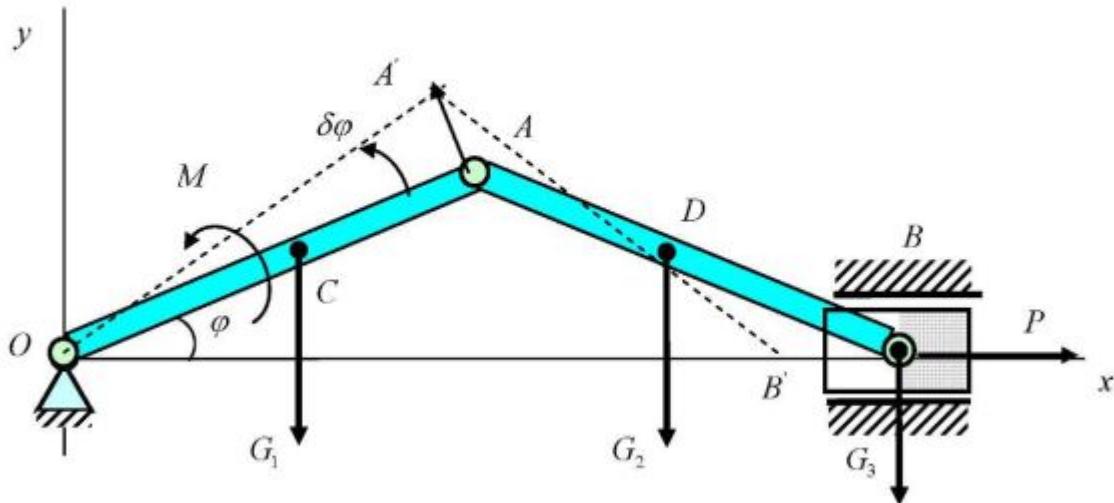


Рис. 6.6

Так как $G_{1x} = 0$, $G_{1y} = -G$, $G_{2x} = 0$, $G_{2y} = -G$, $P_x = P$, $P_y = 0$, $G_{3x} = 0$, $G_{3y} = -G$, а $\delta y_B = 0$, то получим

$$M\delta\varphi - G\delta y_C - G\delta y_D + P\delta x_B = 0. \quad (*)$$

Найдем зависимые между проекциями возможных перемещений точек и $\delta\varphi$.

Из чертежа видно, что

$$y_C = y_D = \frac{l}{2} \sin \varphi, \quad x_B = 2l \cos \varphi.$$

Варьируя эти соотношения, находим

$$\delta y_C = \delta y_D = \frac{l}{2} \cos \varphi \delta\varphi, \quad \delta x_B = -2l \sin \varphi \delta\varphi.$$

Подставим полученные значения в исходное уравнение (*)

$$M\delta\varphi - Gl \cos \varphi \delta\varphi - 2Pl \sin \varphi \delta\varphi = 0,$$

откуда

$$P = \frac{M}{2l \sin \varphi} - \frac{G}{2} \operatorname{ctg} \varphi.$$

Пример 2. Составная балка AD состоит из двух балок AC и CD , шарнирно соединенных в точке C . Конец балки D заделан в стену (рис. 6.7, а). Определить момент заделки M_D , если на балку действуют равные вертикальные силы $F_1 = F_2 = F_3 = F$, а также момент M пары сил. Размеры указаны на рисунке. Силами тяжести балок пренебречь.

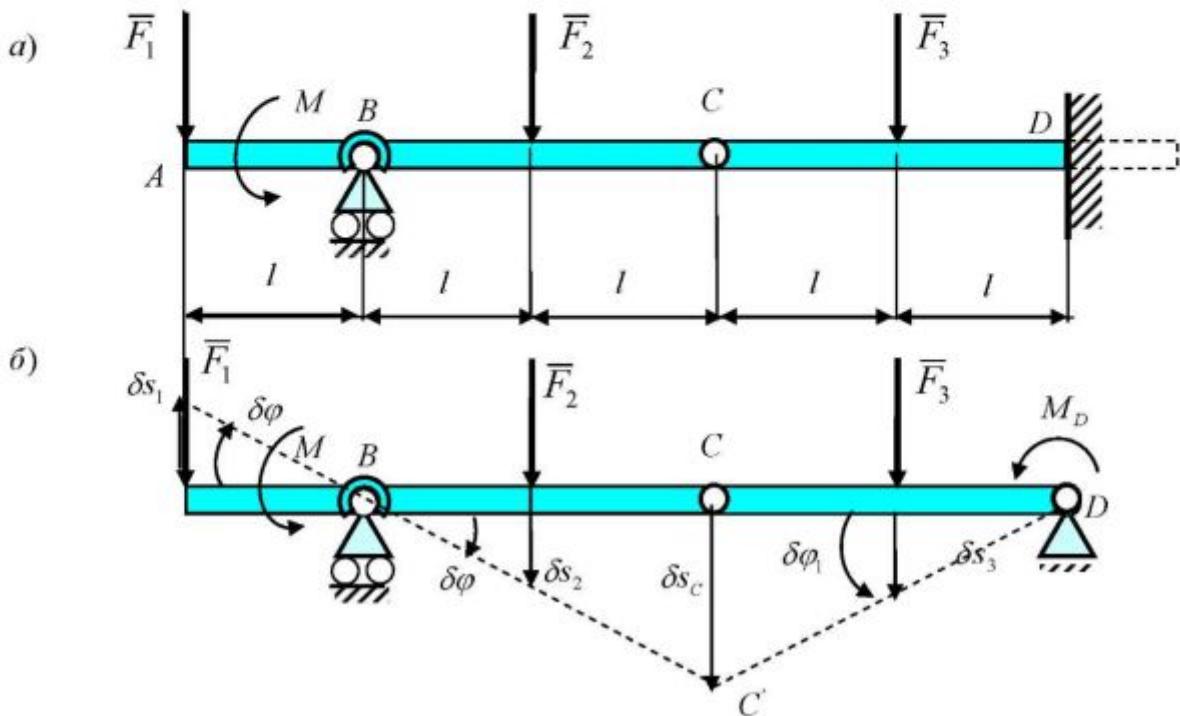


Рис. 6.7

Решение. Заменим заделку D неподвижным шарниром и моментом заделки M_D (рис. 6.7, б). Оставшиеся связи являются идеальными, если пренебречь трением в шарнирах и катковой опоре B . Затем применим принцип возможных перемещений

$$\sum_{k=1}^n \bar{F}_k^a \cdot \delta \bar{r}_k = 0.$$

Приложенными силами являются \bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3 и пары сил с моментами M и M_D . Дадим системе возможное перемещение, повернув мысленно балку на элементарный угол $\delta\varphi$ вокруг шарнира B . Связи допускают такое перемещение. Составная балка займет положение, показанное на рисунке (6.7, б) пунктиром. Катковая опора B при этом смещается в горизонтальном направлении, но приложенные силы не совершают работы на горизонтальных перемещениях.

Согласно принципу возможных перемещений,

$$-F_1\delta s_1 - M\delta\varphi + F_2\delta s_2 + F_3\delta s_3 + M_D\delta\varphi_1 = 0.$$

Отрицательной является элементарная работа тех сил, возможные перемещения точек приложения которых противоположны направлению действия сил. Аналогично определяются знаки элементарной работы моментов пар сил. Возможные перемещения δs_1 , δs_2 , δs_3 следует брать как прямолинейные отрезки, направленные по касательным к дугам окружностей.

У балки одна степень свободы, и поэтому она имеет одно произвольное независимое перемещение, например $\delta\varphi$. Для остальных возможных перемещений имеем:

$$\delta s_1 = l\delta\varphi, \delta s_2 = l\delta\varphi, \delta s_3 = l\delta\varphi_1, \text{ где } \delta\varphi_1 = \delta\varphi.$$

Подставляя полученные значения возможных перемещений в исходное уравнение и учитывая, что $F_1 = F_2 = F_3 = F$, получим

$$\delta\varphi(-Fl - M + Fl + Fl + M_D) = 0.$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то $-M + Fl + M_D = 0$, откуда

$$M_D = M - Fl.$$

Пример 3. Два однородных стержня A_1B_1 и A_2B_2 , веса которых равны \bar{G}_1 и \bar{G}_2 , опираются концами A_1 и A_2 на гладкие вертикальные стенки, а концами B_1 и B_2 – на гладкую горизонтальную плоскость (рис. 6.8). Определить зависимость между углами φ_1 и φ_2 наклона стержней при равновесии системы.

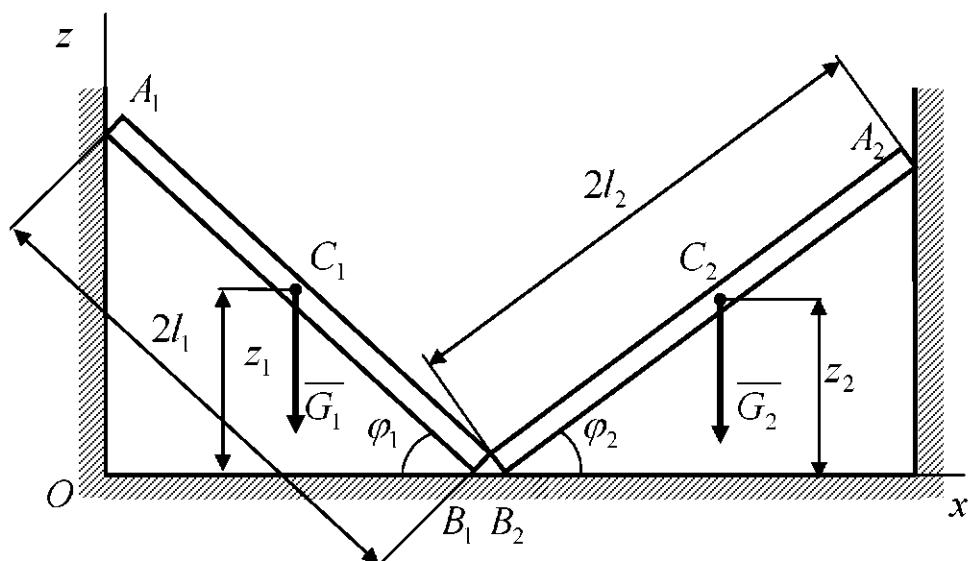


Рис. 6.8

Решение. Система имеет одну степень свободы. Активными силами действующими на систему будут только веса стержней \bar{G}_1 и \bar{G}_2 . В силу отсутствия тре-

ния связи будут идеальными. Будем считать, что изображенное на рисунке положение системы есть положение равновесия. Дадим системе возможное перемещение и воспользуемся принципом возможных перемещений, выраженным в виде равенства

$$\sum_{k=1}^n (F_{kx}\delta x_k + F_{ky}\delta y_k + F_{kz}\delta z_k) = 0.$$

В нашем случае $n = 2$, $\sum F_{kx} = \sum F_{ky} = 0$.

Следовательно,

$$-G_1\delta z_1 - G_2\delta z_2 = 0, \quad (*)$$

где Z_1 и Z_2 – аппликаты точек приложения сил \overline{G}_1 и \overline{G}_2 .

Так как $z_1 = l_1 \sin \varphi_1$, $z_2 = l_2 \sin \varphi_2$,

то

$$\delta z_1 = l_1 \cos \varphi_1 \delta \varphi_1, \quad \delta z_2 = l_2 \cos \varphi_2 \delta \varphi_2.$$

Здесь $2l_1$ и $2l_2$ – длины стержней.

Установим зависимость между $\delta \varphi_1$ и $\delta \varphi_2$. Так как расстояние между стенками постоянно, получим

$$2l_1 \cos \varphi_1 + 2l_2 \cos \varphi_2 = const,$$

отсюда

$$-2l_1 \sin \varphi_1 \delta \varphi_1 - 2l_2 \sin \varphi_2 \delta \varphi_2 = 0,$$

следовательно,

$$\delta \varphi_2 = -\frac{l_1 \sin \varphi_1}{l_2 \sin \varphi_2} \delta \varphi_1.$$

Далее найдем

$$\delta z_2 = -\frac{l_1 \sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos \varphi_2 \delta \varphi_1.$$

Подставляя значения δz_1 и δz_2 в $(*)$, получим

$$-G_1 l_1 \cos \varphi_1 \delta \varphi_1 + G_2 l_1 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos \varphi_2 \delta \varphi_1 = 0.$$

Преобразуем это выражение к виду:

$$l_1 \delta \varphi_1 (G_2 \frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} \cos \varphi_2 - G_1 \cos \varphi_1) = 0,$$

откуда получим искомую зависимость между углами φ_1 и φ_2 при равновесии системы, приравняв к нулю выражение в скобке

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{G_1}{G_2} \operatorname{tg} \varphi_2.$$

Пример 4. Груз 1 массой M_1 , который подвешен на невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через невесомый блок A и намотанной на шкив 2 радиусом R , заставляет связанный со шкивом вал радиусом r катиться без скольжения по горизонтальному рельсу (рис. 6.9). Общая масса шкива и вала M_2 , их радиус инерции относительно центральной оси равен ρ . Найти ускорение груза 1.

Решение. Связи, наложенные на систему, являются идеальными, поэтому применим к системе только активные силы \bar{G}_1 и \bar{G}_2 , а силы инерции представим главными векторами \bar{R}_1^ϕ и \bar{R}_2^ϕ и моментом M_0^ϕ .

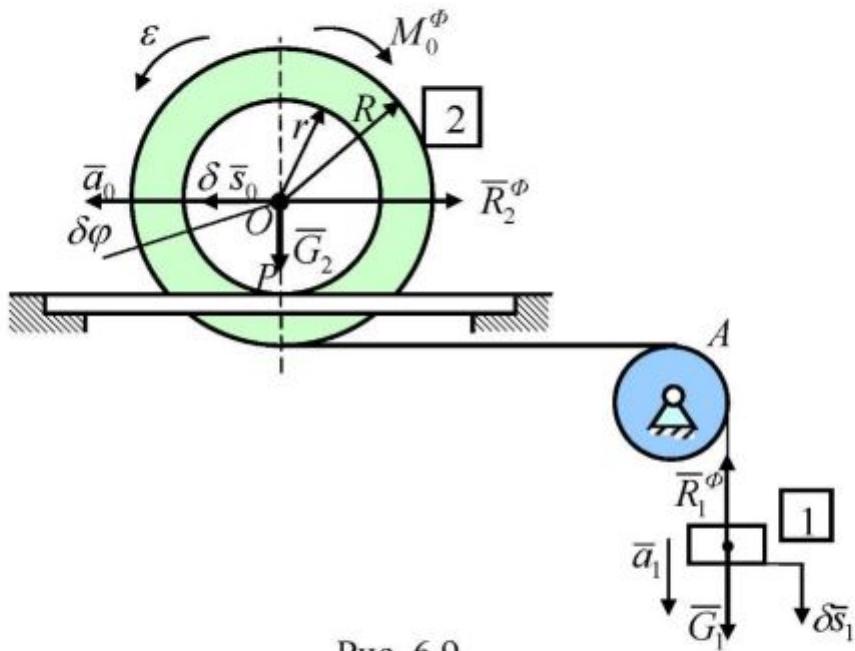


Рис. 6.9

При этом

$$R_1^\phi = M_1 a_1, \quad R_2^\phi = M_2 a_0, \quad M_0^\phi = J_0 \varepsilon = M_2 \rho^2 \varepsilon.$$

Из кинематики механизма следует, что $\omega = \frac{v_1}{R-r}$, $v_0 = \omega r = \frac{v_1 r}{R-r}$.

Беря производные по времени от этих выражений, получим

$$\varepsilon = \frac{a_1}{R-r}, \quad a_0 = a_1 \frac{r}{R-r},$$

тогда

$$R_2^\phi = M_2 a_1 \frac{r}{R-r}, \quad M_0^\phi = M_2 \rho^2 \frac{a_1}{R-r}.$$

Дадим системе возможные перемещения ($\delta s_1, \delta s_0, \delta\varphi$) и подсчитаем на нем сумму возможных работ:

$$\sum \delta A_k = G_1 \delta s_1 - R_1^\phi \delta s_1 - R_2^\phi \delta s_0 - M_0^\phi \delta\varphi = 0.$$

Из кинематики механизма следует, что $\delta\varphi = \frac{\delta s_1}{R-r}$, $\delta s_0 = \frac{r \delta s_1}{R-r}$.

Тогда общее уравнение динамики примет вид:

$$M_1 g \delta s_1 - M_1 a_1 \delta s_1 - M_2 a_1 \frac{r^2}{(R-r)^2} \delta s_1 - M_2 \rho^2 \frac{a_1}{(R-r)^2} \delta s_1 = 0.$$

Сократив на δs_1 , окончательно получим

$$a_1 = g \frac{M_1 (R-r)^2}{M_1 (R-r)^2 + M_2 (r^2 + \rho^2)}.$$

Пример 5. На неподвижной призме, боковые грани которой образуют с горизонтом углы α и β , помещены два груза весом \bar{G}_1 и \bar{G}_2 , связанные между собой невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через блок (рис. 6.10). Зная коэффициент трения скольжения f определить ускорения грузов; массой блока пренебречь.

