

ЕН.Ф.06 ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА
ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. УДАР.
Методические указания

Составлены в соответствии с учебными программами по дисциплине «Теоретическая механика» для направлений «Машиностроительные технологии и оборудование», «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы», «Эксплуатация транспорта и транспортного оборудования», «Строительство».

Предназначены для студентов при изучении разделов «Аналитическая механика. Удар», выполнении контрольных и расчетно-проектировочных заданий по данным темам, самостоятельной работе.

Работа подготовлена на кафедре теоретической и прикладной механики.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
1. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	5
1.1. Принцип возможных перемещений при анализе равновесия механической системы	5
1.2. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы (задание Д-13 [8])	6
1.3. Принцип возможных перемещений при определении опорных реакций составной балки	8
1.4. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции (задание Д-14 [8])	11
1.5. Тестовые задания	14
2. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ	17
2.1. Определение обобщенной силы в механической системе «барабан - груз»...	17
2.2. Определение обобщенной силы в кулисном механизме	18
2.3. Тестовые задания	21
2.3.1. Определение числа степеней свободы механической системы	21
2.3.2. Определение обобщенной силы	22
3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ	24
3.1. Движение механической системы «блок - грузы»	24
3.2. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы (задание Д-17 [8])	27
3.3. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы (задание Д-18 [8])	29
3.4. Тестовые задания	32
4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА	34
4.1. Уравнения Лагранжа 2-го рода при определении ускорения груза лебедки...	34
4.2. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы (задание Д-19 [8])	37
5. УДАР	41
5.1. Основные положения	41
5.2. Задачи соударения двух тел	44
5.2.1. Неупругий удар движущегося шара о неподвижный шар	44
5.2.2. Неупругий удар движущихся навстречу друг другу шаров	45
5.2.3. Частично упругий удар шаров, движущихся в одном направлении	46
5.2.4. Частично упругий удар шаров, движущихся навстречу друг другу	46
5.2.5. Частично упругий удар шарика, падающего на неподвижную горизонтальную плиту	47
5.3. Тестовые задания	48
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	55
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	56

ВВЕДЕНИЕ

При изучении дисциплины «Теоретическая механика» рабочими программами предусмотрено самостоятельная работа студентов при изучении тем, выполнение расчетно-проектировочных и контрольных заданий по следующим разделам:

1. Статика.
2. Кинематика.
3. Динамика.
4. Аналитическая механика

Данные методические указания содержат примеры выполнения расчетно-проектировочных и контрольных заданий раздела «Аналитическая механика. Удар» по **темам**:

1. Принцип возможных перемещений при анализе равновесия механической системы.
2. Определение числа степеней свободы механической системы. Обобщенные силы в механической системе.
3. Общее уравнение динамики. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы.
4. Уравнения Лагранжа 2-го рода. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы.
5. Удар. Основные положения и задачи соударения двух тел.

Примеры выполнения расчетных заданий с нумерацией Д 13, Д 14, и т. д. соответствуют расчетным схемам и примерам выполнения заданий сборника заданий для курсовых работ по теоретической механике (**раздел: Динамика**) под редакцией проф. А. А. Яблонского. Так как номер темы в зависимости от года издания сборника может быть различным, принятая выше нумерация тем ориентирована на методические указания Манжосова В. К. и Новиковой О. Д. «Расчетно-проектировочные и контрольные задания по теоретической механике. Часть 4. Аналитическая механика». - Ульяновск, УлГТУ. 2005. - 36 с.

Методические указания сопровождаются тестовыми заданиями, которые могут быть использованы для оценки уровня усвоения материала.

Методические указания составлены в соответствии с учебными программами по дисциплине «Теоретическая механика» для направлений «Машиностроительные технологии и оборудование», «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы», «Эксплуатация транспорта и транспортного оборудования», «Строительство».

Методические указания предназначены для студентов при изучении разделов «Аналитическая механика. Удар», выполнении контрольных и расчетно-проектировочных заданий по данной теме, самостоятельной работе.

1. ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

1.1. Принцип возможных перемещений при анализе равновесия механической системы

Через блок A веса P переброшена нить, к концам которой привязаны груз B и каток C веса P_4 , лежащий на идеально гладкой наклонной плоскости (рис. 1.1). Через каток C в свою очередь переброшена нить, к концам которой привязаны груз D веса P_2 и груз E веса P_1 , лежащий на параллельной идеально гладкой плоскости.

Определить вес P_3 груза B и угол α , образуемый наклонными плоскостями с горизонтом, если система находится в равновесии. Весом нитей пренебречь.

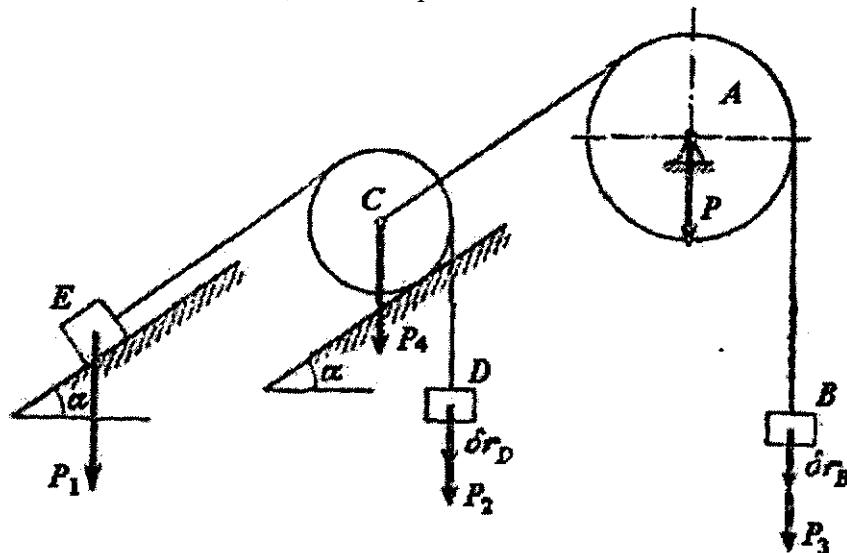


Рис. 1.1. Система твердых тел, находящихся в равновесии

Решение. Рассматриваемая система имеет две степени свободы, так как для определения положения всех ее точек надо задать два независимых параметра. Один параметр должен определять положение груза B , а второй - положение грузов D и E по отношению к катку C .