Решение. Система имеет одну степень свободы. Покажем задаваемые силы – веса грузов \bar{G}_1 и \bar{G}_2 , нормальные реакции \bar{N}_1 и \bar{N}_2 и силы трения \bar{F}_{mp1} и \bar{F}_{mp2} .

Модули сил трения соответственно равны:

$$F_{mp1} = f G_1 \cos \alpha \quad \text{и} \quad F_{mp2} = f G_2 \cos \beta.$$

Силы трения направлены в стороны, противоположные направлениям движения грузов. Так как грузы движутся поступательно, то равнодействующие сил инерций будут равны

$$R_1^\phi = \frac{G_1}{g} a, \quad R_2^\phi = \frac{G_2}{g} a$$

и направлены противоположно ускорению \bar{a} .

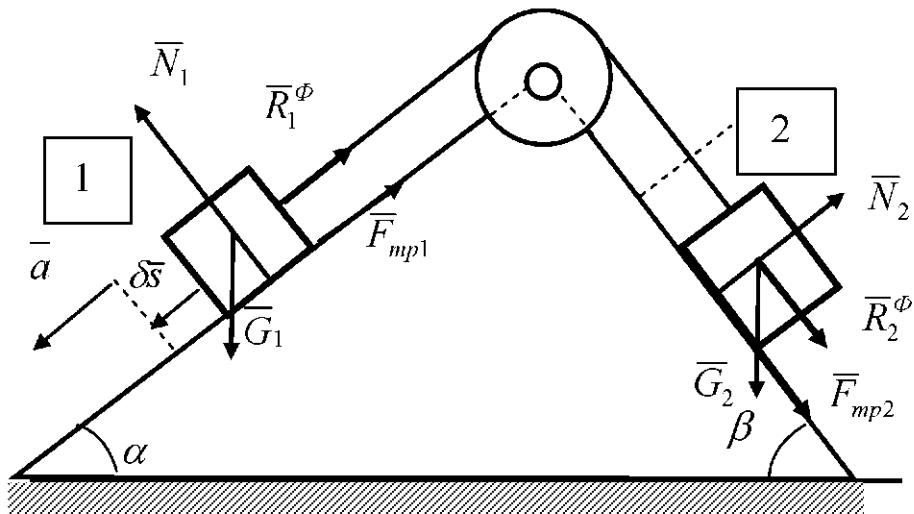


Рис. 6.10

Сообщим мысленно системе возможное перемещение δs в сторону движения грузов и составим общее уравнение динамики

$$G_1 \delta s \sin \alpha - G_1 f \delta s \cos \alpha - \frac{G_1}{g} a \delta s - G_2 \delta s \sin \beta - G_2 f \delta s \cos \beta - \frac{G_2}{g} a \delta s = 0.$$

Поделив это уравнение на δs , получаем

$$G_1 \sin \alpha - G_1 f \cos \alpha - \frac{G_1}{g} a - G_2 \sin \beta - G_2 f \cos \beta - \frac{G_2}{g} a = 0.$$

Из этого уравнения определяем ускорение грузов:

$$a = g \frac{G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2 (\sin \beta + f \cos \beta)}{G_1 + G_2}.$$

Если

$$G_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) - G_2 (\sin \beta + f \cos \beta) > 0,$$

то грузы движутся в указанном направлении.

ГЛАВА VII. УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ И УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ СИСТЕМЫ В ОБОБЩЕННЫХ КООРДИНАТАХ

1. Обобщенные координаты и обобщенные скорости.

Положение механической системы, состоящей из n материальных точек, определяется $3n$ декартовыми координатами. Но если на систему наложено k голономных стационарных удерживающих связей, то уравнения связей можно разрешить относительно k произвольных декартовых координат и выразить эти координаты через остальные $s = 3n - k$. Тогда число независимых координат, определяющих положение системы, будет равно $3n - k$. Например, если какую-нибудь точку M_k системы с координатами x_k, y_k, z_k связать жестким стержнем длины l с неподвижной точкой $A(x_A, y_A, z_A)$, то число возможных перемещений системы уменьшится на единицу, так как станет невозможным перемещение точки вдоль прямой AM_k . Одновременно координаты точки M_k будут все время удовлетворять уравнению

$$(x_A - x_k)^2 + (y_A - y_k)^2 + (z_A - z_k)^2 = l^2,$$

выражающему эту связь математически; следовательно, число независимых между собой координат системы тоже уменьшится на единицу. В результате оказывается, что число независимых координат, определяющих положение системы с геометрическими связями, равно числу степеней свободы этой системы. Для определения положения системы вместо декартовых координат точек можно использовать другие геометрические параметры: отрезки дуг, углы, площади, объемы и т.д. Любые независимые параметры, однозначно определяющие положение механической системы, называются обобщенными координатами этой системы и обозначаются через q_1, q_2, \dots, q_s . Их число совпадает с числом независимых декартовых координат, т.е. равно числу степеней свободы

$$s = 3n - k. \quad (7.1)$$

Наоборот, если установлено, что положение данной системы однозначно определяется какими-нибудь s независимыми между собою параметрами, то эта система имеет s степеней свободы.

Поскольку обобщенные координаты между собой независимы, то элементарные приращения этих координат $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ будут также между собой независимы.

Как при всяком переходе от одной системы координат к другой, декартовы координаты x_k, y_k, z_k любой точки механической системы можно выразить

через обобщенные координаты зависимостями вида $x_k = x_k(q_1, q_2, \dots, q_S)$ и т.д. Следовательно, и для радиус-вектора \bar{r}_k этой точки, который определяется его проекциями, т.е. координатами x_k, y_k, z_k , будем иметь

$$\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_S). \quad (7.2)$$

Рассмотрим вопрос обобщенных координат на примере кривошипно-ползунного механизма (рис. 7.1). Его положение на плоскости вполне определяется заданием положения трех его точек O, A, B с координатами соответственно $(0,0), (x_A, y_A), (x_B, 0)$. Координат, не равных нулю, только три. Составим два уравнения связей, учитывая постоянство длин $OA = r$ и $AB = l$. Имеем

$$x_A^2 + y_A^2 = r^2; \quad (x_B - x_A)^2 + y_A^2 = l^2,$$

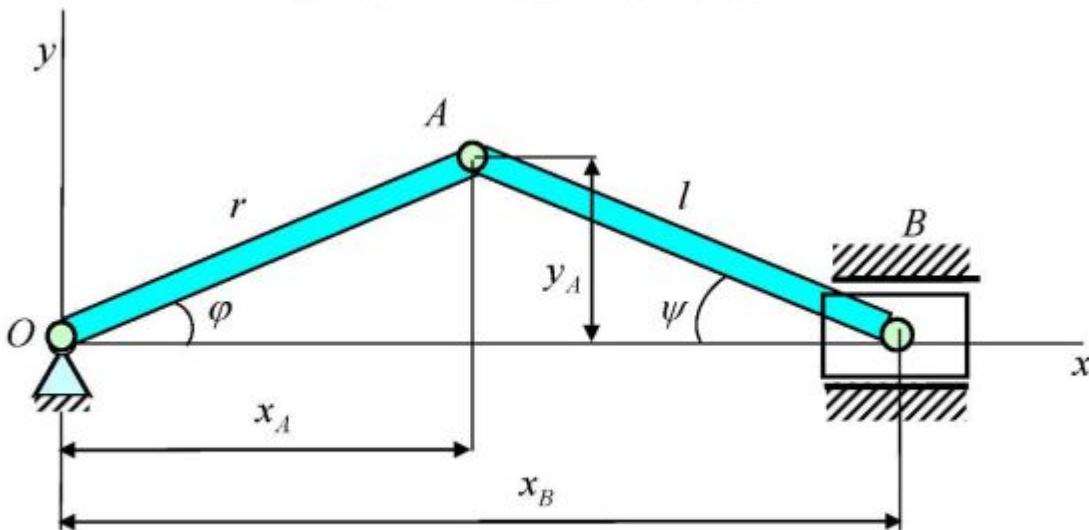


Рис. 7.1

таким образом число связей $k = 2$. Число степеней свободы

$$s = 3n - k = 3 - 2 = 1.$$

Из трех не равных нулю координат только одну можно задать независимой. Две другие выражаются через нее как решения уравнения связей. В качестве независимой координаты можно выбрать любую из трех координат x_A, y_A, x_B . Нужно только, чтобы она однозначно определяла положение механизма относительно осей координат xOy . Поэтому координаты x_A и x_B следует исключить, так как они неоднозначно определяют положение механизма. В данном случае в качестве независимой обобщенной координаты q удобно выбрать угол φ поворота кривошипа OA , так как через него легко выразить все остальные координаты. Получим

$$x_A = r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi, \quad x_B = r \cos \varphi + l \cos \psi.$$

Но

$$y_A = r \sin \varphi = l \sin \psi; \quad \sin \psi = \frac{r}{l} \sin \varphi;$$

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \frac{1}{l} \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

С учетом этого искомые выражения для координат принимают форму

$$x_A = r \cos \varphi, \quad y_A = r \sin \varphi, \quad x_B = r \cos \varphi + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}.$$

При движении системы ее обобщенные координаты будут с течением времени непрерывно изменяться, и закон этого движения определится уравнениями:

$$q_1 = f_1(t), \quad q_2 = f_2(t), \dots, \quad q_s = f_s(t). \quad (7.3)$$

Уравнения (7.3) представляют собой кинематические уравнения движения системы в обобщенных координатах. Производные от обобщенных координат по времени называются обобщенными скоростями системы. Размерность обобщенной скорости зависит от размерности соответствующей обобщенной координаты. Если q – линейная величина, то \dot{q} – линейная скорость; если q – площадь, то \dot{q} – секторная скорость; если q – угол, то \dot{q} – угловая скорость и т.д.

2. Обобщенные силы

Рассмотрим механическую систему с идеальными голономными стационарными удерживающими связями, которая состоит из n материальных точек и имеет s степеней свободы, т.е. ее положение полностью определяется s обобщенными координатами q_1, q_2, \dots, q_s . Тогда радиус-вектор каждой точки системы будет функцией этих обобщенных координат: $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s)$.

Пусть за время dt точки системы совершили перемещение $\delta \bar{r}_1, \delta \bar{r}_2, \dots, \delta \bar{r}_n$. Подсчитаем сумму элементарных работ сил, приложенных к системе, на этих перемещениях (работу совершают только активные силы)

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k.$$

Выразим дифференциал радиуса-вектора k -й точки, рассматривая радиус-вектор как функцию обобщенных координат:

$$\delta \bar{r}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \delta q_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \delta q_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_S} \delta q_S = \sum_{i=1}^S \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i.$$

Тогда выражение для суммы элементарных работ примет вид:

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \cdot \sum_{i=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \delta q_i$$

или, после изменения порядка суммирования

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = \sum_{i=1}^s \left(\sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \right) \delta q_i.$$

Обозначим внутреннюю сумму через Q_i и назовем ее обобщенной силой, соответствующей i -ой обобщенной координате, т.е.

$$Q_i = \sum_{k=1}^n \bar{F}_k \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \sum_{k=1}^n \left(F_{kx} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + F_{ky} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + F_{kz} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right). \quad (7.4)$$

Следовательно, для механической системы с идеальными голономными стационарными удерживающими связями обобщенной силой, соответствующей некоторой обобщенной координате, является коэффициент при приращении этой координаты в выражении суммы элементарных работ всех активных сил системы при ее элементарном перемещении.

Из данного определения вытекает метод нахождения обобщенных сил. Обобщенные координаты – независимые величины, поэтому их дифференциалы произвольные. Тогда для определения обобщенной силы Q_i , соответствующей обобщенной координате q_i , дадим системе такое перемещение, чтобы изменилась только координата q_i , а все остальные остались бы без изменения, т.е. $\delta q_i \neq 0$, а $\delta q_1 = 0, \delta q_2 = 0, \dots, \delta q_{i-1} = 0, \dots, \delta q_{i+1} = 0, \dots, \delta q_S = 0$. Определим на этом перемещении сумму элементарных работ всех активных сил системы. Выражение суммы элементарных работ

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_S \delta q_S$$

для нашего случая ($\delta q_i \neq 0$) примет вид:

$$\left(\sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_{q_i} = Q_i \delta q_i$$

(индекс q_i показывает, что работа совершается только на перемещениях системы, вызванных изменением координаты q_i), откуда

$$Q_i = \frac{\left(\sum_{k=1}^n \delta A_k \right)_{q_i}}{\delta q_i}. \quad (7.5)$$

По этой формуле и определяют обобщенные силы, давая последовательно бесконечно малые приращения всем обобщенным координатам. Из этой же формулы получают размерность обобщенной силы $[Q] = \frac{[A]}{[q]}$. Так, если обобщенная координата имеет размерность длины, то обобщенная сила имеет размерность силы, если же обобщенной координатой является угол, то обобщенная сила имеет размерность момента.

Случай потенциальных сил. Если все силы действующие на систему будут потенциальными, то в этом случае

$$F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}, \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}, \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k},$$

где $U = U(x_1, y_1, z_1, \dots, x_n, y_n, z_n)$ – силовая функция системы.

Если подставить значения проекций сил в формулу (7.4), то

$$Q_i = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i}. \quad (7.6)$$

Так как $U = -\Pi$, где Π – потенциальная энергия системы, то

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_i}. \quad (7.7)$$

3. Условия равновесия системы в обобщенных координатах

Согласно принципу возможных перемещений необходимым и достаточным условием равновесия механической системы является равенство нулю суммы элементарных работ всех активных сил на любом возможном перемещении системы, т.е. $\sum \delta A_k = 0$. В обобщенных координатах это условие дает

$$\sum_{k=1}^n \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_S \delta q_S = 0. \quad (7.8)$$

Так как все величины $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$ между собой независимы, то равенство (7.8) может выполняться лишь тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_S$ в отдельности равен нулю, т.е.

$$Q_1 = 0, Q_2 = 0, \dots, Q_S = 0. \quad (7.9)$$

Действительно, если допустить, что одна из этих величин, например Q_1 , не равна нулю, то всегда можно сообщить системе такое возможное перемещение, при котором $\delta q_1 \neq 0$, а $\delta q_2 = \delta q_3 = \dots = \delta q_S = 0$, и мы приходим к противоречию с условием (7.8).

Таким образом, для равновесия механической системы, подчиненной голономным стационарным, идеальным и неосвобождающим связям необходимо и достаточно, чтобы все обобщенные силы были равны нулю.
Число условий равновесия (7.9) равно числу обобщенных координат, т.е. числу степеней свободы системы.

Случай потенциальных сил. В этом случае условия равновесия (7.9) дают

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_S} = 0 \quad (7.10)$$

или

$$\frac{\partial P}{\partial q_1} = 0, \frac{\partial P}{\partial q_2} = 0, \dots, \frac{\partial P}{\partial q_S} = 0. \quad (7.10')$$

Отсюда следует, что при равновесии полный дифференциал функций U или P равен нулю, т.е.

$$dU(q_1, q_2, \dots, q_S) = 0 \text{ или } dP(q_1, q_2, \dots, q_S) = 0. \quad (7.11)$$

Таким образом, при равновесии механической системы, находящейся под действием потенциальных сил, силовая функция и потенциальная энергия могут достигать экстремума.

4. Дифференциальные уравнения движения механической системы в обобщенных координатах (уравнения Лагранжа второго рода)

Наиболее простым и универсальным методом исследования движения механической системы с одной степенью свободы является применение теоремы об изменении кинетической энергии. Если же система обладает несколькими степенями свободы или нестационарными связями, или тем и другим вместе, то применение только этой теоремы становится недостаточным для

полного решения задачи. Процесс составления дифференциальных уравнений движения таких систем и их решение значительно упрощается при использовании дифференциальных уравнений движения системы в обобщенных координатах – уравнений Лагранжа второго рода.

Уравнения Лагранжа второго рода дают общий метод составления дифференциальных уравнений движения механических систем с голономными идеальными удерживающими связями в обобщенных координатах.

Для вывода этих уравнений воспользуемся общим уравнением динамики (6.7), которое дает

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^\Phi = 0. \quad (7.12)$$

В первую сумму могут входить как работы активных сил, так и работы сил трения, если связи, наложенные на систему, неидеальные.

Пусть система имеет s степеней свободы и ее положение определяется q_1, q_2, \dots, q_s обобщенными координатами. Тогда

$$\sum \delta A_k = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \dots + Q_s \delta q_s. \quad (7.13)$$

Очевидно, что совершенно так же можно преобразовать к обобщенным координатам элементарную работу сил инерции $\bar{\Phi}_k$. При этом

$$\sum \delta A_k^\Phi = Q_1^\Phi \delta q_1 + Q_2^\Phi \delta q_2 + \dots + Q_s^\Phi \delta q_s. \quad (7.13^1)$$

Подставляя величины (7.13) и (7.13¹) в уравнение (7.12), найдем, что

$$(Q_1 + Q_1^\Phi) \delta q_1 + (Q_2 + Q_2^\Phi) \delta q_2 + \dots + (Q_s + Q_s^\Phi) \delta q_s = 0.$$

Так как все $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ между собой независимы, то полученное равенство может выполняться лишь тогда, когда каждый из коэффициентов при $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_s$ в отдельности равен нулю. Следовательно, должно быть

$$Q_1 + Q_1^\Phi = 0, Q_2 + Q_2^\Phi = 0, \dots, Q_s + Q_s^\Phi = 0. \quad (7.14)$$

Выразим все входящие сюда обобщенные силы инерции через кинетическую энергию системы. Для этого преобразуем сначала соответствующим образом величину Q_i^Φ . Поскольку сила инерции любой из точек системы равна

$$\bar{\Phi}_k = -m_k \bar{a}_k = -m_k \frac{d \bar{v}_k}{dt},$$

то

$$Q_i^\phi = \sum_{k=1}^m \bar{\Phi}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = - \sum_{k=1}^n m_k \frac{d \bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}. \quad (7.15)$$

Чтобы выразить Q_i^ϕ через кинетическую энергию системы, преобразуем правую часть равенства (7.15) так, чтобы она содержала только скорости \bar{v}_k точек системы. Заметим, что

$$\frac{d \bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{d}{dt} (\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}) - \bar{v}_k \cdot \frac{d}{dt} (\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}). \quad (7.16)$$

Далее учтем, что

$$\frac{d \bar{r}_k}{dt} = \dot{\bar{r}}_k = \bar{v}_k \quad \text{и} \quad \frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i.$$

Операции полного дифференцирования по t и частного дифференцирования по q_i переместительны, что дает

$$\frac{d}{dt} (\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}) = \frac{\partial}{\partial q_i} (\frac{d \bar{r}_k}{dt}) = \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_i}. \quad (7.17)$$

Так же получим тождество Лагранжа, которое записывается в виде:

$$\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7.18)$$

Это тождество утверждает, что "точки" (дифференцирование по времени) можно поставить одновременно в числителе и знаменателе или их сократить. Действительно, в общем случае $\bar{r}_k = \bar{r}_k(q_1, q_2, \dots, q_s; t)$. При движении системы обобщенные координаты тоже есть функции времени. Дифференцируя \bar{r}_k по времени как его сложную функцию, имеем

$$\dot{\bar{r}}_k = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \dots + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t} = \sum_{i=1}^s \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}. \quad (7.19)$$

Частные производные $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_i}$ и $\frac{\partial \bar{r}_k}{\partial t}$ не могут зависеть от обобщенных скоростей

\dot{q}_i ; следовательно, дифференцирование частным образом по \dot{q}_i с фиксирован-

ным номером обеих частей (7.19) дает только коэффициент при этой переменной. Все остальные слагаемые при дифференцировании дадут нули, так как они не зависят от \dot{q}_i с этим фиксированным номером. Имеем для $i = 1$

$$\frac{\partial \dot{\bar{r}}_k}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1}.$$

Пользуясь соотношениями (7.17) и (7.18), представим равенство (7.16) в виде:

$$\frac{d \bar{v}_k}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_k}{\partial q_1} = \frac{d}{dt} (\bar{v}_k \cdot \frac{\partial \bar{v}_k}{\partial \dot{q}_1}) - \bar{v}_k \cdot \frac{d}{dt} (\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial q_1}) = \frac{d}{dt} (\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_k^2}{\partial \dot{q}_1}) - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{v}_k^2}{\partial q_1}.$$

Тогда выражение (7.15), если учесть, что масса – величина постоянная, а сумма производных равна производной от суммы, примет вид:

$$-Q_1^\phi = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1} \left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2} \right) \right] - \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\sum \frac{m_k v_k^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1},$$

где

$$T = \sum \frac{m_k v_k^2}{2} – \text{есть кинетическая энергия системы.}$$

Аналогичные выражения получаются для всех остальных обобщенных сил инерции. В результате равенства (7.14) дадут окончательно

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2, \\ \dots, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} &= Q_s. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$

Уравнения (7.20) представляют собою дифференциальные уравнения движения системы в обобщенных координатах или уравнения Лагранжа. Число этих уравнений, как видим, равно числу степеней свободы системы. Их вид и число не зависят ни от количества тел, входящих в рассматриваемую систему,

ни от того, как эти тела движутся, и определяются лишь числом степеней свободы системы. Кроме того, при идеальных связях в правые части уравнений входят только активные силы. Следовательно, эти уравнения позволяют заранее исключить из рассмотрения все неизвестные реакции связей.

В общем случае кинетическая энергия системы является функцией обобщенных координат, обобщенных скоростей и времени и поэтому ее частные производные по q_i и \dot{q}_i будут функциями тех же переменных. Так как частные производные кинетической энергии по обобщенным скоростям дифференцируются еще раз по времени, то левые части уравнений Лагранжа будут содержать обобщенные координаты, их первые и вторые производные по времени: \ddot{q}_i , $\ddot{\dot{q}}_i$. Следовательно, эти уравнения представляют собой обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка относительно обобщенных координат.

Уравнения Лагранжа второго рода являются наиболее универсальными, наиболее общими уравнениями механики. Они широко используются не только в теоретической механике, но и в других науках, входящих в теоретическую физику.

Случай потенциальных сил. Если все силы, действующие на систему, потенциальны, то обобщенные силы выражаются через силовую функцию или потенциальную энергию системы, т.е.

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i},$$

и уравнения Лагранжа (7.20) запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial \dot{q}_i} = 0.$$

Так как потенциальная энергия не зависит от обобщенных скоростей, то

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} (T - \Pi) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}$$

и поэтому предыдущее равенство примет следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial(T - \Pi)}{\partial q_i} = 0.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$L = T - \Pi, \quad (7.21)$$

которую называют функцией Лагранжа, или кинетическим потенциалом. Тогда уравнения (7.20) запишутся так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s). \quad (7.22)$$

Из (7.22) следует, что состояние механической системы, на которую действуют только потенциальные силы, определяются заданием одной только функции Лагранжа, так как, зная эту функцию, можно составить дифференциальные уравнения движения системы.

5. Примеры решения задач

Пример 1. Определить закон изменения угловой скорости ω кривошипа OC эпициклического механизма (рис. 7.2), если масса кривошипа равна M_1 , а масса сателлита M_2 . Кривошип считать однородным тонким стержнем, сателлит – однородным диском; вращающий момент $M_{ep} = M_0 - \chi \omega$, где M_0 и χ – положительные постоянные, а ω – угловая скорость кривошипа; момент трения M_{mp} на оси сателлита считать постоянным; механизм расположен в горизонтальной плоскости. В начальный момент времени угловая скорость кривошипа равна нулю.

Решение. Система имеет одну степень свободы. За обобщенную координату возьмем угол поворота кривошипа.

Кинетическая энергия системы $T = T_1 + T_2$. Кривошип совершает вращательное движение вокруг оси O , поэтому

$$T_1 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\omega}_2^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}^2,$$

где $J_1 = 1/3 M_1(r + R)^2$ – момент инерции кривошипа относительно оси вращения. Подставляя значение J_1 в выражение T_1 , получим

$$T_1 = \frac{1}{6} M_1 (r + R)^2 \dot{\phi}^2.$$

Сателлит 2 движется плоскопараллельно, поэтому его кинетическая энергия T_2 равна

$$T_2 = \frac{1}{2} M_2 v_c^2 + \frac{1}{2} J_c \dot{\omega}_2^2,$$

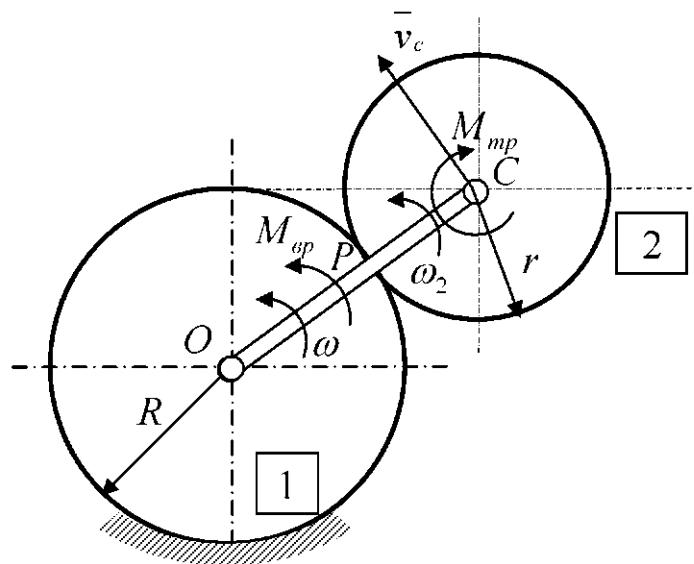


Рис. 7.2

где v_c – скорость центра масс сателлита, J_c – его момент инерции относительно оси, проходящий через точку С перпендикулярно к плоскости движения, ω_2 – угловая скорость сателлита.

Имеем

$$v_c = (r + R)\dot{\varphi}, J_c = \frac{1}{2}M_2 r^2, \omega_2 = \frac{R+r}{r}\dot{\varphi}.$$

Следовательно,

$$T_2 = \frac{1}{2}M_2(r+R)^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{4}M_2r^2\frac{(r+R)^2}{r^2}\dot{\varphi}^2 = \frac{3}{4}M_2(r+R)^2\dot{\varphi}^2.$$

Складывая T_1 и T_2 , найдем кинетическую энергию T механизма:

$$T = \frac{1}{2}J_{np}\dot{\varphi}^2,$$

где приведенный момент инерции J_{np} системы равен

$$J_{np} = \left(\frac{1}{3}M_1 + \frac{3}{2}M_2\right)(r+R)^2.$$

Обобщенная сила Q равна

$$\begin{aligned} Q_\varphi &= \frac{\sum \delta A_k}{\delta \varphi} = \frac{M_{ep}\delta\varphi - M_{mp}\frac{R+r}{r}\delta\varphi}{\delta\varphi} = \\ &= M_{ep} - \frac{R+r}{r}M_{mp} = M_0 - \chi\dot{\varphi} - \frac{R+r}{r}M_{mp}. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_\varphi.$$

Вычислим производные, входящие в правую часть уравнения Лагранжа,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{np}\dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J_{np}\ddot{\varphi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

После подстановки получаем дифференциальное уравнение движения эпициклического механизма

$$J_{np}\ddot{\varphi} = M_0 - \frac{(R+r)}{r}M_{mp} - \chi\dot{\varphi}.$$

При постоянном моменте M_{mp} это уравнение легко интегрируется. Считая, что движение началось из состояния покоя, получим

$$\dot{\varphi} = \omega = \frac{1}{\chi} \left(M_0 - \frac{(R+r)}{r} M_{mp} \right) \left(1 - e^{-\frac{\chi}{J_{mp}} t} \right).$$

Пример 2. Найти закон движения шарика M вдоль трубы OA , вращающейся равномерно в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω (рис. 7.3). В начальный момент шарик находится от оси O на расстоянии a и его скорость вдоль трубы равна нулю.

Решение. На примере этой задачи покажем, как можно составлять уравнения относительного движения с помощью уравнений Лагранжа, не вводя в рассмотрение переносную и кориолисову силы инерции. Положение шарика в относительном движении вдоль трубы определяется координатой x . Следовательно, движение определяется одним уравнением Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (*)$$

На перемещении, при котором x получает приращение δx , действующие силы работы не совершают. Следовательно, $\sum \delta A_k = 0$ и $Q_x = 0$.

Кинетическую энергию шарика вычислим в его абсолютном движении. Тогда

$$T = \frac{1}{2} m v^2,$$

где v – абсолютная скорость шарика, причем векторно $\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$.

В данном случае численно $v_e = \omega \cdot OM = \omega x$, $v_r = \dot{x}$, а по направлению \bar{v}_e и \bar{v}_r взаимно перпендикулярны. Следовательно,

$$T = \frac{1}{2} m (\omega^2 x^2 + \dot{x}^2).$$

Вычислим производные, входящие в левую часть уравнения Лагранжа,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = m \ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = m \omega^2 x.$$

Подставляя все найденные значения в уравнение (*) и сокращая на m , получим дифференциальное уравнение относительного движения шарика в виде:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0.$$

Интегрируя это уравнение и определяя постоянные интегрирования по начальным условиям (при $t = 0, x = a, \dot{x} = 0$), найдем окончательно закон движения шарика вдоль трубы

$$x = \frac{a}{2} (e^{\omega t} + e^{-\omega t}).$$

Пример 3. Блок, представляющий собой однородный диск радиусом r и массой M , может вращаться вокруг горизонтальной оси O (рис. 7.4). Через блок перекинута нерастяжимая нить, к концу которой прикреплен груз массой M_1 . Другой конец A нити прикреплен к пружине с коэффициентом жесткости c . Определить движение груза, которое возникает, если в положении покоя системы ему сообщить начальную скорость v_0 , направленную вниз. Массами пружины и нити, а также трением пренебречь; проскальзывание нити отсутствует.

Решение. Примем за обобщенную координату системы вертикальное отклонение z груза от положения покоя. Рассматриваемая система находится под действием консервативных сил — сил тяжести и силы упругости.

Воспользуемся уравнением Лагранжа в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial T}{\partial z} = - \frac{\partial \Pi}{\partial z}.$$

Кинетическая энергия системы определяется как сумма кинетической энергии груза, совершающего поступательное движение, и кинетической энергии блока, вращающегося вокруг неподвижной оси O

$$T = \frac{1}{2} M_1 v_B^2 + \frac{1}{2} J_0 \omega^2.$$

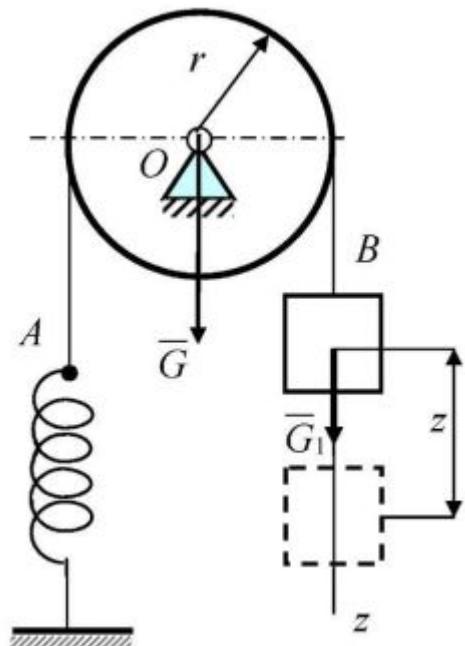


Рис. 7.4

Здесь $v_B = \dot{z}$; $\omega = \frac{\dot{z}}{r}$; $J_0 = \frac{Mr^2}{2}$.

Следовательно,

$$T = \frac{1}{2}M_1 \dot{z}^2 + \frac{1}{2} \frac{Mr^2}{2} \frac{\dot{z}^2}{r^2} = \frac{1}{2}(M_1 + \frac{M}{2})\dot{z}^2.$$

Вычислим производные, входящие в левую часть уравнения Лагранжа,

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} = (M_1 + \frac{M}{2})\dot{z}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) = (M_1 + \frac{M}{2})\ddot{z}; \quad \frac{\partial T}{\partial z} = 0.$$

Потенциальную энергию системы определим как сумму потенциальных энергий Π_I , соответствующей силам тяжести, потенциальной энергии Π_{II} , соответствующей силам упругости. За нулевое положение примем положение покоя системы. Потенциальную энергию системы Π_I найдем как работу, совершающую силами G_1 и G при переходе системы из рассматриваемого положения в нулевое

$$\Pi_I = -G_1 z.$$

Потенциальная энергия Π_{II} определяется как работа силы \bar{F}_y при переходе системы в нулевое положение

$$\Pi_{II} = \frac{c(f_{cm} + z)^2}{2} - \frac{cf_{cm}^2}{2} = cf_{cm}z + \frac{cz^2}{2}.$$

Суммарная потенциальная энергия

$$\Pi = \Pi_I + \Pi_{II} = -G_1 z + cf_{cm}z + \frac{cz^2}{2}.$$

Так как $G_1 = cf_{cm}$, то окончательно $\Pi = \frac{cz^2}{2}$ и $\frac{\partial \Pi}{\partial z} = cz$.

Подставив найденные значения в левую и правую части уравнения Лагранжа, получим

$$(M_1 + \frac{M}{2})\ddot{z} = -cz,$$

или

$$\ddot{z} + \frac{c}{M_1 + (M/2)}z = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением малых свободных колебаний системы:

$$\ddot{z} + k^2 z = 0,$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{M_1 + (M/2)}} = \sqrt{\frac{2c}{2M_1 + M}}$ – циклическая частота свободных колебаний.