Изобразим задаваемые силы: P - вес блока A , P_1 - вес груза E , P_2 - вес груза D , P_3 - искомый вес груза B и P_4 - вес катка C . Силы реакций связей изображать не следует, так как все связи, наложенные на систему, являются идеальными (нити натянуты и нерастяжимы, наклонные плоскости идеально гладкие).

Дадим системе два независимых возможных перемещения (число независимых возможных перемещений равно числу степеней свободы системы): δr_B - возможное перемещение груза B , направленное по вертикали вниз, и δr_D - возможное перемещение груза D , также направленное по вертикали вниз.

Применим принцип возможных перемещений для составления уравнений равновесия системы. Число уравнений должно быть равно числу ее степеней свободы. Поэтому для данной системы составим два уравнения равновесия.

Для составления уравнения равновесия системы, соответствующего возможному перемещению δr_D , будем считать возможное перемещение δr_B рав-

ным нулю, т. е. $\delta r_B = 0$, $\delta r_D \neq 0$ (это допустимо, так как возможные перемещения δr_B и δr_D являются независимыми). При этом груз B и каток C останутся в покое, груз B переместится на δr_D по вертикали вниз, а груз E переместится на δr_D параллельно наклонной плоскости вверх.

Применив принцип возможных перемещений, получим:

$$P_2 \cdot \delta r_D - P_1 \cdot \delta r_D \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$\sin \alpha = \frac{P_2}{P_1}. \quad (1.1)$$

Для составления уравнения равновесия системы, соответствующего возможному перемещению δr_B , будем считать возможное перемещение δr_D равным нулю, т. е. $\delta r_B \neq 0$, $\delta r_D = 0$.

При этом грузы D и E по отношению к катку C останутся в покое, груз B переместится на δr_B по вертикали вниз, а каток C с грузами D и E переместится на δr_B параллельно наклонной плоскости вверх. Применив принцип возможных перемещений, получим:

$$P_3 \cdot \delta r_B - P_1 \cdot \delta r_B \sin \alpha - P_2 \cdot \delta r_B \sin \alpha - P_4 \cdot \delta r_B \sin \alpha = 0,$$

откуда

$$P_3 = (P_1 + P_2 + P_4) \sin \alpha. \quad (1.2)$$

Подставив в формулу (1.2) значение $\sin \alpha$ из формулы (1.1), найдем исковую величину веса P_3 груза B :

$$P_3 = \frac{P_2}{P_1} (P_1 + P_2 + P_4).$$

1.2. Применение принципа возможных перемещений к решению задач о равновесии сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы (задание Д-13 [8])

Дано: схема механизма (рис. 1.2), $Q = 100$ Н; $c = 5$ Н/см; $r_1 = 20$ см; $r_2 = 40$ см; $r_3 = 10$ см; $OA = l = 50$ см; $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 90^\circ$.

Решение. Рассматриваемый механизм находится под действием следующей системы взаимно уравновешивающихся сил: силы упругости \vec{F} , сти \vec{G}_1 - вала 1 с шестерней 2, \vec{G}_3 - шестерни 3, \vec{Q} - груза и реакций опор.

Связи, наложенные на механизм, допускают следующие возможные перемещения его звеньев: поворот вала 1 с шестерней 2 на угол $\delta\varphi_1$; поворот шестерни 3 на угол $\delta\varphi_3$ и поступательное перемещение груза по вертикали на δs_Q . Ползун B может иметь перемещение δs_B (перемещение по горизонтали), а точка A - перемещение δs_A (отрезок δs_A перпендикулярен к OA).

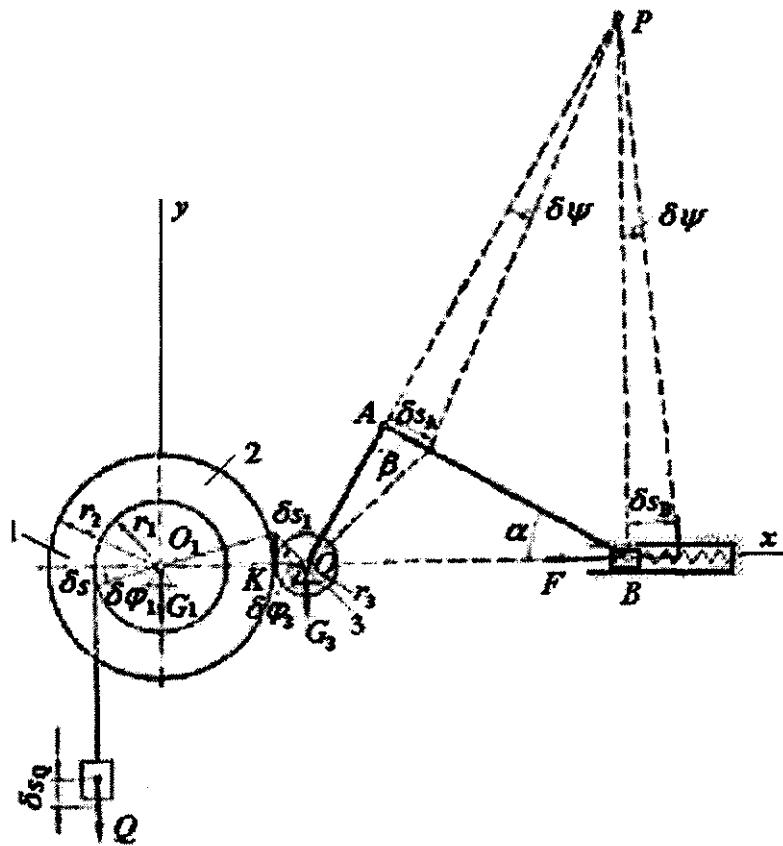


Рис. 1.2. Схема механизма

Уравнение работы, выражающее принцип возможных перемещений, получает вид

$$Q \cdot \delta s_Q - F \cdot \delta s_B = 0. \quad (1.3)$$

Найдем зависимость между возможными перемещениями точек системы. Поскольку нить, к которой привязан груз Q , нерастяжима и скольжение между нитью и валом отсутствует, перемещение груза Q равно перемещению точки обода колеса 1. Поэтому угол поворота вала 1 и шестерни 2

$$\delta\varphi_1 = \frac{\delta s_Q}{r_1}.$$

Перемещение точки К обода колеса 2

$$\delta s_1 = r_2 \cdot \delta\varphi_1 = \frac{r_2}{r_1} \delta s_Q.$$

Так как скольжение между шестернями 2 и 3 отсутствует, то возможные перемещения точек касания этих шестерен равны и угол поворота шестерни 3

$$\delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{r_3} = \frac{r_2}{r_1 \cdot r_3} \delta s_Q.$$