Период свободных колебаний системы

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi \sqrt{\frac{2M_1 + M}{2c}}.$$

Решение полученного дифференциального уравнения имеет вид:

$$z = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt.$$

Дифференцируя это выражение по t , получаем

$$\dot{z} = -kC_1 \sin kt + kC_2 \cos kt.$$

Подставляя в эти уравнения начальные условия: $t = 0$, $z_0 = 0$, $\dot{z}_0 = v_0$, находим постоянные интегрирования:

$$C_1 = 0, \quad C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

При найденных значениях C_1 и C_2 уравнение движения груза получает вид:

$$z = \frac{v_0}{k} \sin kt.$$

Пример 4. Составить дифференциальные уравнения движения системы, состоящей из груза 1 массой M_1 , надетого на однородный стержень OB длиной l и массой M_2 . Груз связан с неподвижной точкой O пружиной жесткостью c и может скользить вдоль стержня, а стержень качается в вертикальной плоскости вокруг оси O (рис. 7.5). Длина пружины в ненапряженном состоянии равна a . Массой пружины и силами трения пренебречь.

Решение. Система имеет две степени

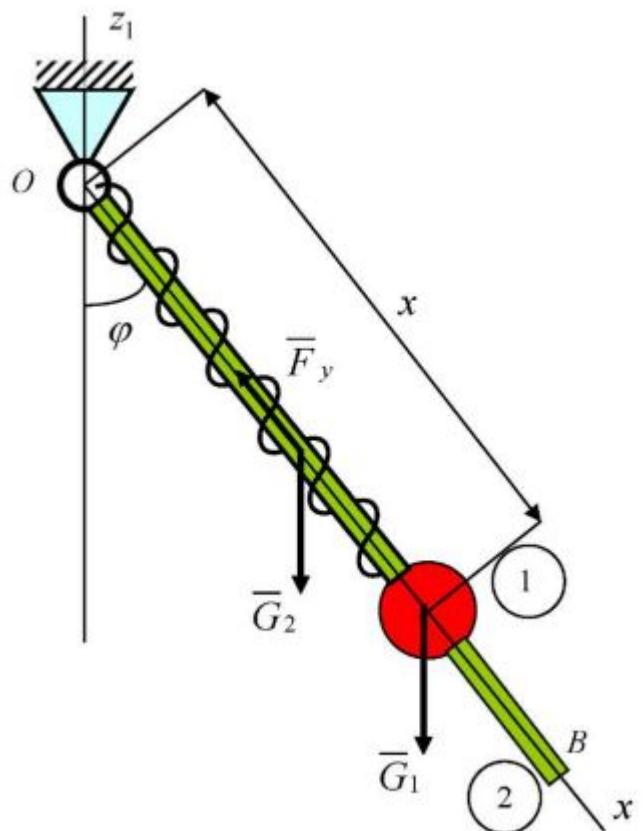


Рис. 7.5

свободы; за обобщенные координаты примем угол φ и расстояние x .

Тогда уравнения Лагранжа запишутся в виде:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \varphi} = Q_{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x. \quad (*)$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_1 + T_2,$$

где $T_1 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2$ – кинетическая энергия груза, причем v_1 – абсолютная скорость груза,

Найдем эту скорость по формуле сложений скоростей:

$\bar{v} = \bar{v}_e + \bar{v}_r$. Переносная скорость $v_e = x \dot{\varphi}$, относительная $v_r = \dot{x}$. Так как v_e и v_r взаимно перпендикулярны, то $v_1^2 = x^2 \dot{\varphi}^2 + \dot{x}^2$, и поэтому

$$T_1 = \frac{1}{2} M_1 x^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2.$$

Стержень ОВ совершает вращательное движение, поэтому $T_2 = J_0 \dot{\varphi}^2 / 2$, где J_0 – осевой момент инерции стержня относительно оси, проходящей через точку O , который равен $J_0 = \frac{1}{3} M_2 l^2$, и кинетическая энергия стержня будет равна

$$T_2 = \frac{1}{6} M_2 l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Кинетическая энергия системы

$$T = \frac{1}{2} M_1 x^2 \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} M_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{6} M_2 l^2 \dot{\varphi}^2.$$

Вычислим производные левой части уравнений (*)

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = M_1 \dot{x}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = M_1 \ddot{x}; \quad \frac{\partial T}{\partial x} = M_1 x \dot{\varphi}^2; \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = M_1 x^2 \dot{\varphi} + \frac{1}{3} M_2 l^2 \dot{\varphi}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} \right) = 2M_1 x \dot{x} \dot{\varphi} + M_1 x^2 \ddot{\varphi} + \frac{1}{3} M_2 l^2 \ddot{\varphi}.$$

Для вычисления обобщенных сил Q_φ и Q_x изобразим активные силы: $G_1 = M_1 g$, $G_2 = M_2 g$, $F_y = c(x - a)$. В данном примере силы, действующие на систему, потенциальны. Если направить ось z_1 из точки O вверх, то силовая функция системы запишется в виде:

$$U = -\frac{c}{2}(x - a)^2 + M_1 g x \cos \varphi + \frac{1}{2} M_2 g l \cos \varphi.$$

Из выражения обобщенных сил найдем по формулам (7.7):

$$Q_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -c(x - a) + M_1 g \cos \varphi,$$

$$Q_\varphi = \frac{\partial U}{\partial \varphi} = -g(M_1 x + M_2 \frac{l}{2}) \sin \varphi.$$

Подставим эти значения в уравнения Лагранжа и получим искомые дифференциальные уравнения движения нашей системы:

$$(M_1 x^2 + \frac{1}{3} M_2 l^2) \ddot{\varphi} + 2M_1 x \dot{x} \dot{\varphi} = -g(M_1 x + M_2 \frac{l}{2}) \sin \varphi,$$

$$M_1 \ddot{x} - M_1 x \dot{\varphi}^2 = M_1 g \cos \varphi - c(x - a).$$

Это система нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, и ее решение представляет большие математические трудности.

Пример 5. Лебедка, установленная на упругой балке AB , предназначена для подъема груза 1 массой M_1 (рис. 7.6). Барабан 2 лебедки можно рассматривать как однородный круглый диск радиусом r и массой M_2 . Масса невращающихся частей лебедки равна M_3 . Найти закон движения груза 1, если к барабану лебедки приложен постоянный момент M ; движение начинается из состояния покоя, статический прогиб балки под действием сил тяжести лебедки и груза равен δ_{cm} , массой балки пренебречь.

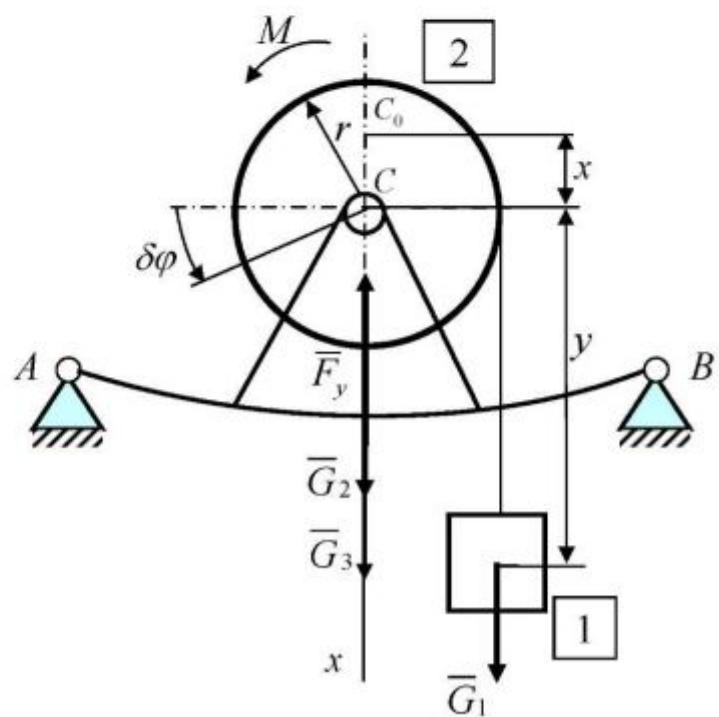


Рис. 7.6

Решение. Система имеет две степени свободы, и ее положение определяется двумя обобщенными координатами, а именно x и y , где x – смещение оси барабана лебедки относительно ее положения статического равновесия, а y – расстояние груза от оси лебедки. Уравнения Лагранжа запишутся так:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial T}{\partial x} = Q_x, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial T}{\partial y} = Q_y.$$

Для определения обобщенной силы Q_x дадим координате x приращение δx , оставляя координату y без изменения, и подсчитаем сумму элементарных работ сил тяжести $\bar{G}_1 = M_1 \bar{g}$, $\bar{G}_2 = M_2 \bar{g}$, $\bar{G}_3 = M_3 \bar{g}$ и силы упругости балки \bar{F}_y на этом перемещении:

$$Q_x = \frac{\sum \delta A_k^a}{\delta x} = \frac{(G_1 + G_2 + G_3 - F_y) \delta x}{\delta x} =$$

$$= \frac{[G_1 + G_2 + G_3 - \frac{G_1 + G_2 + G_3}{\delta_{cm}} (\delta_{cm} + x)] \delta x}{\delta x} = -g(M_1 + M_2 + M_3) \frac{x}{\delta_{cm}},$$

где $\frac{G_1 + G_2 + G_3}{\delta_{cm}} = c$ – коэффициент жесткости балки.

Для определения Q_y дадим координате y приращение δy , оставляя координату x без изменения. При этом барабан лебедки повернется на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta y}{r}.$$

Тогда

$$Q_y = \frac{-G_1 \delta y + M \delta\varphi}{\delta y} = \frac{M}{r} - M_1 g.$$

Кинетическая энергия системы равна

$$T = T_1 + T_2 + T_3,$$

где $T_1 = \frac{1}{2} M_1 (\dot{x} + \dot{y})^2$ – кинетическая энергия груза,

$T_2 = \frac{1}{2} M_2 v_c^2 + \frac{1}{2} \frac{M_2 r^2}{2} \dot{\phi}^2 = \frac{1}{2} M_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{4} M_2 \dot{y}^2$ – кинетическая энергия барабана лебедки,

$$T_3 = \frac{1}{2} M_3 \dot{x}^2 \text{ – кинетическая энергия невращающихся частей лебедки.}$$

Итак, $T = \frac{1}{2} M_1 (\dot{x} + \dot{y})^2 + \frac{1}{4} M_2 \dot{y}^2 + \frac{M_2 + M_3}{2} \dot{x}^2$.

Далее находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = (M_1 + M_2 + M_3) \dot{x} + M_1 \dot{y}, \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = M_1 \dot{x} + (M_1 + 0,5 M_2) \dot{y}, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) = (M_1 + M_2 + M_3) \ddot{x} + M_1 \ddot{y}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) = M_1 \ddot{x} + (M_1 + 0,5 M_2) \ddot{y}. \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в уравнения Лагранжа, получаем

$$(M_1 + M_2 + M_3) \ddot{x} + M_1 \ddot{y} = -g(M_1 + M_2 + M_3) \frac{x}{\delta_{cm}},$$

$$M_1 \ddot{x} + (M_1 + 0,5 M_2) \ddot{y} = \frac{M}{r} - M_1 g.$$

Исключив из этой системы \ddot{y} , найдем для определения $x(t)$ уравнение

$$\text{где } k^2 = \frac{g / \delta_{cm}}{1 - \frac{M_1^2}{(M_1 + 0,5 M_2)(M_1 + M_2 + M_3)}}, \quad \ddot{x} + k^2 x = -b,$$

$$b = \frac{1 - \frac{M}{M_1 gr}}{\frac{(M_1 + M_2 + M_3)(M_1 + 0,5M_2)}{M_1^2} - 1} g.$$

При нулевых начальных условиях ($t = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 0$) это уравнение имеет решение

$$x = -\frac{b}{k^2}(1 - \cos kt).$$

Дважды интегрируя второе уравнение системы, получим

$$M_1 x + (M_1 + 0,5M_2)y = (\frac{M}{r} - M_1 g)\frac{t^2}{2}.$$

Эта формула определяет закон движения груза 1 относительно подвижной оси барабана лебедки. Для абсолютного движения груза будет иметь выражение

$$y = y + x = -\frac{0,5M_2}{M_1 + 0,5M_2}\frac{b}{k^2}(1 - \cos kt) + \frac{M - M_1 gr}{M_1 + 0,5M_2}\frac{t^2}{2r}.$$

ГЛАВА VIII. ТЕОРИЯ УДАРА

1. Явление удара. Явление, при котором за ничтожно малый промежуток времени скорости части или всех точек системы изменяются на конечные величины, называется ударом.

Изменение скоростей точек при ударе на конечные величины связано с большими ударными ускорениями этих точек, возникновение которых требует больших ударных сил. Ударная сила быстро возрастает от нуля в момент начала удара до максимального значения, затем также быстро уменьшается до нуля в конце удара. Во многих случаях не требуется детального знания закона изменения ударной силы. Достаточно знать только суммарный импульс этой быстро меняющейся силы за время удара или ударный импульс, который определяется формулой

$$\bar{S} = \int_0^\tau \bar{F} dt, \quad (8.1)$$

где \bar{F} – ударная сила, τ – время удара.

Большая ударная сила дает конечный ударный импульс за малое время удара. Импульс неударной силы, например силы тяжести тела, за время удара имеет порядок величины τ , т.е. является величиной малой по сравнению с ударными импульсами. Поэтому импульсами неударных сил за время удара τ можно пренебречь.

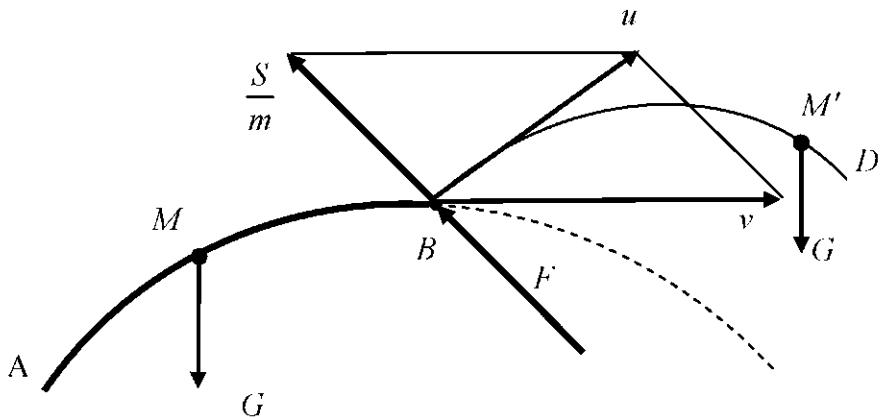


Рис. 8.1

Пусть материальная точка M массой m движется по траектории AB (рис. 8.1). Положим, что в некоторый момент на точку M , занимавшую положение B и имевшую скорость \bar{v} , начала действовать ударная сила \bar{F} . Под действием ударной силы \bar{F} и неударной \bar{G} точка изменит скорость, которая сразу после удара стала u , а траектория точки получит излом, так как после удара точка продолжает двигаться по участку траектории BD .

Определим изменение количества движения точки за время удара τ . По теореме об изменении количества движения материальной точки имеем:

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \int_0^\tau \bar{F} dt + \int_0^\tau \bar{G} dt.$$

Пренебрегая импульсом неударной силы \bar{G} по сравнению с импульсом ударной силы, получим следующую теорему об изменении количества движения точки при ударе:

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}, \quad (8.2)$$

т.е. изменение количества движения точки за время удара равно ударному импульсу, приложенному к точке. Изменение скорости точки за малое время удара τ имеет конечную величину и равно $\bar{u} - \bar{v} = \frac{\bar{S}}{m}$. Так как продолжительность

удара τ ничтожно мала, а скорость точки в течение этого промежутка времени имеет конечную величину, то перемещение точки за время удара весьма мало и им можно пренебречь.

В простейших случаях удар проявляется как почти мгновенное наложение или снятие связей. Примером удара, связанного с мгновенным наложением связей, может служить столкновение поступательно движущегося тела с другим телом.

Явление удара широко используется в технике при ковке металла, забивке свай, гвоздей, дроблении породы и т.д. Это же явление часто является нежелательным, особенно при ударе деталей в машинах друг о друга вследствие люфтов, при ударе колес транспорта о неровности дороги, стыки рельсов и т.п.

Удар связан с процессом деформации тел вблизи точки их соприкосновения и распространением волн сжатия внутри этих тел. Этот процесс не может быть изучен в рамках механики абсолютно твердого тела, отвлекающейся от действительных физических свойств тела и, в частности, от деформируемости тел. Предметом изучения теоретической механики служит лишь сравнение движения точки или системы точек до удара и после него; при этом явление удара рассматривается как некоторый скачкообразный процесс, продолжительность которого бесконечно мала. На самом деле продолжительность удара представляет собой хотя и очень малую, но конечную величину, зависящую от многочисленных факторов: упругих характеристик материала движущихся тел, их формы и размеров, относительной скорости сближения тел и других факторов. Длительность удара составляет обычно десятие и меньшие части долей секунды.

Многие величины, характеризующие удар, с достаточной точностью могут быть получены из общих теорем динамики.