Перемещение точки A кривошипа, жестко соединенного с колесом 3,

$$\delta s_A = OA \cdot \delta\varphi_3 = \frac{r_2 \cdot l}{r_1 \cdot r_3} \delta s_Q.$$

Для определения зависимости между возможными перемещениями δs_A и δs_B найдем положение мгновенного центра скоростей звена AB - точки P . Тогда

$$\frac{\delta s_B}{\delta s_A} = \frac{PB}{PA},$$

откуда

$$\delta s_B = \frac{PB}{PA} \delta s_A.$$

Из треугольника АРВ

$$\frac{PB}{PA} = \frac{1}{\cos 30^\circ}.$$

Теперь

$$\delta s_B = \frac{r_2 \cdot l}{r_1 \cdot r_2 \cdot \cos 30^\circ} \delta s_Q$$

Сила упругости пружины пропорциональна её деформации $F = c \cdot h$. Подставив в уравнение (1.3) выражения силы упругости и возможных перемещений точек системы, получим

$$Q \cdot \delta s_Q - c \cdot h \frac{r_2 \cdot l}{r_1 \cdot r_3 \cdot \cos 30^\circ} \delta s_Q = 0,$$

откуда

$$h = \frac{Q}{c} \cdot \frac{r_1 \cdot r_3 \cdot \cos 30^\circ}{r_2 \cdot l} = \frac{100 \cdot 20 \cdot 10 \cdot 0,87}{5 \cdot 40 \cdot 50} = 1,74 \text{ см.}$$

Следовательно, пружина сжата на 1,74 см.

1.3. Принцип возможных перемещений при определении опорных реакций составной балки

Составная балка AD (рис. 1.3), лежащая на трех опорах, состоит из двух балок AC и CD , шарнирно соединенных в точке C .

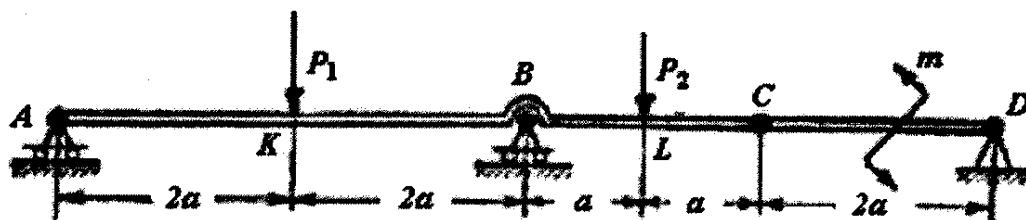


Рис. 1.3. Схема нагружения составной балки

К балке AC приложены вертикальные силы $P_1 = 8 \text{ кН}$ и $P_2 = 6 \text{ кН}$, а к балке CD - пара сил с моментом $m = 4a \text{ кНм}$, направленным против часовой стрелки. Размеры указаны на рис. 1.3.

Определить силы опорных реакций в A , B и D сом балок пренебречь.

Решение. Составная балка AD представляет собой систему двух твёрдых тел - балок AC и CD , находящихся в равновесии.

Решая эту задачу методами статики, надо, мысленно разорвав шарнир C , отбросить одну из балок, заменить действие отброшенной балки на оставшуюся балку двумя составляющими силы реакции шарнира C и записать уравнения равновесия для оставшейся балки. Затем, применив те же рассуждения к отброшенной балке, записать для нее уравнения равновесия. Наконец, решив систему уравнений равновесия, составленных для каждой из балок, определить искомые опорные реакции. Такое решение является довольно громоздким.

Применяя принцип возможных перемещений, можно любую искомую силу опорной реакции определить из одного соответствующим образом составленного уравнения. Это значительно упрощает решение задачи. Особенно в тех случаях, когда требуется определить только одну силу опорной реакции.

Проиллюстрируем это утверждение последовательным определением опорных реакций A , B и D с помощью принципа возможных перемещений.

На рис. 1.3 изображены задаваемые силы P_1 , P_2 и пара сил с моментом m .

Для определения силы опорной реакции R_A отбрасываем мысленно опору A , компенсируя отсутствие этой связи силой опорной реакции R_A .

Дадим возможное перемещение δr_A точке A по вертикали вверх. При этом балка примет положение, изображенное на рис. 1.4.

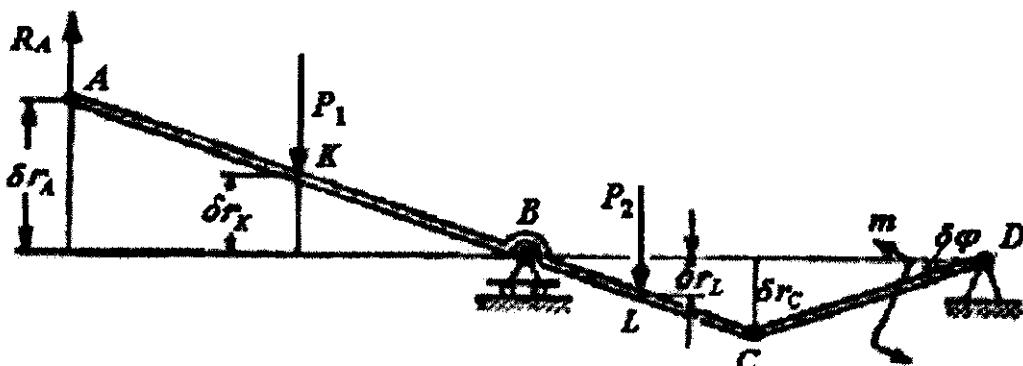


Рис. 1.4. Положение составной балки при возможном перемещении δr_A

Обозначим через δr_K и δr_L возможные перемещения точек приложения K и L сил P_1 и P_2 , а через $\delta\varphi$ - угловое перемещение балки CD .

Выразим, воспользовавшись подобием треугольников, зависимость между линейными возможными перемещениями:

$$\delta r_A = 2 \cdot \delta r_K = 4 \cdot \delta r_L = 2 \cdot \delta r_C = 4a \cdot \delta\varphi. \quad (1.4)$$

Применив принцип возможных перемещений, приравняем сумму работ всех задаваемых сил и силы реакции R_A , на соответствующих возможных перемещениях нулю:

$$R_A \cdot \delta r_A - P_1 \cdot \delta r_K + P_2 \cdot \delta r_L + m \cdot \delta\varphi = 0. \quad (1.5)$$

Воспользовавшись формулой (1.4), после почлененного сокращения уравнения (1.5) на δr_A находим:

$$R_A - \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 + \frac{1}{4a}m = 0,$$

откуда после подстановки численных значений получим:

$$R_A = 1,5m$$

Для определения силы опорной реакции R_B мысленно отбрасываем опору B , компенсируя отсутствующую связь силой опорной реакции R_B .

Дадим возможное перемещение δr_C шарниру С по вертикали вверх. При этом балка примет положение, указанное на рис. 1.5.

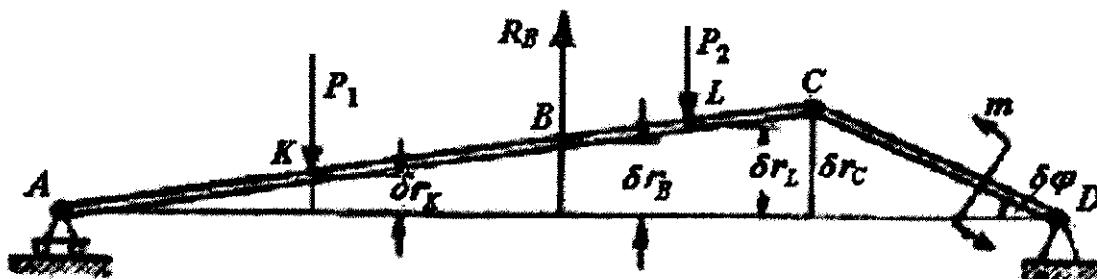


Рис. 1.5. Положение составной балки при возможном перемещении δr_C

Обозначив через δr_K , δr_L и δr_B возможные перемещения точек приложения K , L и B сил P_1 , P_2 и R_B и возможное угловое перемещение балки CD через $\delta\varphi$, выразим связь между ними:

$$\delta r_C = \frac{6}{5}\delta r_L = \frac{3}{2}\delta r_B = 3 \cdot \delta r_K = 2a \cdot \delta\varphi. \quad (1.6)$$

Применив принцип возможных перемещений, запишем:

$$R_B \cdot \delta r_B - P_1 \cdot \delta r_K - P_2 \cdot \delta r_L - m \cdot \delta\varphi = 0. \quad (1.7)$$

Воспользовавшись формулой (1.6), после почлененного сокращения уравнения (1.7) на δr_C , находим:

$$\frac{2}{3}R_B - \frac{1}{3}P_1 - \frac{5}{6}P_2 - \frac{1}{2a}m = 0,$$

откуда после подстановки численных значений получим:

$$R_B = 14,5m.$$

Остается определить силу опорной реакции R_D . Вновь применяя принцип освобождаемости от связей, мысленно отбрасываем опору D , возмешая её отсутствие силой опорной реакции R_D .

Дадим возможное перемещение δr_D точке D по вертикали вверх (рис. 1.6).

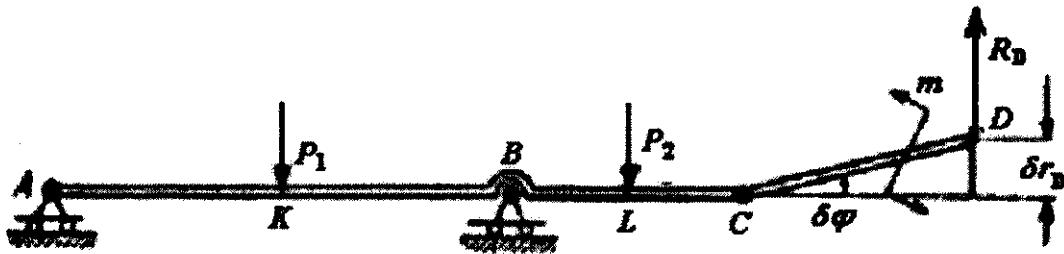


Рис. 1.6. Положение составной балки при возможном перемещении δr_D

При этом балка CD повернется против часовой стрелки на угол

$$\delta\varphi = \frac{\delta r_D}{2a} \quad (1.8)$$

Положение балки AC остается неизменным.

Записав принцип возможных перемещений, получим:

$$R_D \cdot \delta r_D + m \cdot \delta\varphi = 0. \quad (1.9)$$

После подстановки численных значений, использования формулы (1.8) и почлененного сокращения уравнения (1.9) на δr_D находим

$$R_D = -2m.$$

Знак минус указывает, что опорная реакция R_D направлена по вертикали вниз.

1.4. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций опор составной конструкции (задание Д-14 [8])

Дано: составная рама (рис. 1.7), $P_1 = 2$ Н; $P_2 = 4$ кН; $M = 5$ кНм; $q = 1,5$ кН/м.

Определить реакции опор рамы.

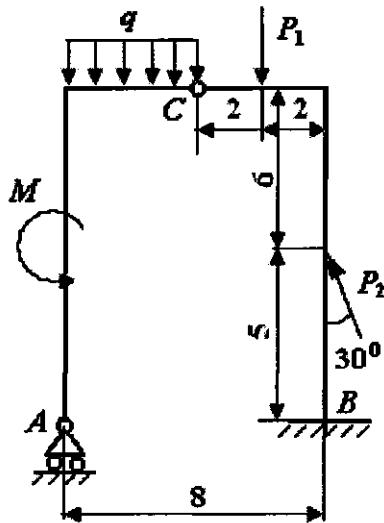


Рис. 1.7. Схема составной рамы

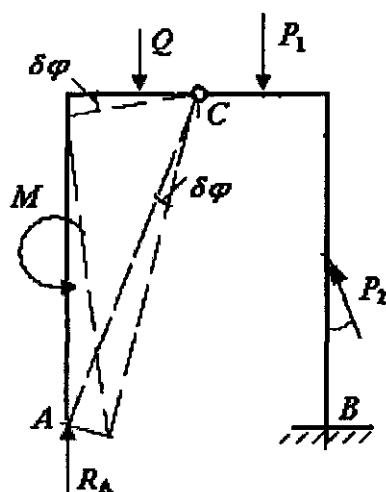


Рис. 1.8. Положение рамы при возможном перемещении левой части рамы на $\delta\varphi$

Решение. Заменим равномерно распределенную нагрузку сосредоточенной силой $Q = q \cdot 4 = 1,5 \cdot 4 = 6 \text{ кН}$, приложенной в середине загруженного участка.