2. Удар точки о неподвижную поверхность. Коэффициент восстановления при ударе и его опытное определение

Процесс удара точки о неподвижную поверхность можно разделить на фазу деформации и фазу восстановления. Фаза деформации продолжительностью τ_1 отсчитывается от момента начала удара до момента наибольшей деформации тела, которое принимается за материальную точку. В конце этой фазы скорость тела при ударе о неподвижную поверхность равна нулю. В течение фазы восстановления τ_2 материальное тело, если оно упругое восстанавливается в какой-то мере в свою первоначальную форму. Если форма тела восстанавливается полностью, то удар называют абсолютно упругим. Если процесс удара

имеет только одну фазу деформации, т.е. форма тела совсем не восстанавливается, то такой удар называют неупругим. В случае если форма тела восстанавливается не полностью, а только частично, то удар называют частично упругим или просто упругим. Удар называют прямым, если скорость точки \bar{v} в начале процесса удара направлена по нормали к поверхности в точке удара B (рис. 8.2). Если удар в какой-то степени упругий, то в конце удара точка отделится от поверхности, имея скорость \bar{u} , направленную тоже по нормали к поверхности.

Отношение модуля скорости точки в конце удара к модулю ее скорости в начале удара при прямом ударе о неподвижную поверхность называют коэффициентом восстановления при ударе, т.е.

$$k = \frac{u}{v}. \quad (8.3)$$

Если $k = 1$, то удар абсолютно упругий. В этом случае $u = v$ и при ударе точки изменяется только направление скорости на противоположное. При $k = 0$ удар абсолютно неупругий. Скорость точки при таком ударе о неподвижную поверхность после удара равна нулю ($u = 0$).

Коэффициенту восстановления при ударе можно дать и другую физическую интерпретацию. На точку при ее прямом ударе о неподвижную поверхность со стороны поверхности действует ударная сила реакции поверхности \bar{N} . Она изменяется по величине в течение удара, но все время направлена по нормали к поверхности.

Обозначая \bar{N}^I ударную реакцию поверхности, действующую на точку в течение первой фазы, а \bar{N}^{II} – в течение второй фазы, по формуле (8.1) найдем импульсы этой ударной силы, соответствующие первой и второй fazам удара

$$\bar{S}^I = \int_0^{\tau_1} \bar{N}^I dt; \quad \bar{S}^{II} = \int_0^{\tau_2} \bar{N}^{II} dt.$$

где τ_1 – время фазы деформации, а τ_2 – время фазы восстановления.

Применим к первой и второй fazам удара теорему об изменении количества движении точки в проекциях на направление внешней нормали к поверх-

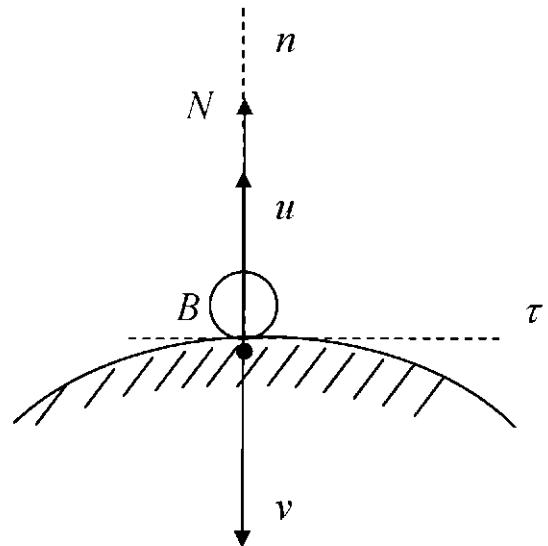


Рис. 8.2

ности, учитывая, что скорости точки в конце первой и начале второй фазы равны нулю:

$$0 - mv_n = S_n^I,$$

$$mu_n - 0 = S_n^{II}.$$

Подставляя значения проекций в виде $v_n = -v$, $u_n = u$, $S_n^I = S^I$, $S_n^{II} = S^{II}$, получим

$$mv = S^I; mu = S^{II},$$

отсюда

$$k = \frac{u}{v} = \frac{S^{II}}{S^I}. \quad (8.4)$$

Формула (8.4) дает выражение коэффициента восстановления при прямом ударе через ударные импульсы: коэффициент восстановления при прямом ударе точки о неподвижную поверхность равен отношению модулей импульсов ударной реакции поверхности за вторую и первую фазы удара.

Так как полный ударный импульс S складывается из импульсов S^I и S^{II} то

$$S = S^I + S^{II} = mv\left(1 + \frac{u}{v}\right) = mv(1 + k). \quad (8.5)$$

При $k=1$, $S=2mv$; при $k=0$, $S=mv$, таким образом, ударный импульс при неупругом ударе в два раза меньше импульса при абсолютно упругом ударе.

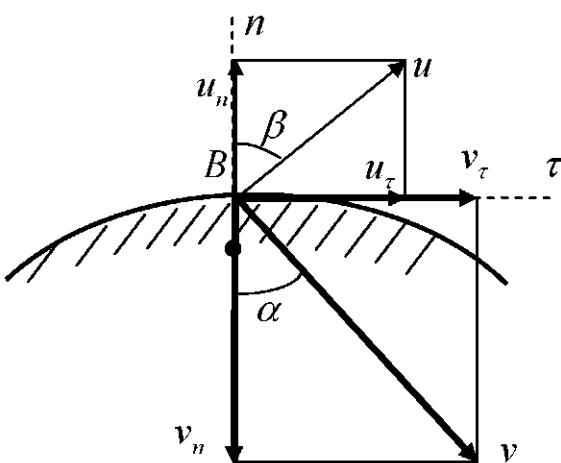


Рис.8.3

Рассмотрим случай непрямого удара, когда скорость точки \bar{v} в начале удара образует с внешней нормалью к поверхности в точке удара угол α , который назовем углом падения (рис. 8.3). Такой удар называют косым. В общем случае скорость точки \bar{u} в конце удара составит с нормалью к поверхности угол β , который назовем углом отражения.

Скорости точки в начале и конце удара можно разложить на составляющие по осям τ и n :

$$\bar{v} = \bar{\tau} v_\tau + \bar{n} v_n; \bar{u} = \bar{\tau} u_\tau + \bar{n} u_n.$$

Коэффициентом восстановления при косом ударе называют величину

$$k = \frac{u_n}{v_n} = \frac{S_n^H}{S_n^I}, \quad (8.6)$$

где S_n^H и S_n^I – проекции ударных импульсов на внешнюю нормаль к поверхности за вторую и первую фазы удара.

При наличии ударного трения $u_\tau < v_\tau$. Если не учитывать ударное трение, т.е. считать поверхность абсолютно гладкой, то реакция поверхности будет иметь только нормальную составляющую, а её проекция на касательную $B\tau$ равна нулю. На основании теоремы о проекции количества движения $mu_\tau - mv_\tau = 0$, или $u_\tau = v_\tau$.

Тогда

$$\tan \alpha = \frac{v_\tau}{|v_n|}; \tan \beta = \frac{u_\tau}{|u_n|} = \frac{v_\tau}{k|v_n|} = \frac{1}{k} \tan \alpha. \quad (8.7)$$

Формула (8.7) выражает зависимость между углами падения и отражения при отсутствии ударного трения.

При упругом ударе ($k < 1$) $\tan \beta > \tan \alpha$ и $\beta > \alpha$, т.е. угол отражения больше угла падения. В случае абсолютно упругого удара: $k = 1$, $\tan \beta = \tan \alpha$ и $\beta = \alpha$, т.е. угол отражения равен углу падения.

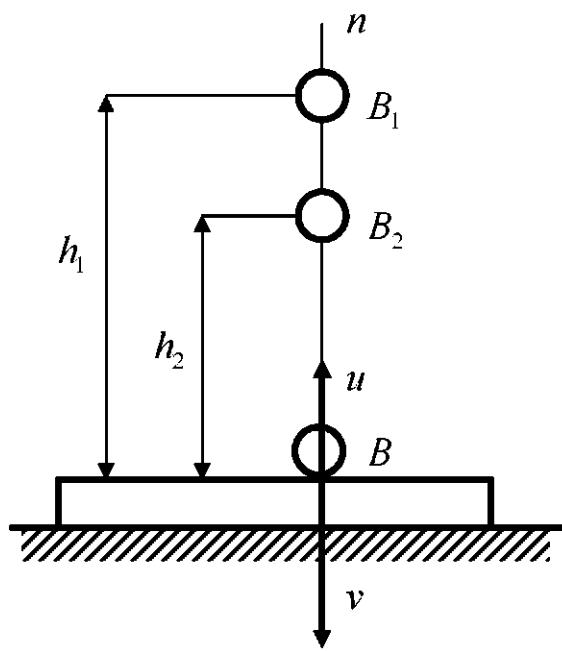


Рис.8.4

Коэффициент восстановления k характеризует упругие свойства соударяющихся тел. Для различных материалов он разный и определяют его с помощью следующего простого опыта (рис. 8.4). Шарик из испытуемого материала дают возможность падать без начальной скорости с высоты h_1 на массивную горизонтальную плиту из того же или другого испытуемого материала и определяют высоту h_2 , на которую он поднимется после удара. Тогда по формуле Галилея

$$v = \sqrt{2gh_1}, \quad u = \sqrt{2gh_2},$$

и для коэффициента восстановления имеем

$$k = \frac{u}{v} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}. \quad (8.7)$$

Опыты показали, что коэффициент восстановления зависит не только от материала соударяющихся тел, но и от массы, формы тел, скорости соударения и других факторов.

3. Теорема об изменении количества движения механической системы при ударе

Пусть в некоторый момент времени к точкам механической системы одновременно приложены ударные импульсы. Определим изменение количества движения рассматриваемой системы, вызванное этими импульсами. Разделим ударные силы на внешние и внутренние. Применяя теорему об изменении количества движения для удара к каждой точке системы, получим

$$m_k \bar{u}_k - m_k \bar{v}_k = \bar{S}_k^e + \bar{S}_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где \bar{S}_k^e и \bar{S}_k^i – ударные импульсы внешних и внутренних сил. Импульсами неударных сил за время удара будем пренебрегать. Суммируя составленные n уравнений, получаем

$$\sum m_k \bar{u}_k - \sum m_k \bar{v}_k = \sum \bar{S}_k^e + \sum \bar{S}_k^i.$$

Обозначая количество движения системы в начале удара и в конце его соответственно:

$$\bar{Q}_0 = \sum m_k \bar{v}_k; \quad \bar{Q}_1 = \sum m_k \bar{u}_k,$$

и учитывая, что по свойству внутренних сил, в том числе и ударных $\sum \bar{S}_k^i = 0$, имеем

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum \bar{S}_k^e. \quad (8.8)$$

Уравнение (8.8) выражает теорему об изменении количества движения механической системы при ударе: изменение количества движения механической системы за время удара равно геометрической сумме всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы.

Векторному уравнению (8.8) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$Q_{1x} - Q_{0x} = \sum S_{kx}^e, \quad Q_{1y} - Q_{0y} = \sum S_{ky}^e, \quad Q_{1z} - Q_{0z} = \sum S_{kz}^e. \quad (8.9)$$

Эти уравнения показывают, что изменение проекции количества движения системы на какую-либо ось равно сумме проекций на ту же ось всех внешних ударных импульсов, приложенных к системе.

Количество движения механической системы можно выразить по формулам:

$$\bar{Q}_1 = M \bar{u}_c \text{ и } \bar{Q}_0 = M \bar{v}_c,$$

где M – масса системы; \bar{v}_c и \bar{u}_c – скорости центра масс системы в начале и конце удара.

Подставив эти значения в уравнение (8.8), получим

$$M(\bar{u}_c - \bar{v}_c) = \sum \bar{S}_k^e. \quad (8.10)$$

Уравнение (8.10) определяет изменение скорости центра масс системы при ударе.

Векторному уравнению (8.10) соответствуют три уравнения в проекциях на оси координат:

$$M(u_{cx} - v_{cx}) = \sum S_{kx}^e, \quad M(u_{cy} - v_{cy}) = \sum S_{ky}^e, \quad M(u_{cz} - v_{cz}) = \sum S_{kz}^e. \quad (8.11)$$

При отсутствии внешних ударных импульсов из уравнений (8.8) и (8.10) следует, что

$$\bar{Q}_1 = \bar{Q}_0; \quad \bar{u}_c = \bar{v}_c, \quad (8.12)$$

т.е. количество движения системы и скорость ее центра масс не изменяется, если векторная сумма внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, равна нулю. Из этого следует, что внутренние ударные импульсы не могут изменить ни количество движения системы, ни скорость ее центра масс.

4. Прямой центральный удар двух тел

При соударении двух тел удар называется прямым и центральным, когда общая нормаль к поверхностям тел в точке их касания проходит через их центры масс и когда скорости центров масс обоих тел в начале удара направлены по этой общей нормали. Таким, в частности, будет удар двух поступательно движущихся однородных шаров, массами M_1 и M_2 центры которых до удара двигались вдоль одной и той же прямой со скоростями \bar{v}_1 и \bar{v}_2 (рис. 8.5).

Если $v_1 > v_2$, то в некоторый момент произойдет удар этих тел. Пользуясь теоремой импульсов, получим закон сохранения количества движения системы двух тел, применив ее к каждому телу в отдельности

$$M_1 \bar{u}_1 - M_1 \bar{v}_1 = \bar{S}_1; \quad M_2 \bar{u}_2 - M_2 \bar{v}_2 = \bar{S}_2. \quad (8.13)$$

По закону о равенстве действия и противодействия имеем $\bar{S}_1 = -\bar{S}_2$, поэтому из (8.13) получаем

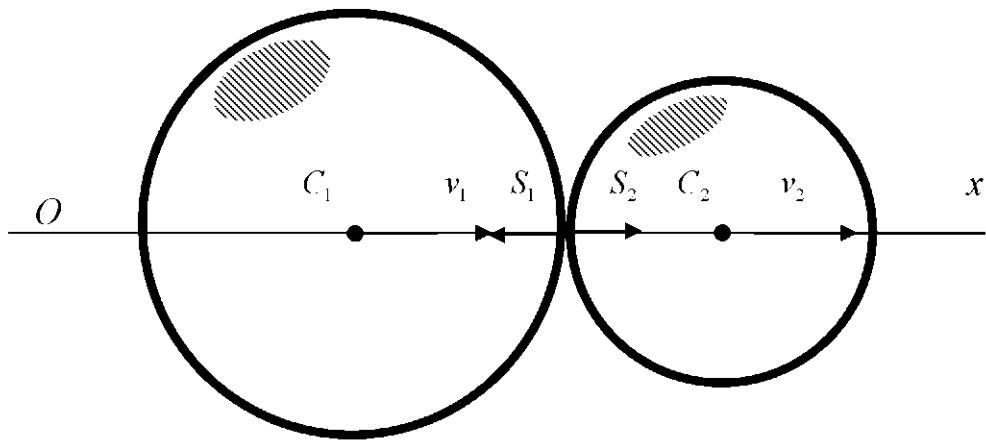


Рис. 8.5

$$M_1 \bar{u}_1 + M_2 \bar{u}_2 = M_2 \bar{v}_2 + M_1 \bar{v}_1, \quad (8.14)$$

т.е. количество движения при ударе двух тел не изменяется, так как силы взаимодействия соударяющихся тел являются для рассматриваемой системы внутренними силами.

От момента соприкосновения тел происходит смятие тел до тех пор, пока их скорости не сравняются между собой. Общую скорость тел в момент наибольшей деформации обозначим \bar{u} . Если удар неупругий то, начиная с этого момента, тела движутся как одно целое, не отделяясь друг от друга, и явление удара на этом заканчивается.

Упругий удар не заканчивается в момент, когда скорости соударяющихся тел становятся равными. Начиная с этого момента, происходит восстановление формы за счет накопившейся в телах потенциальной энергии упругой деформации. В некоторый момент времени тела отделяются друг от друга имея, различные скорости \bar{u}_1 и \bar{u}_2 , направленные так же, как и скорости \bar{v}_1 и \bar{v}_2 , по общей нормали к поверхностям соударяющихся тел в точке касания.

Пользуясь теоремой об изменении количества движения системы, определим u_1 и u_2 скорости тел в конце удара. Воспользуемся первой формулой уравнений (8.9) для каждого тела для первой и второй фаз в проекции на ось x , совпадавшую с линией удара.

$$\left. \begin{array}{l} 1) M_1(u - v_1) = -S_1^I, \\ 2) M_1(u_1 - u) = -S_1^{II}, \\ 3) M_2(u - v_2) = S_2^I, \\ 4) M_2(u_2 - u) = S_2^{II}, \end{array} \right\} \quad (8.15)$$

где u – общая скорость тел в конце первой фазы; $S_1^I, S_2^I, S_1^{II}, S_2^{II}$ – ударные импульсы соответственно за первую и вторую фазы удара.