Найдем реакцию подвижной опоры A , для чего мысленно отбросим эту связь, заменив её действие реакцией R_A (рис. 1.8).

Возможным перемещением левой части рамы является её поворот вокруг шарнира С на угол $\delta\varphi$, например, против вращения часовой стрелки; правая часть рамы остается неподвижной.

Составим уравнение работ, выраждающих принцип возможных перемещений. При этом учтем, что работа силы при повороте тела равна произведению момента силы относительно центра вращения на угол поворота тела:

$$Q \cdot 2 \cdot \delta\varphi + M \cdot \delta\varphi - R_A \cdot 4\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$R_A = \frac{Q \cdot 2 + M}{4} = \frac{6 \cdot 2 + 5}{4} = 4,25 \text{ кН.}$$

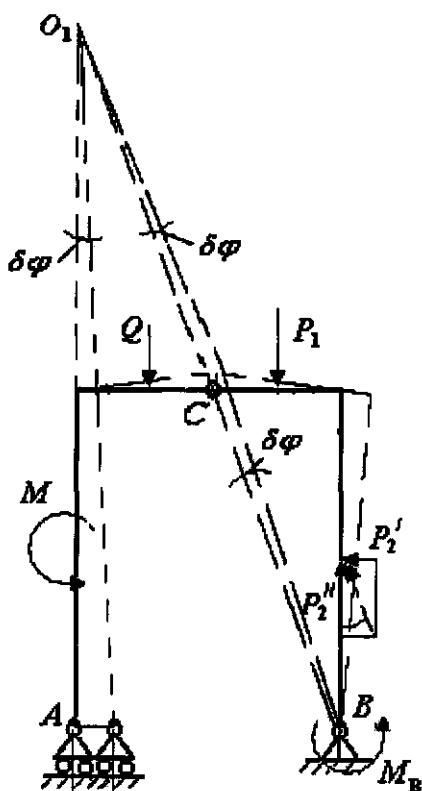


Рис. 1.9. Положение рамы при возможном перемещении правой части рамы на $\delta\varphi$

Переходим к определению реакции заделки B . Сначала найдем реактивный момент M_B . Для этого отбросим связь, препятствующую повороту правой части рамы, заменив заделку шарнирной неподвижной опорой и приложив искомый момент M_B (рис. 1.9).

Сообщим системе возможное перемещение: правая часть рамы повернется вокруг шарнира B на угол $\delta\varphi$, например, по вращению часовой стрелки, а левая часть будет совершать плоское движение. Найдем мгновенный центр вращения O_1 левой части рамы.

Углы поворота обоих частей одинаковы, так как расстояния от точки C до центров B и O_1 равны.

Составим уравнение работ:

$$M \cdot \delta\varphi - Q \cdot 2\delta\varphi - P_1 \cdot 2\delta\varphi - P'_2 \cdot 5\delta\varphi - M_B \delta\varphi = 0,$$

где

$$P'_2 = P_2 \cdot \sin 30^\circ,$$

и определим

$$M_B = M - Q \cdot 2 - P_1 \cdot 2 - P'_2 \cdot 0,5 \cdot 5 = 5 - 6 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 4 \cdot 0,5 \cdot 5 = -21 \text{ кНм.}$$

Для определения вертикальной составляющей \vec{Y}_B реакции заделки отбросим связь, препятствующую вертикальному перемещению точки B , заменив заделку ползуном B в вертикальных направляющих, жестко скрепленным с рамой BC и приложив реакцию \vec{Y}_B (рис. 1.10).

Сообщим раме возможное перемещение: правая часть рамы переместиться поступательно, например вверх на величину δs , так как поворот ползуна в направляющих невозможен. При этом левая часть рамы будет совершать плоское движение.

Для левой части рамы найдем мгновенный центр вращения O_2 . Составим уравнение работ:

$$M \cdot \delta\varphi - Q \cdot 2\delta\varphi - P_1 \cdot \delta s + P_2'' \cdot \delta s - Y_B \delta s = 0.$$

Из рис. 1.10 видно, что

$$P_2'' = P_2 \cdot \cos 30^\circ, \quad \delta s = 4 \cdot \delta\varphi.$$

Следовательно,

$$M \cdot \delta\varphi - Q \cdot 2\delta\varphi - P_1 \cdot 4\delta\varphi + P_2 \cdot 4\delta\varphi - Y_B \cdot 4\delta\varphi = 0,$$

откуда

$$Y_B = \frac{-M + Q \cdot 2 + P_1 \cdot 4 - P_2 \cdot 4}{4} = 0,29 \text{ кН.}$$

Для определения горизонтальной составляющей \bar{X}_B реакции заделки представим опору в виде ползуна B в горизонтальных направляющих, жестко скрепленного с рамой BC , и приложим реакцию \bar{X}_B (рис. 1.11).

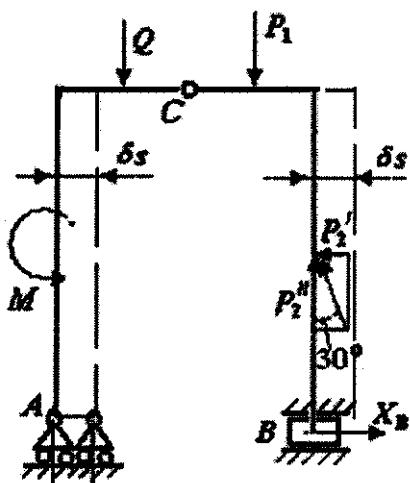


Рис. 1.11. Положение рамы при возможном перемещении правой части рамы на δs

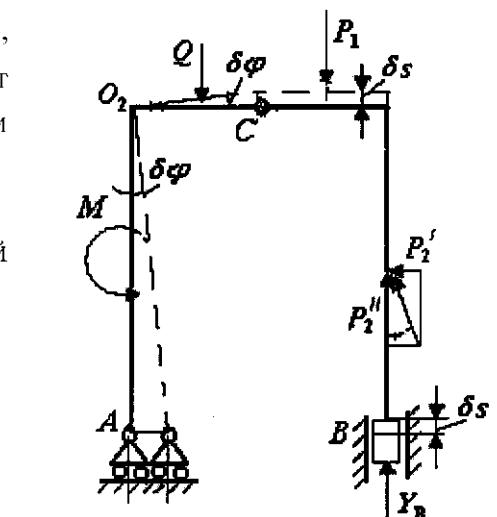


Рис. 1.10. Положение рамы при возможном перемещении правой части рамы на δs

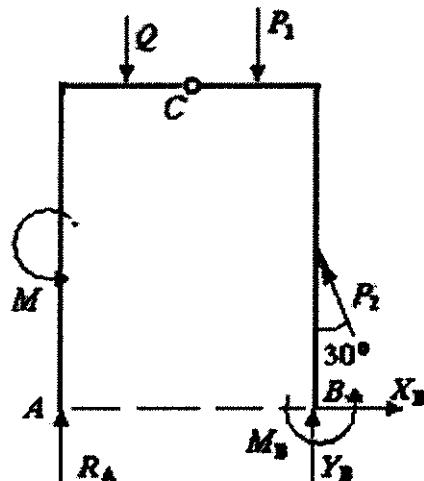


Рис. 1.12. Схема рамы с действующими на неё силами и реакциями связей

Возможное перемещение в этом случае - поступательное перемещение всей рамы, например, вправо на величину δs (поворот ползуна в направляющих невозможен).

Составим уравнение работ:

$$-P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta s + X_B \cdot \delta s = 0,$$

$$X_B = P_2 \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 0,5 = 2 \text{ кН.}$$

Произведем теперь проверку правильности решения задачи. Из уравнения равновесия сил для всей рамы (рис. 1.12) в виде $\sum Y_i = 0$ имеем

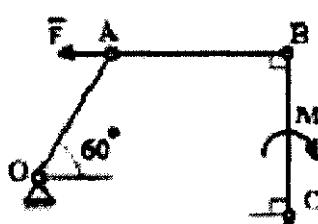
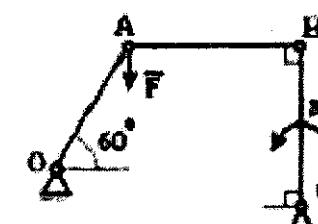
$$R_A - Q - P_1 + P_2 \cdot \cos 30^\circ + Y_B = 0, \quad 4,25 - 6 - 2 + 4 \cdot 0,866 + 0,29 \approx 0.$$

Из уравнения равновесия сил для всей рамы (рис. 1.12) в виде $\sum M_{iB} = 0$ имеем

$$-R_A \cdot 8 + M + Q \cdot 6 - P_1 \cdot 2 + P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 5 + M_B = 0,$$

$$-4,25 \cdot 8 + 5 + 6 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0,5 \cdot 5 - 21 = 55 - 55 = 0.$$

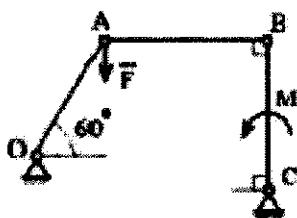
1.5. Тестовые задания

A6 <p>Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M, $OA = r$, $BC = a$. Правильным соотношением между силой и моментом является...</p>	 <p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $M = Fa$ 2) $M = Fa \frac{\sqrt{3}}{2}$ 3) $M = Fr$ 4) $M = Fr\sqrt{3}$ 5) $M = Fr \frac{\sqrt{3}}{2}$
A7 <p>Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M, $OA = BC = r$, $AB = a$. Правильным соотношением между силой и моментом является...</p>	 <p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $M = Fr \frac{\sqrt{3}}{2}$ 2) $M = Fr$ 3) $M = \frac{Fr}{2}$ 4) $M = Fa$ 5) $M = Fa \frac{\sqrt{3}}{2}$
A8 <p>Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M, $OA = r$, $BC = a$. Правильным соотношением между силой и моментом является...</p>	 <p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) $M = Fr \frac{\sqrt{3}}{3}$ 2) $M = \frac{Fr}{2}$ 3) $M = Fa \frac{\sqrt{3}}{3}$ 4) $M = Fr$ 5) $M = Fa$

A9

Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M , $OA = r$, $BC = a$.

Правильным соотношением между силой и моментом является...



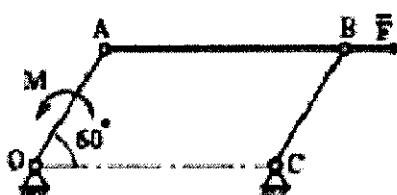
Варианты ответов:

- 1) $M = Fr$
- 2) $M = \frac{Fr}{2}$
- 3) $M = Fa \frac{\sqrt{3}}{3}$
- 4) $M = Fr \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 5) $M = Fa$

A10

Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M , $OA = BC = r$, $AB = a$.

Правильным соотношением между силой и моментом является...



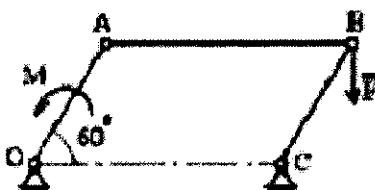
Варианты ответов:

- 1) $M = \frac{Fr}{2}$
- 2) $M = Fr \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) $M = Fa$
- 4) $M = Fa \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 5) $M = Fr$

A11

Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M , $OA = BC = r$, $AB = a$.

Правильным соотношением между силой и моментом является...



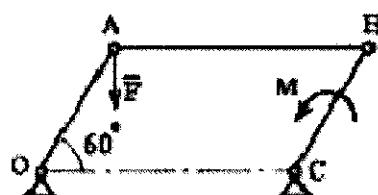
Варианты ответов:

- 1) $M = Fr \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) $M = Fa$
- 3) $M = Fr$
- 4) $M = Fa \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 5) $M = \frac{Fr}{2}$

A12

Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M , $OA = BC = r$, $AB = a$.

Правильным соотношением между силой и моментом является...



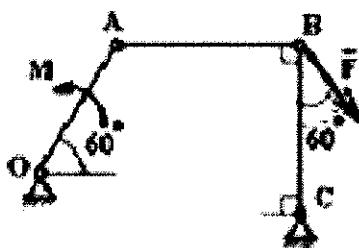
Варианты ответов:

- 1) $M = \frac{Fr}{2}$
- 2) $M = Fa$
- 3) $M = Fr$
- 4) $M = Fa \frac{\sqrt{3}}{2}$
- 5) $M = Fr \frac{\sqrt{3}}{2}$

A13

Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M , $OA = r$, $BC = a$.