Для определения u воспользуемся формулой (8.14), записав ее для первой фазы удара в проекции на ось Ox

$$(M_1 + M_2)u = M_1 v_1 + M_2 v_2,$$

откуда

$$u = \frac{M_1 v_1 + M_2 v_2}{M_1 + M_2}. \quad (8.16)$$

Разделив равенство 2 на равенство 1, а равенство 4 на 3 системы уравнений (8.15), получим

$$\frac{u_1 - u}{u - v_1} = k \text{ и } \frac{u_2 - u}{u - v_2} = k, \quad (a)$$

отсюда

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = u + k(u - v_1) = u(1 + k) - kv_1, \\ u_2 = u + k(u - v_2) = u(1 + k) - kv_2. \end{array} \right\} \quad (8.17)$$

Подставляя значения u , получим окончательно скорости тел в конце удара:

$$\left. \begin{array}{l} u_1 = v_1 - (1 + k) \frac{M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2), \\ u_2 = v_2 + (1 + k) \frac{M_1}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2). \end{array} \right\} \quad (8.18)$$

Взяв разность формул системы (8.17), получим формулу для коэффициента восстановления для случая удара двух тел

$$k = \frac{u_1 - u_2}{v_2 - v_1} = - \frac{u_1 - u_2}{v_1 - v_2}. \quad (8.19)$$

Таким образом, коэффициент восстановления при ударе двух тел равен отношению модулей относительных скоростей тел в конце и начале удара.

Определим модуль ударного импульса, приложенного к каждому телу, за все время удара, сложив равенства (3) и (4) системы (8.15) и взяв значение u_2 из (8.18)

$$S_1 = S_2 = S_2^I + S_2^{II} = M_2(u_2 - v_2) = (1 + k) \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2). \quad (8.20)$$

При неупругом ударе $k = 0$ и формула (8.20) принимает вид:

$$S_1 = S_2 = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2), \quad (8.21)$$

а совместная скорость, с которой будут двигаться тела в конце удара, определяется по формуле (8.16)

При абсолютно упругом ударе $k = 1$ формула (8.20) примет вид:

$$S_1 = S_2 = \frac{2M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_1 - v_2), \quad (8.22)$$

из чего следует, что при абсолютно упругом ударе ударный импульс вдвое больше, чем при неупругом. Это объясняется тем, что при абсолютно упругом ударе к импульсу фазы деформации добавляется импульс фазы восстановления такого же модуля.

5. Потеря кинетической энергии при ударе двух тел. Теорема Карно

Из-за остаточных деформаций и нагревания тел при ударе происходит частичная потеря начальной кинетической энергии соударяющихся тел.

Определим эту потерю, которая происходит при упругом ударе тел, имеющих коэффициент восстановления k .

Кинетическая энергия в начале удара тел равна:

$$T_0 = \frac{1}{2} M_1 v_1^2 + \frac{1}{2} M_2 v_2^2.$$

Кинетическая энергия в конце удара

$$T = \frac{1}{2} M_1 u_1^2 + \frac{1}{2} M_2 u_2^2.$$

Потеря кинетической энергии за время удара

$$\begin{aligned} T_0 - T &= \frac{1}{2} M_1 (v_1^2 - u_1^2) + \frac{1}{2} M_2 (v_2^2 - u_2^2) = \\ &= \frac{1}{2} M_1 (v_1 + u_1)(v_1 - u_1) + \frac{1}{2} M_2 (v_2 + u_2)(v_2 - u_2). \end{aligned}$$

Используя уравнения системы (8.15) и следствия из них, можно вычислить потерю кинетической энергии тел за время удара

$$T_0 - T = (1 - k^2) \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)} (v_1 - v_2)^2. \quad (8.23)$$

Лишь при абсолютно упругом ударе ($k = 1$) $T_0 - T = 0$, т.е. потери кинетической энергии не происходит.

Преобразуем (8.23), используя формулу (8.21) и возведя предварительно обе части ее в квадрат

$$S_1^2 = \frac{M_1^2 M_2^2}{(M_1 + M_2)^2} (v_1 - v_2)^2,$$

откуда

$$\frac{M_1 M_2}{(M_1 + M_2)^2} (v_1 - v_2)^2 = \frac{S_1^2 (M_1 + M_2)}{M_1 M_2} = \frac{S_1^2}{M_1} + \frac{S_1^2}{M_2}.$$

Преобразуем выражение (8.23), используя полученную зависимость, заменяя далее S_1^2 и S_2^2 их значениями

$$\begin{aligned} T_0 - T &= (1 - k^2) \left(\frac{S_1^2}{2M_1} + \frac{S_2^2}{2M_2} \right) = (1 - k^2) \left[\frac{M_1(v_1 - u)^2}{2} + \frac{M_2(v_2 - u)^2}{2} \right] = \\ &= \frac{1 - k^2}{(1 + k)^2} \left[\frac{M_1(v_1 - u)^2(1 + k)^2}{2} + \frac{M_2(v_2 - u)^2(1 + k)^2}{2} \right]. \end{aligned}$$

Используя формулы (8.17), найдем величины $(v_1 - u_1)$ и $(v_2 - u_2)$,

$$\begin{aligned} v_1 - u_1 &= v_1 - u(1 + k) + kv_1 = (v_1 - u)(1 + k), \\ v_2 - u_2 &= v_2 - u(1 + k) + kv_2 = (v_2 - u)(1 + k). \end{aligned} \tag{8.24}$$

На основании формул (8.24) получим

$$T_0 - T = \frac{1 - k}{1 + k} \left[\frac{1}{2} M_1 (v_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_2 - u_2)^2 \right]. \tag{8.25}$$

В этом выражении величины $(v_1 - u_1)$ и $(v_2 - u_2)$ представляют собой скорости, потерянные телами при ударе.

Если обозначить кинетическую энергию тел, соответствующую их потерянным скоростям T^* , где

$$T^* = \frac{1}{2} M_1 (v_1 - u_1)^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_2 - u_2)^2, \tag{8.26}$$

то формула (8.25) примет простой вид:

$$T_0 - T = \frac{1 - k}{1 + k} T^*. \tag{8.27}$$

Из формулы (8.28) следует, что при упругом ударе потеря кинетической энергии тел равна произведению коэффициента $\frac{1-k}{1+k}$ на кинетическую энергию тел T^* , если бы они двигались с потерянными скоростями.

При неупругом ударе ($k = 0$, $v_1 = v_2 = u$) формула (8.27) принимает вид:

$$T_0 - T = \frac{1}{2}M_1(v_1 - u)^2 + \frac{1}{2}M_2(v_2 - u)^2. \quad (8.28)$$

Формула (8.28) выражает теорему Карно: кинетическая энергия, потерянная телами при неупругом ударе, равна той кинетической энергии, которую имела бы система, если бы ее тела двигались с потерянными скоростями.

Рассмотрим частный случай неупрогоудара по телу, которое до удара находилось в покое.

В этом случае $v_2 = 0$ и

$$T_0 = \frac{1}{2}M_1v_1^2, \quad u = \frac{M_1v_1}{M_1 + M_2}.$$

Тогда

$$T = \frac{1}{2}(M_1 + M_2)u^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2 v_1^2}{M_1 + M_2} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \cdot \frac{1}{2} M_1 v_1^2$$

или

$$T = \frac{M_1}{M_1 + M_2} T_0. \quad (8.28')$$

Формула (8.28') показывает, какая энергия остается у системы после удара.

Потеря кинетической энергии при таком ударе равна

$$T_0 - T = T_0 \left(1 - \frac{M_1}{M_1 + M_2} \right) = \frac{M_2}{M_1 + M_2} T_0. \quad (8.29)$$

Отметим два интересных предельных случая.

1). Масса ударяющего тела много больше массы ударяемого ($M_1 \gg M_2$). В этом случае можно считать, что $\frac{M_2}{M_1 + M_2} \approx 0$ и формула (8.29) дает $T_0 - T \approx 0$.

Следовательно, хотя удар и является неупругим, потери кинетической энергии при ударе почти не происходит, и система в конце удара имеет почти ту же кинетическую энергию, что и в начале удара.

На практике это наблюдается при забивке свай, костылей, гвоздей и т.п. Вся кинетическая энергия бабы или кувалды при таком ударе не тратится на деформацию, а передается свае, костылю, гвоздю, которые движутся вместе с забивающими их бабой и кувалдой.

2). Масса ударяющего тела меньше ударяемого ($M_1 \ll M_2$). В этом случае можно считать, что $\frac{M_2}{M_1 + M_2} \approx 1$, и формула (8.29) дает $T_0 - T \approx T_0$, т.е. почти вся энергия тел, которую они имели в начале удара, затрачивается на деформацию тел. Такой случай имеет место при ковке и в других аналогичных примерах. По окончании удара тела можно считать неподвижными.

Рассмотрим пример применения теоремы Карно к системе двух вращающихся тел.

Пусть два тела вращаются вокруг оси (*рис. 8.6.*) $O_1 O_2$ с угловыми скоростями до удара ω_1 и ω_2 в одном и том же направлении и их моменты инерции относительно этой оси соответственно равны J_1 и J_2 .

Считая удар тел выступами при сближении неупругим, определить угловую скорость тел после удара.

Решение. Так как рассматривается неупругий удар, то для решения задачи применим теорему Карно

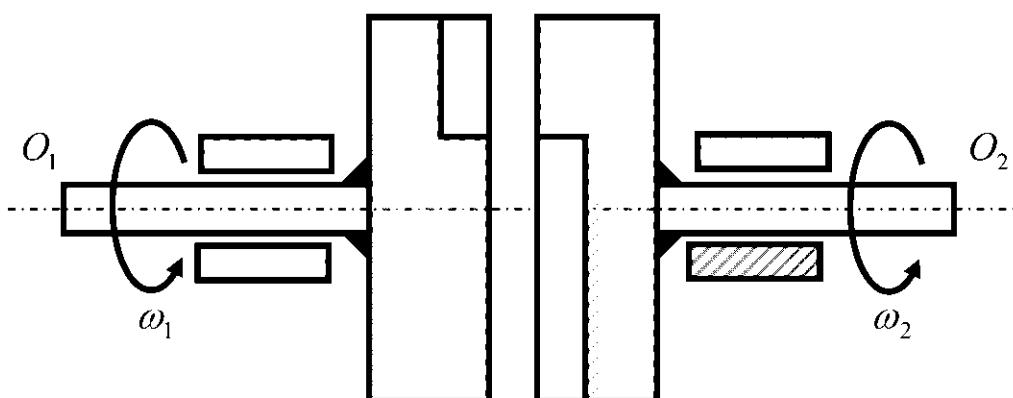


Рис. 8.6

$$\frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} - (J_1 + J_2) \frac{\omega^2}{2} = \frac{J_1}{2} (\omega_1 - \omega)^2 + \frac{J_2}{2} (\omega_2 - \omega)^2, \quad (8.30)$$

где ω — общая угловая скорость тел в конце удара;

$\omega_1 - \omega$ и $\omega_2 - \omega$ — потерянные угловые скорости тел.

После некоторых преобразований из (8.30) получим формулу для угловой скорости тел в конце удара:

$$\omega = \frac{J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2}{J_1 + J_2}. \quad (8.31)$$

Если тела до удара вращались в противоположных направлениях, то в (8.31) следует брать алгебраические значения угловых скоростей.

6. Теорема об изменении кинетического момента механической системы при ударе

Пусть материальная точка под действием ударного импульса испытывает удар. По теореме об изменении количества движения для точки имеем

$$m\bar{u} - m\bar{v} = \bar{S}.$$

Умножим это векторное равенство слева векторно на радиус-вектор точки \bar{r} , который один и тот же в начале и в конце удара. Получаем

$$\bar{r} \times m\bar{u} - \bar{r} \times m\bar{v} = \bar{r} \times \bar{S}. \quad (8.32)$$

Это соотношение выражает теорему об изменении кинетического момента для точки при ударе.

Применяя ее для каждой из n точек системы, имеем

$$\bar{r}_k \times m_k \bar{u}_k - \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \bar{r}_k \times \bar{S}_k^e + \bar{r}_k \times \bar{S}_k^i, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

где \bar{S}_k^e и \bar{S}_k^i — внешний и внутренний ударные импульсы, действующие на k -ю точку системы.

Просуммируем почленно уравнения, составленные для всех n точек механической системы:

$$\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{u}_k - \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_k^e + \sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_k^i.$$

Так как $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{u}_k = \bar{L}_0^H$ — кинетический момент системы относительно

центра O в конце удара; $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times m_k \bar{v}_k = \bar{L}_0^I$ — кинетический момент системы от-

носительно центра O в начале удара; $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_k^e = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{S}_k^e)$ – главный момент всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно центра O ; $\sum_{k=1}^n \bar{r}_k \times \bar{S}_k^i = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{S}_k^i) = 0$ – главный момент всех внутренних ударных импульсов относительно центра O (по свойству внутренних сил равный нулю).

Подставляя эти значения, получим следующую теорему об изменении кинетического момента системы при ударе:

$$\bar{L}_0^H - \bar{L}_0^I = \sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{S}_k^e), \quad (8.33)$$

т.е. изменение кинетического момента механической системы относительно какого-либо центра при ударе равно геометрической сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы, относительно того же центра.

Если $\sum_{k=1}^n \bar{m}_0(\bar{S}_k^e) = 0$, то выполняется закон сохранения кинетического момента механической системы при ударе, т.е.

$$\bar{L}_0^H = \bar{L}_0^I.$$

Таким образом, если к точкам механической системы приложены только внутренние ударные импульсы, то кинетический момент системы относительно любого центра не изменяется.

В проекциях на прямоугольные декартовы оси координат векторное равенство (8.33) принимает следующую форму:

$$\left. \begin{aligned} L_x^H - L_x^I &= \sum_{k=1}^n m_x(\bar{S}_k^e); \\ L_y^H - L_y^I &= \sum_{k=1}^n m_y(\bar{S}_k^e); \\ L_z^H - L_z^I &= \sum_{k=1}^n m_z(\bar{S}_k^e), \end{aligned} \right\} \quad (8.34)$$

т.е. изменение кинетического момента механической системы относительно любой оси при ударе равно сумме моментов всех внешних ударных импульсов, приложенных к точкам системы относительно той же оси.

Если имеется ось, например, Ox , относительно которой $\sum_{k=1}^n m_x(\bar{S}_k^e) = 0$, то

из первого уравнения (8.34) получаем закон сохранения кинетического момента системы относительно оси при ударе

$$L_x^{\text{II}} = L_x^{\text{I}}.$$

7. Действие ударных сил на тело, вращающееся вокруг неподвижной оси. Центр удара

Пусть в некоторый момент времени на тело, имеющее ось вращения, подействовал ударный импульс \bar{S} (рис. 8.7).

Определим изменение угловой скорости тела под действием этого импульса, воспользовавшись третьим равенством (8.34)

$$L_z^{\text{II}} - L_z^{\text{I}} = \sum_{k=1}^n m_z(\bar{S}_k^e).$$

Так как моменты импульсивных реакций \bar{S}_A и \bar{S}_B , возникающих в подшипниках, будут равны нулю, то последнее равенство примет вид:

$$L_z^{\text{II}} - L_z^{\text{I}} = m_z(\bar{S}).$$

Если в начале удара тело имело угловую скорость ω_0 , а в конце удара его угловая скорость стала равна ω , то кинетические моменты тела относительно оси вращения в начале и в конце удара соответственно равны:

$$L_z^{\text{I}} = J_z \omega_0 \text{ и } L_z^{\text{II}} = J_z \omega.$$

Подставив эти значения в это равенство, получаем

$$J_z(\omega - \omega_0) = m_z(\bar{S}).$$

Откуда

$$\omega - \omega_0 = \frac{m_z(\bar{S})}{J_z}. \quad (8.35)$$

Из формулы (8.35) следует, что изменение угловой скорости тела за время удара равно отношению момента ударного импульса к моменту инерции тела относительно оси вращения.

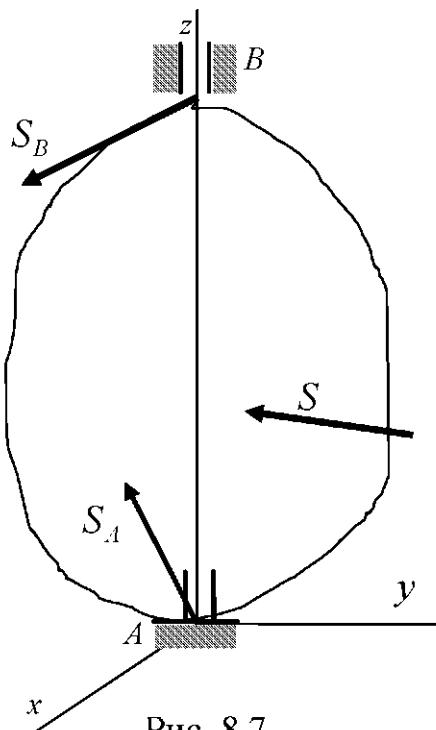


Рис. 8.7

Ударный импульс \bar{S} вызывает появление в подшипниках ударных давлений и это может вызвать их повреждение.

Установим условия, при которых опоры A и B вращающегося твердого тела не испытывают действия ударных сил (рис. 8.8).