Правильным соотношением между силой и моментом является...



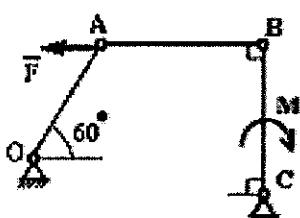
Варианты ответов:

- 1) $M = Fa\sqrt{3}$
- 2) $M = Fa\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) $M = Fr\frac{\sqrt{3}}{4}$
- 4) $M = Fr\sqrt{3}$
- 5) $M = Fr\frac{\sqrt{3}}{2}$

A14

Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M , $OA = r$, $BC = a$.

Правильным соотношением между силой и моментом является...



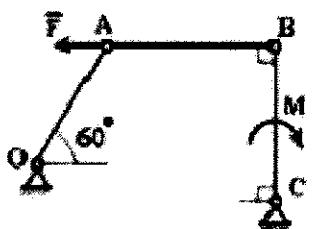
Варианты ответов:

- 1) $M = Fr$
- 2) $M = Fa$
- 3) $M = \frac{Fr}{2}$
- 4) $M = Fa\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 5) $M = Fr\frac{\sqrt{3}}{2}$

A15

Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M , $OA = r$, $BC = a$.

Правильным соотношением между силой и моментом является...



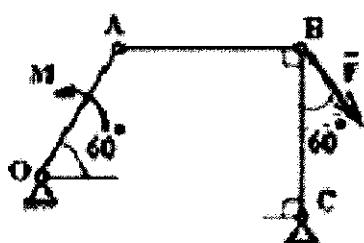
Варианты ответов:

- 1) $M = Fa\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 2) $M = Fr$
- 3) $M = Fr\sqrt{3}$
- 4) $M = Fr\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 5) $M = Fa$

A16

Механизм, изображенный на чертеже, находится в равновесии под действием силы F и момента M , $OA = r$, $BC = a$.

Правильным соотношением между силой и моментом является...



Варианты ответов:

- 1) $M = Fa\sqrt{3}$
- 2) $M = Fa\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 3) $M = Fr\frac{\sqrt{3}}{4}$
- 4) $M = Fr\sqrt{3}$
- 5) $M = Fr\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. ОБОБЩЕННЫЕ СИЛЫ

2.1. Определение обобщенной силы в механической системе «барабан - груз»

Груз A массы M (рис. 2.1) движется под действием силы F вверх по негладкой наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. К грузу A привязан конец нити, намотанной на барабан B радиуса r . Барабан вращается вокруг неподвижной оси C , перпендикулярной плоскости рисунка. К барабану приложен момент сопротивления m_c , направленный противоположно вращению барабана.

Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей силу. Нить считать нерастяжимой и массой ее пренебречь. Коэффициент трения скольжения груза о наклонную плоскость равен f .

Решение. Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение на наклонной плоскости груза A определяет положение барабана B .

Выберем координату s груза A в качестве обобщенной координаты, направив ось s вдоль наклонной плоскости вверх. Обозначим вес барабана P_b .

К системе приложены задаваемые силы: P - вес груза A , P_b — вес барабана B , F - сила, приложенная к грузу, пара сил полезного сопротивления с моментом m_c .

Негладкая наклонная плоскость не является идеальной связью. Поэтому к задаваемым силам следует добавить силу трения скольжения $F_{t.c}$ груза о наклонную плоскость ($F_{t.c} = f N = f P \cos \alpha$), направленную в сторону, противоположную движению, т. е. вдоль наклонной плоскости вниз.

Дадим грузу A обобщенное возможное перемещение δr_s в сторону возрастания s , т. е. параллельно наклонной плоскости вверх.

При этом барабан B получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi$, связанное с δr_s зависимостью

$$\delta r_s = r \cdot \delta\varphi. \quad (2.1)$$

Вычислим сумму работ задаваемых сил и силы трения скольжения $F_{t.c}$ на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению δr_s :

$$\delta A = \delta A(P) + \delta A(F) + \delta A(F_{t.c}) + \delta A(P_b) + \delta A(m_c). \quad (2.2)$$

Находим:

$$\delta A(P) = -P \cdot \delta r_s \sin \alpha, \quad (2.3)$$

$$\delta A(F) = F \cdot \delta r_s, \quad (2.4)$$

$$\delta A(F_{\text{т.с}}) = -F_{\text{т.с}} \cdot \delta r_s = -f P \cos \alpha \cdot \delta r_s, \quad (2.5)$$

$$\delta A(P_1) = 0, \quad (2.6)$$

так как точка приложения силы P_1 неподвижна,

$$\delta A(m_c) = -m_c \cdot \delta \varphi. \quad (2.7)$$

Воспользовавшись формулами (2.1), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) и (2.7), представим (2.2) в виде

$$\delta A = [F - P(\sin \alpha + f \cos \alpha) - \frac{m_c}{r}] \cdot \delta r_s. \quad (2.8)$$

Обобщенной силой Q_s является коэффициент, стоящий в формуле (2.8) при обобщенном возможном перемещении δr_s , т. е.

$$Q_s = F - P(\sin \alpha + f \cos \alpha) - \frac{m_c}{r}. \quad (2.9)$$

Если бы в качестве обобщенной координаты мы выбрали угол поворота барабана φ , считая его положительным по часовой стрелке, то мы дали бы обобщенное возможное угловое перемещение $\delta \varphi$ в том же направлении. При этом формулы (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) и (2.7) приняли бы соответственно вид

$$\begin{aligned} \delta A(P) &= -P \cdot r \cdot \delta \varphi \sin \alpha, & \delta A(F) &= F \cdot r \cdot \delta \varphi, & \delta A(F_{\text{т.с}}) &= -f \cdot P \cdot r \cdot \cos \alpha \cdot \delta \varphi, \\ \delta A(P_1) &= 0, & \delta A(m_c) &= -m_c \cdot \delta \varphi. \end{aligned}$$

После подстановки этих значений в формулу (2.2) мы получили бы:

$$\delta A = [F \cdot r - P \cdot r(\sin \alpha + f \cos \alpha) - m_c] \cdot \delta \varphi.$$

Обобщенной силой Q_φ явился бы коэффициент, стоящий при $\delta \varphi$, т. е.

$$Q_\varphi = F \cdot r - P \cdot r(\sin \alpha + f \cos \alpha) - m_c. \quad (2.10)$$

2.2. Определение обобщенной силы в кулисном механизме

Выбрать обобщенную координату и определить соответствующую ей обобщенную силу в случае кулисного механизма, изображенного на рис. 2.2.