Выберем следующую систему осей координат: ось z направим по оси вращения тела в сторону угловой скорости $\bar{\omega}$, плоскость yOz проведем через ось вращения и центр тяжести тела C , при этом $x_c = 0$, $y_c = d$, $z_c = 0$.

Так как перемещение тела за время удара не происходит, то эту систему осей координат, связанную с вращающимся телом, будем считать неподвижной.

Разложим действующий на тело в точке $K(x_k, y_k, z_k)$ ударный импульс \bar{S} на его составляющие S_x, S_y, S_z , а также реактивные ударные импульсы \bar{S}_A и \bar{S}_B , приложенные к телу в опорных точках A и B . Расстояния от опорных точек A и B до плоскости xOy обозначим h_1 и h_2 .

Действие на тело ударного импульса \bar{S} вызовет изменение скорости центра масс тела и изменение его кинетического момента. Воспользуемся уравнениями (8.11) и (8.34).

Совокупность этих шести уравнений примут вид:

$$\begin{aligned} M(u_{Cx} - v_{Cx}) &= S_x + S_{Ax} + S_{Bx}, \\ M(u_{Cy} - v_{Cy}) &= S_y + S_{Ay} + S_{By}, \\ M(u_{Cz} - v_{Cz}) &= S_z + S_{Az}, \\ L_x^H - L_x^I &= S_{Ay}h_1 - S_{By}h_2 - S_yz_k + S_zy_k, \\ L_y^H - L_y^I &= -S_{Ax}h_1 + S_{Bx}h_2 + S_xz_k - S_zx_k, \\ L_z^H - L_z^I &= S_yx_k - S_xy_k. \end{aligned} \quad (8.36)$$

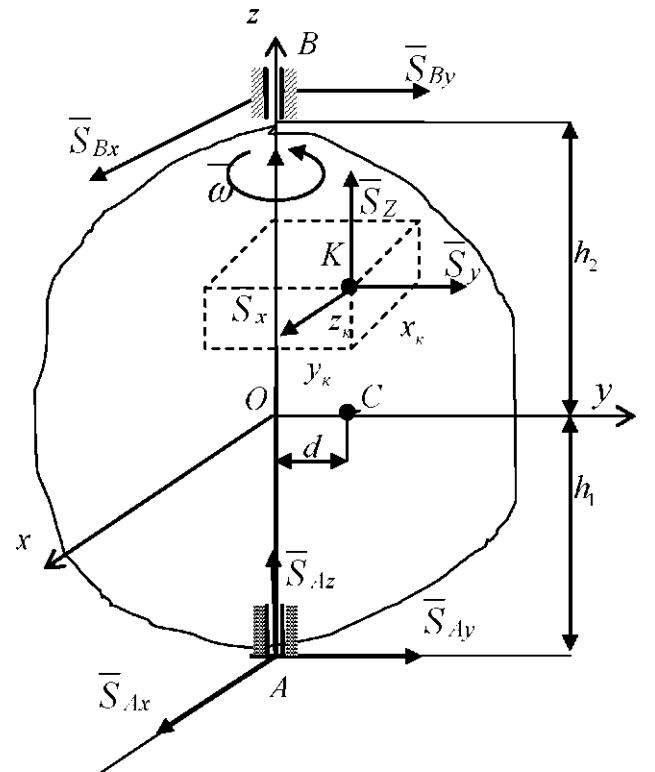


Рис. 8.8

Предположим, что вращение тела, как в начале удара, так и конце удара, происходит в соответствии с направлением вектора $\bar{\omega}$, а угловая скорость его за время удара изменится от ω_0 до ω .

Проекции скорости центра масс на оси координат примут вид:

$$\begin{aligned} v_{Cx} &= -\omega_0 d; & v_{Cy} &= 0; & v_{Cz} &= 0; \\ u_{Cx} &= -\omega d; & u_{Cy} &= 0; & u_{Cz} &= 0. \end{aligned}$$

Проекция вектора кинетического момента:

$$\begin{aligned} L_x^I &= -J_{xz}\omega_0, & L_y^I &= -J_{yz}\omega_0, & L_z^I &= J_z\omega_0; \\ L_x^{II} &= -J_{xz}\omega, & L_y^{II} &= -J_{yz}\omega, & L_z^{II} &= J_z\omega. \end{aligned}$$

Здесь J_{xz} и J_{yz} – центробежные моменты тела относительно осей x , z и осей y , z ; J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z .

После подстановки этих значений в левые части формул (8.36) получим

$$\left. \begin{aligned} -Md(\omega - \omega_0) &= S_x + S_{Ax} + S_{Bx}, \\ 0 &= S_y + S_{Ay} + S_{By}, \\ 0 &= S_z + S_{Az}, \\ -J_{xz}(\omega - \omega_0) &= S_z y_k - S_y z_k + S_{Ay} h_1 - S_{By} h_2, \\ -J_{yz}(\omega - \omega_0) &= S_x z_k - S_z x_k - S_{Ax} h_1 + S_{Bx} h_2, \\ J_z(\omega - \omega_0) &= S_y x_k - S_x y_k. \end{aligned} \right\} \quad (8.37)$$

Уравнения (8.37) служат для определения неизвестных импульсивных реакций S_{Ax} , S_{Ay} , S_{Az} , S_{Bx} , S_{By} . Входящая в уравнения разность $\omega - \omega_0$ находится из последнего уравнения

$$\omega - \omega_0 = \frac{S_y x_k - S_x y_k}{J_z}.$$

Ударные реактивные импульсы \bar{S}_A и \bar{S}_B будут равны нулю, если их проекции на оси координат равны нулю. Приняв это условие, перепишем уравнения (8.37) в виде:

$$\left. \begin{aligned} -Md(\omega - \omega_0) &= S_x, \\ 0 &= S_y, \\ 0 &= S_z, \\ -J_{xz}(\omega - \omega_0) &= S_z y_k - S_y z_k, \\ -J_{yz}(\omega - \omega_0) &= S_x z_k - S_z x_k, \\ J_z(\omega - \omega_0) &= S_y x_k - S_x y_k. \end{aligned} \right\} \quad (8.38)$$

Из уравнений (8.38) следует, что $S = S_x$, т.е. внешний ударный импульс должен быть направлен перпендикулярно плоскости, проведенной через центр масс и ось вращения тела. Учитывая это, уравнения (8.38) примут следующий вид :

$$\left. \begin{aligned} -Md(\omega - \omega_0) &= S_x, \\ -J_{xz}(\omega - \omega_0) &= 0, \\ -J_{yz}(\omega - \omega_0) &= S_x z_k, \\ J_z(\omega - \omega_0) &= -S_x y_k. \end{aligned} \right\}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $J_{xz} = 0$.

Из первого уравнения определим изменение угловой скорости тела

$$\omega - \omega_0 = -\frac{S_x}{Md}.$$

Из третьего и четвертого определяются координаты z_k и y_k точки K , в которой должен быть приложен внешний ударный импульс \bar{S} :

$$z_k = -\frac{J_{yz}(\omega - \omega_0)}{S_x} = -\frac{J_{yz}}{S_x} \left(-\frac{S_x}{Md} \right) = \frac{J_{yz}}{Md}, \quad (8.39)$$

$$y_k = -\frac{J_z(\omega - \omega_0)}{S_x} = -\frac{J_z}{S_x} \left(-\frac{S_x}{Md} \right) = \frac{J_z}{Md}. \quad (8.40)$$

Координата x_k может иметь любую величину.

Так как $J_z = J_{Cz} + Md^2$, то формуле (8.40) можно придать следующий вид:

$$y_k = \frac{J_{Cz}}{Md} + d.$$

Из этой формулы следует, что $y_k > d$, т.е. точка K имеет координату y большую, чем точка C – центр масс тела.

Если предположить, что точка K лежит в плоскости xOy ($z_k = 0$), тогда уравнение (8.39) дает, что $J_{yz} = 0$, т.е. что ось вращения z должна быть главной осью в точке O , поскольку и $J_{zx} = 0$.

Итак, для того чтобы при ударе по вращающемуся телу в точках закрепления оси вращения не возникало импульсивных реакций, надо:

1) чтобы ударный импульс \bar{S} был расположен в плоскости xOy , перпендикулярной к оси вращения z и проходящей через такую точку O тела, для ко-

торой ось z является главной осью инерции (в частности, плоскость xOy может быть плоскостью симметрии тела);

2) чтобы удар был направлен перпендикулярно к плоскости, проходящей через ось вращения z и центр масс C тела;

3) чтобы ударный импульс \bar{S} был приложен на расстоянии $y_k = J_z/Md$ от оси по ту же сторону, где находится центр масс. В частности, если ось вращения проходит через центр масс тела, то $d = 0$, мы получаем, что $y_k = \infty$. В этом случае центра удара на конечном расстоянии не существует, и любой удар по телу будет передаваться на ось вращения.

8. Действие ударных сил на твердое тело, совершающее плоское движение

Рассмотрим это движение тела как совокупность двух движений: поступательного движения вместе с центром масс и вращения вокруг оси, проходящей через центр масс перпендикулярно к той плоскости, в которой оно движется.

В плоскости движения центра масс проведем оси x и y , и, используя формулы (8.11) и (8.34), составим уравнения плоского движения твердого тела

$$\left. \begin{aligned} M(u_{Cx} - v_{Cx}) &= \sum S_{kx}^e, \\ M(u_{Cy} - v_{Cy}) &= \sum S_{ky}^e, \\ J_{Cz}(\omega - \omega_0) &= \sum m_C(\bar{S}_k^e) \end{aligned} \right\} \quad (8.41)$$

Таким образом, внешние ударные силы, действующие на твердое тело, совершающее плоское движение, вызывают изменение скорости центра масс тела, и конечное изменение угловой скорости тела.

9. Примеры действия ударных сил

Пример 1. Два упругих шара массами 20 кг и 50 кг движутся поступательно навстречу друг другу со скоростями 12 м/с и 8 м/с соответственно. Определить скорости шаров после удара, предполагая последний прямым, центральным и абсолютно упругим.

Решение. Найдем общую скорость шаров в конце 1-ой фазы удара, воспользовавшись формулой (8.16), и учитывая, что проекции скоростей имеют разные знаки. Положив знак минус для проекции скорости второго шара, получим

$$u = \frac{M_1 v_1 - M_2 v_2}{M_1 + M_2} = \frac{20 \cdot 12 - 50 \cdot 8}{70} = -2,29 \text{ м/с.}$$

Знак минус ответа говорит о том, что скорость первого шара в конце первой фазы удара имеет направление скорости второго шара.

Для определения скоростей шаров в конце удара воспользуемся формулами (8.17) с учетом знаков проекций скоростей; тогда при $k = 1$, получим

$$u_1 = u(1+k) - kv_1 = 2u - v_1 = -16,57 \text{ м/с},$$

$$u_2 = u(1+k) - kv_2 = 2u - v_2 = 3,43 \text{ м/с}.$$

Как видим, скорости шаров изменились не только по величине, но и направления их изменились на противоположные.

Пример 3. Упругий шар массой M ударяет неподвижный упругий шар массой $2M$, причем теряется половина начальной кинетической энергии системы. Определить коэффициент восстановления при ударе k .

Решение. Обозначим скорость подвижного шара v , тогда потеря кинетической энергии системы равна

$$T_0 - T = \frac{1}{2} \frac{M_1 v_1^2}{2} = \frac{1}{4} Mv^2.$$

С другой стороны, потеря кинетической энергии системы может быть вычислена по формуле (8.23)

$$T_0 - T = (1 - k^2) \frac{M_1 M_2}{2(M_1 + M_2)} (v_1 - v_2)^2 = \frac{1}{3} (1 - k^2) Mv^2.$$

Приравняв правые части этих равенств, получим уравнение

$$\frac{1}{3} (1 - k^2) Mv^2 = \frac{1}{4} Mv^2,$$

из которого находим $k = 0,5$.

Пример 4. [6]. Колесо массой M и радиусом r , катится без скольжения по горизонтальной направляющей NN , наталкивается на уступ O и огибая его, поднимается на горизонтальную направляющую OM . Высота уступа h . Удар колеса об уступ неупругий, скольжение при ударе и огибании уступа отсутствует.

Определить, какова должна быть скорость центра C колеса

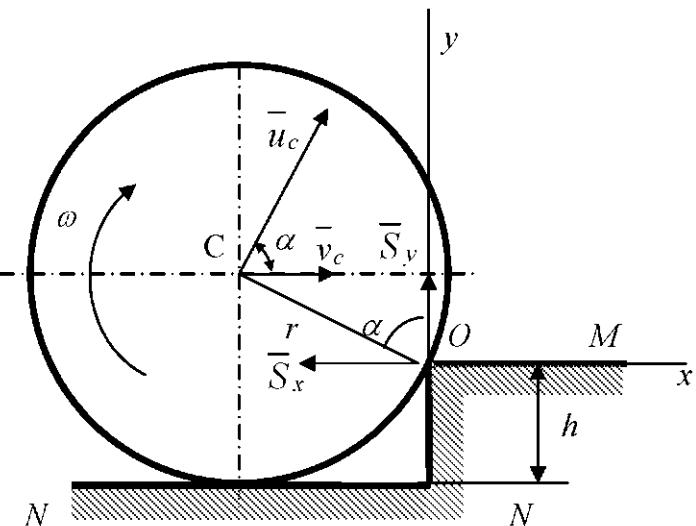


Рис. 8.9

перед ударом, чтобы колесо вкатилось на верхнюю направляющую.

При заданной скорости центра колеса v_c до удара определить импульс ударной реакции уступа. Колесо считать однородным диском (рис. 8.9).

Решение. При столкновении колеса с уступом плоское движение колеса мгновенно изменится на вращение вокруг ребра O ступеньки NO , т.е. колесо испытывает удар. Составим уравнение, выражающее теорему об изменении кинетического момента механической системы при ударе, взяв за ось моментов горизонтальную ось, проходящую вдоль ребра O

$$L_0^H - L_0^I = \sum m_0(\bar{S}_k^e).$$

Так как ударный импульс \bar{S}_0 пересекает ось O , то $\sum m_0(\bar{S}_k^e) = 0$ и поэтому имеет место закон сохранения проекции вектора кинетического момента $L_0^H = L_0^I$.

Кинетический момент колеса относительно оси O в начале удара,

$$L_0^I = Mv_c(r - h).$$

Кинетический момент колеса относительно оси O в конце удара,

$$L_0^H = J_0\omega,$$

где J_0 – момент инерции колеса относительно оси O ; ω – угловая скорость цилиндра в конце удара, тогда

$$L_0^H = (J_0 + Mr^2)\omega = \frac{3}{2}Mr^2\omega.$$

Так как $L_0^H = L_0^I$, то

$$\frac{3}{2}Mr^2\omega = Mv_c(r - h),$$

откуда

$$\omega = \frac{2(r - h)v_c}{3r^2}.$$

Для определения искомой скорости v_c воспользуемся теоремой об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e.$$

Будем считать, что вся начальная кинетическая энергия колеса, которая будет у него в конце удара, расходуется на подъем его на ступеньку высоты h , поэтому $T = 0$, и формула теоремы примет вид:

$$-\frac{J_0\omega^2}{2} = -Mgh$$

или

$$\frac{(r-h)^2 v_c^2}{3r^2} = gh,$$

откуда

$$v_c = \frac{r}{r-h} \sqrt{3gh}.$$

Определим проекции ударного импульса со стороны ступеньки, для чего составим уравнения, выражающие теорему об изменении количества движения механической системы при ударе, в проекциях оси x и y

$$M(u_{cx} - v_{cy}) = \sum S_{kx}^e; \quad M(u_{cy} - v_{cy}) = \sum S_{ky}^e,$$

или

$$M(u_c \cos \alpha - v_c) = -S_x; \quad M(u_c \sin \alpha) = S_y.$$

Учитывая, что скорость центра масс C в конце удара u_c равна

$$u_c = \omega r = \frac{2(r-h)}{3r} v_c, \quad \cos \alpha = \frac{r-h}{r}; \quad \sin \alpha = \sqrt{1 - \frac{(r-h)^2}{r^2}},$$

получим следующие выражения для проекций импульса ударной реакции уступа:

$$S_x = Mv_c \left[1 - \frac{2(r-h)^2}{3r^2} \right]; \quad S_y = \frac{2}{3} \frac{Mv_c}{r^2} (r-h) \sqrt{h(2r-h)}.$$

Решение задачи справедливо при условии $0 \leq h/r \leq 1$.

Пример 5 [5]. Однородный стержень массы M и длины l , прикрепленный своим верхним концом к цилиндрическому шарниру O , падает без начальной скорости из горизонтального положения. В вертикальном положении он ударяет груз массы m , сообщая ему движение по горизонтальной шероховатой плоскости. Коэффициент трения скольжения f . Определить путь, пройденный грузом, считая удар неупругим (рис. 8.10).

Решение. Определим угловую ско-

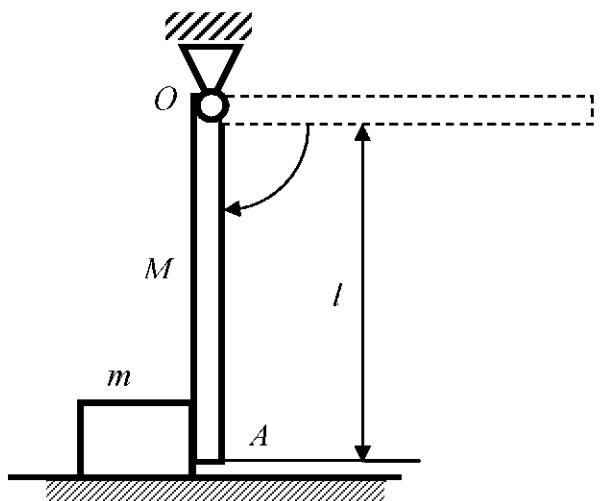


Рис. 8.10

рость ω_I стержня в начале удара. По теореме об изменении кинетической энергии системы

$$T - T_0 = \sum A_k^e,$$

имеем

$$J_0 \frac{\omega_I^2}{2} = Mg \frac{l}{2},$$

или, так как $J_0 = \frac{Ml^2}{3}$;

$$\omega_I = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Так как момент количества движения системы относительно оси вращения O за время удара не изменяется, то

$$J_0 \omega_I = J_0 \omega_{II} + ml^2 \omega_{II},$$

где ω_{II} – угловая скорость стержня в конце удара. Она равна

$$\omega_{II} = \frac{J_0 \omega_I}{J_0 + ml^2} = \frac{M}{M + 3m} \omega_I.$$

Так как удар неупругий, то начальная скорость груза v_0 равна скорости конца A стержня в конце удара

$$v_0 = \omega_{II} l = \frac{Ml}{M + 3m} \sqrt{\frac{3g}{l}} = \frac{M}{M + 3m} \sqrt{3gl}$$

и кинетическая энергия груза m равна

$$T_0 = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{3}{2} \frac{M^2 m}{(M + 3m)^2} gl.$$

Эта кинетическая энергия поглощается на расстоянии s работой силы трения, отсюда

$$-\frac{3}{2} \frac{M^2 m}{(M + 3m)^2} gl = -f m g s,$$

и окончательно

$$s = \frac{3l}{2f} \left(\frac{M}{M + 3m} \right)^2.$$

Пример 6 [6]. При включении малтийского механизма палец A входит в гладкий паз диска – малтийского креста – с ударом. Поводок OA до соударения

вращался с угловой скоростью ω_0 , диск был неподвижен. В момент включения механизма поводок OA горизонтален, паз наклонен под углом α к горизонту. Определить угловую скорость диска ω_2 в конце удара и ударный импульс S в точке A , также величину угла α при безударной работе механизма.

Поводок OA считать однородным стержнем длины l и массы M , момент инерции диска относительно оси вращения, проходящей через центр O_1 , равен J ; $O_1A = r$ (рис. 8.11).

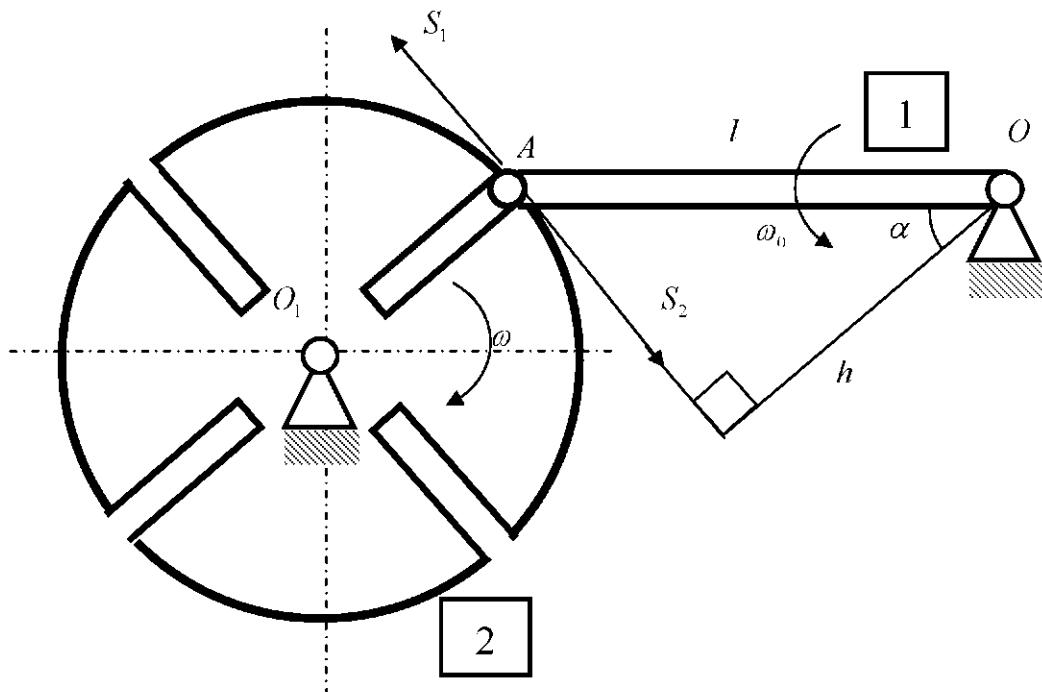


Рис. 8.11

Решение. Так как удар неупругий, то для решения задачи воспользуемся теоремой Карно.

$$\frac{J_1 \omega_0^2}{2} - \left(\frac{J_1 \omega_1^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2} \right) = \frac{J_1}{2} (\omega_0 - \omega_1)^2 + \frac{J_2}{2} \omega_2^2,$$

где ω_1, ω_2 – угловые скорости поводка и диска в конце удара. После раскрытия скобок и приведения подобных членов имеем

$$J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 - J_1 \omega_0 \omega_1 = 0. \quad (a)$$

Второе уравнение связи между ω_1 и ω_2 найдем с помощью теоремы моментов, составленных для первого и второго тел

$$\begin{cases} J_1(\omega_1 - \omega_0) = -S_1 l \cos \alpha, \\ J_2 \omega_2 = S_2 r. \end{cases}$$

Так как $S_1 = S_2 = S$, то, решая эту систему совместно относительно ω_1 , получим

$$\omega_1 = \omega_0 - \left(\frac{J_2 l}{J_1 r} \cos \alpha \right) \omega_2,$$

или обозначая

$$\frac{J_2 l}{J_1 r} \cos \alpha = A, \text{ будем иметь}$$

$$\omega_1 = \omega_0 - A \omega_2. \quad (6)$$

Подставив это значение ω_1 в уравнение (а), получим после приведения подобных членов следующее уравнение

$$J_1 A^2 \omega_2^2 + J_2 \omega_2^2 - J_1 A \omega_0 \omega_2 = 0.$$

Решаем это уравнение относительно ω_2 .

Первый корень $\omega_2 = 0$ не имеет смысла, второй корень

$$\omega_2 = \frac{J_1 A \omega_0}{J_2 + J_1 A^2}.$$

После подстановки в это выражение значения A окончательно получим

$$\omega_2 = \frac{M l r \omega_0 \cos \alpha}{M r^2 + 3 J \cos^2 \alpha}.$$

Величина ударного импульса равна

$$S = \frac{J_2 \omega_2}{r} = \frac{J M l \omega_0 \cos \alpha}{M r^2 + 3 J \cos^2 \alpha}.$$

При безударной работе механизма ударный импульс S должен быть равен нулю, а это будет тогда, когда угол α равен $\pi/2$.

Пример 7 [5]. Шар массы m_1 , движущийся поступательно со скоростью v_1 , встречает покоящийся шар массы m_2 , так что скорость его образует при ударе угол α с линией, соединяющей центры шаров. Определить: 1) скорость первого шара после удара, считая удар неупругим; 2) скорость каждого из шаров после

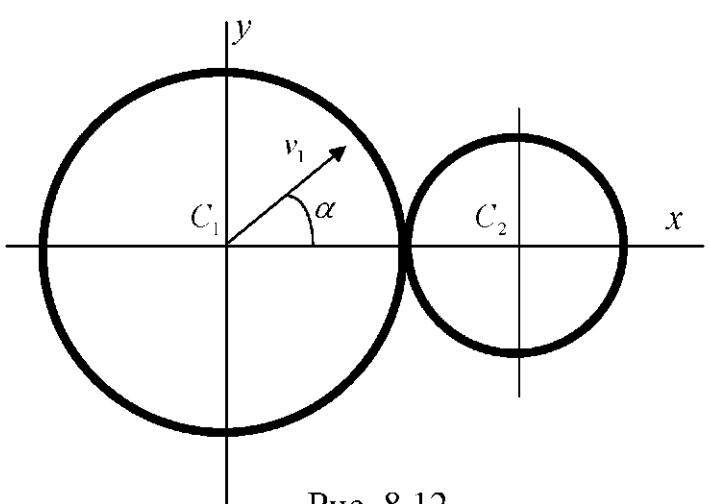


Рис. 8.12

удара в предположении, что удар упругий с коэффициентом восстановления k (рис. 8.12).

Решение. Направим координатную ось x по линии центров, а ось y ей перпендикулярно. Рассмотрим первый случай, когда удар неупругий, и определим скорость первого шара после удара. Составляющая скорости по направлению оси y при ударе не изменяется, поэтому

$$u_{1y} = v_1 \sin \alpha.$$

Составляющую по оси x определим с помощью закона сохранения количества движения системы в проекции его на ось x

$$m_1 v_1 \cos \alpha = u_x (m_1 + m_2),$$

где u_x – общая скорость обоих шаров по направлению оси x , так как удар неупругий, т.е. $u_{1x} = u_{2x} = u_x$. Учитывая значение u , вычислим скорость первого шара после удара:

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = v_1 \sqrt{\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha}.$$

В случае упругого удара составляющая по оси y также не испытывает изменений, так как ударное трение отсутствует. Составляющие по оси x в конце удара для обоих шаров можно вычислить по формулам (8.18)

$$u_{1x} = v_1 \cos \alpha - (1+k) \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_1 \cos \alpha = v_1 \cos \alpha \left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} \right);$$

$$u_{2x} = (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos \alpha.$$

Таким образом, скорости первого и второго шаров соответственно равны:

$$u_1 = \sqrt{u_{1x}^2 + u_{1y}^2} = v_1 \sqrt{\left(\frac{m_1 - km_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha};$$

$$u_2 = (1+k) \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \cos \alpha.$$

Пример 8. Эллиптический маятник состоит из ползуна массой M и шарика массой m , соединенного с ползуном невесомым стержнем AB длины l . Ползун может скользить по гладкой горизонтальной направляющей, а стержень вращаться вокруг оси A , связанной с ползуном и перпендикулярной плоскости рисунка (рис. 8.13, а). В момент, когда система находилась в равновесии, по

ползуна произведен удар с импульсом \bar{S} . Определить модуль скорости ползуна \bar{u} и угловую скорость стержня ω в конце удара.

Решение. Для решения этой задачи воспользуемся уравнениями Лагранжа, которые для случая удара принимают следующий вид:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_{t=\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right)_{t=0} = \int_0^\tau Q_i^{\text{уд}} dt = R_i^{\text{уд}}, \quad (i = 1, 2, \dots, s),$$

где τ – время удара, а $R_i^{\text{уд}}$ – обобщенные импульсы ударных сил, которые можно найти по формулам

$$R_i^{\text{уд}} = \frac{\delta A_i(\bar{S}^{\text{уд}})}{\delta q_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, s).$$

Данная система имеет две степени свободы. За обобщенные координаты примем: $q_1 = y$ – перемещение ползуна; $q_2 = \phi$ – угол поворота стержня (рис. 8.13, в), отсчитываемый против движения часовой стрелки.

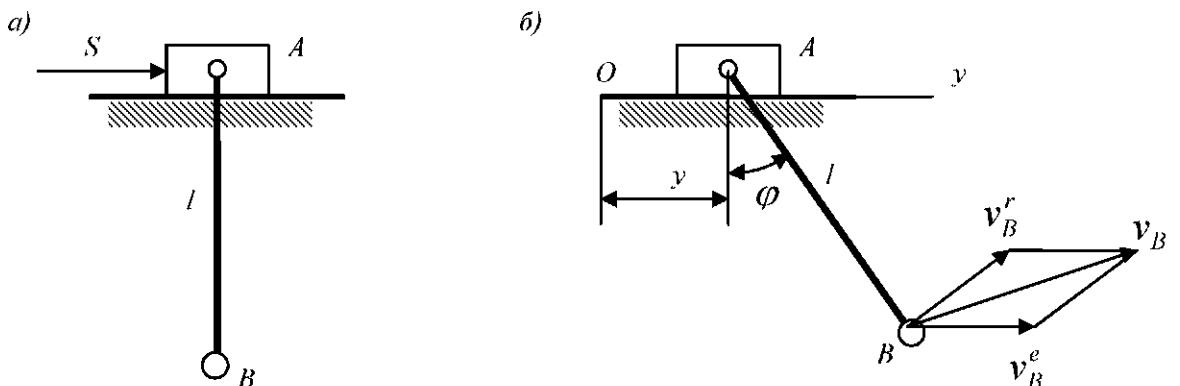


Рис. 8.13

Запишем уравнения Лагранжа для нашего случая

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right)_{t=\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_i} \right)_{t=0} = R_y^{\text{уд}}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right)_{t=\tau} - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_i} \right)_{t=0} = R_\phi^{\text{уд}}. \quad (\text{a})$$

Найдем обобщенные ударные импульсы $R_y^{\text{уд}}$ и $R_\phi^{\text{уд}}$ по формулам:

$$R_y^{\text{уд}} = \frac{\delta A_1(\bar{S})}{\delta y} \Big|_{\delta p=0} = \frac{S \delta y}{\delta y} = S; \quad R_\phi^{\text{уд}} = \frac{\delta A_2(\bar{S})}{\delta \phi} \Big|_{\delta y=0} = 0.$$

Кинетическая энергия системы:

$$T = T_{\text{ноги}} + T_{\text{ш}} = \frac{M\dot{y}^2}{2} + \frac{m v_B^2}{2}.$$

По теореме о сложении скоростей $\bar{v}_B = \bar{v}_B^e + \bar{v}_B^r$, где $v_B^e = \dot{y}$, а $v_B^r = l\dot{\phi}$.

Таким образом,

$$v_B^2 = \dot{y}^2 + l^2 \dot{\phi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\phi} \cos \varphi.$$

Учитывая это, формулу для кинетической энергии системы перепишем в виде:

$$T = \frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2 + \frac{1}{2}(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{y}\dot{\phi} \cos \varphi)m.$$

Вычислим частные производные

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (M+m)\dot{y} + ml\dot{\phi} \cos \varphi; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + l\dot{y} \cos \varphi).$$

В положении равновесия, когда $y = 0$ и $\varphi = 0$, производные примут вид:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} = (M+m)\dot{y} + ml\dot{\phi}; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}} = m(l^2\dot{\phi} + l\dot{y}), \text{ так как } \cos 0 = 1.$$

Учитывая, что в начале удара система находится в покое ($\dot{y} = 0, \dot{\phi} = 0$), пользуясь формулами (а), получим

$$\left. \begin{array}{l} (M+m)u + ml\omega = S; \\ m(l^2\omega + lu) = 0, \end{array} \right\}$$

откуда найдем

$$u = \frac{S}{M}, \quad \omega = \frac{-S}{Ml}.$$

Знак минус показывает, что стержень в результате удара начинает вращаться по направлению движения часовой стрелки. Скорость шарика за время удара не изменится, т.е. он останется в покое

$$u_B = \sqrt{u^2 + l^2\omega^2 + 2lu\omega} = u + l\omega = \frac{S}{M} - l\frac{S}{Ml} = 0.$$

Литература

1. Бухгольц, Н.Н. Основной курс теоретической механики [Текст]: учеб. ч.1, 2 / Н.Н. Бухгольц – М.: Наука, 1969.
2. Добронравов, В.В. Курс теоретической механики [Текст]/ В.В. Добронравов, Н.Н. Никитин, А.А. Дворников – М.: Высшая школа, 1983.
3. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики [Текст]. т. 2/ Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин – М., 1985.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики [Текст]/ С.М. Тарг – М.: Высшая школа, 1986 и последующие издания.
5. Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике [Текст]/ И.В. Мещерский – М.: Высшая школа, 1952 и последующие издания.
6. Сборник задач по теоретической механике [Текст]/ под. Ред. К.С. Колесникова – М.: Наука, 1983 и последующие издания.
7. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] /под ред. А.А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1968. и последующие издания.
8. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах [Текст]. т.2/ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон – М.: Наука, 1961 и последующие издания.
9. Хегай, В.К. Динамика [Текст]/ В.К. Хегай, А.С. Попов. – Ухта: УГТУ, 1992.
10. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст]. Ч. II. Динамика/ А.А. Яблонский - М.: Высшая школа, 1984 и последующие издания.
11. Лойцинский, Л.Г. Курс теоретической механики [Текст]. Ч.II/ Л.Г. Лойцинский, А.И. Лурье. – М.: Наука, 1983.