К концу D штока BD кулисы прикреплена пружина, коэффициент жесткости которой равен c . При крайнем правом положении кулисы пружина недеформирована. Вес кривошипа OA равен P_1 , r -длина кривошипа. Массами камня A кулисы и пружины пренебречь. Кривошип OA считать однородным стержнем. Механизм расположен в вертикальной плоскости. Силами сопротивления пренебречь.

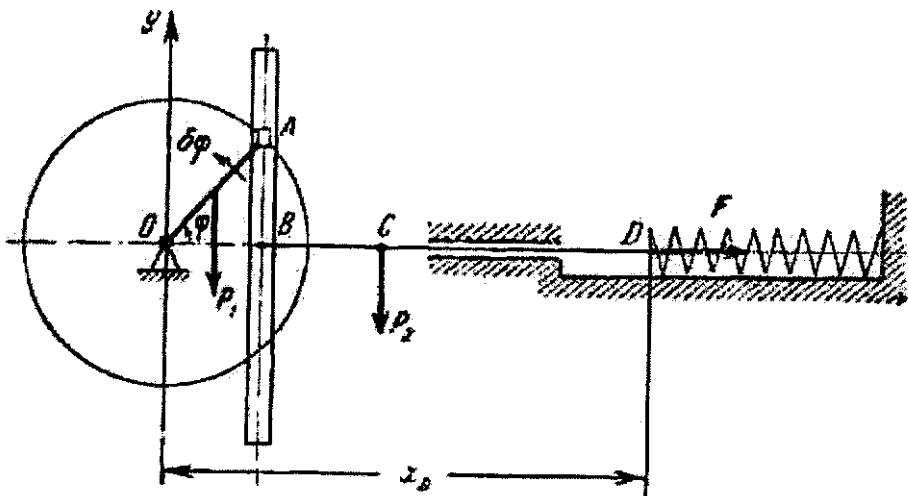


Рис. 2.2. Схема кулисного механизма

Решение. Оси xy изображены на рисунке.

Кулисный механизм имеет одну степень свободы, так как положение всех его точек однозначно определяется одним параметром, например, углом поворота φ кривошипа OA , отсчитываемым от оси x против часовой стрелки. Выберем в качестве обобщенной координаты угол φ .

К механизму приложены три задаваемые силы: P_1 - вес кривошипа, P_2 - вес рамки и штока, F - упругая сила пружины. В положении механизма, указанном на рисунке, пружина растянута. Следовательно, упругая сила F пружины направлена по горизонтали направо. Она равна по модулю произведению коэффициента жесткости c на модуль удлинения Δ пружины, т. е. $F = c \cdot |\Delta|$. Удлинение Δ пружины равно разности абсцисс точки D в ее начальном и промежуточном положениях: $\Delta_x = x_D - x_{0D}$. Так как

$$x_{0D} = r + BD, \quad x_D = OB + BD = r \cos \varphi + BD, \quad (2.11)$$

то

$$\Delta_x = -r(1 - \cos \varphi). \quad (2.12)$$

Следовательно,

$$F_x = -c \cdot \Delta_x = c \cdot r(1 - \cos \varphi). \quad (2.13)$$

Для вычисления обобщенной силы Q_φ , дадим обобщенное возможное перемещение $\delta\varphi$ в направлении возрастания угла φ , т. е. против часовой стрелки.

Определим возможное перемещение δx_D точки D пружины, выразив его в зависимости от $\delta\varphi$. Для этого вычислим вариацию абсциссы x_D , определенной формулой (2.11):

$$\delta x_D = -r \sin \varphi \cdot \delta\varphi. \quad (2.14)$$

Знак минус указывает, что направление возможного перемещения δx_D точки D при $\sin \varphi \cdot \delta\varphi > 0$ противоположно положительному направлению оси x , т. е. направлено налево.

Вычислим сумму работ задаваемых сил P_1 и P_2 и упругой силы F на возможном перемещении $\delta\varphi$:

$$\delta A = -P_1 \frac{r}{2} \cos \varphi \cdot \delta\varphi + F_x \cdot \delta x_D. \quad (2.15)$$

Работа силы веса P_2 на горизонтальном перемещении ее точки приложения C равна нулю.

Подставив в формулу (2.15) значение F_x из (2.13) и значение δx_D из (2.14), получим:

$$\delta A = -\frac{r}{2} [P_1 \cos \varphi + 2cr(1 - \cos \varphi) \sin \varphi] \cdot \delta\varphi. \quad (2.16)$$

Искомой обобщенной силой Q_φ является коэффициент, стоящий в выражении элементарной работы в формуле (2.16) при $\delta\varphi$, т. е

$$Q_\varphi = -\frac{r}{2} [P_1 \cos \varphi + 2cr(1 - \cos \varphi) \sin \varphi].$$

Приведем второй вариант вычисления обобщенной силы Q_φ . Так как все задаваемые силы, включая упругую силу F , имеют потенциал, то можно определить обобщенную силу по формуле $Q_\varphi = -\frac{d\Pi}{d\varphi}$. Для этого следует вычислить потенциальную энергию данной системы, которая равна сумме потенциальных энергий сил P_1 и P_2 и F , т. е.

$$\Pi = \Pi^{(1)} + \Pi^{(2)} + \Pi^{(3)}. \quad (2.17)$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(1)}$ веса P_1 равна $\Pi^{(1)} = P_1 \cdot y$, где y - ордината центра тяжести кривошипа OA . Следовательно

$$\Pi^{(1)} = P_1 \frac{r}{2} \sin \varphi. \quad (2.18)$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(2)}$ силы веса P_2 равна нулю, так как ее точка приложения C перемещается по горизонтали, т. е.

$$\Pi^{(2)} = 0. \quad (2.19)$$

Потенциальная энергия $\Pi^{(3)}$ упругой силы F пружины равна $\Pi^{(3)} = \frac{c}{2} \Delta_x^2$.

Подставив значение Δ_x из формулы (2.12), находим:

$$\Pi^{(3)} = \frac{c}{2} r^2 (1 - \cos \varphi)^2. \quad (2.20)$$

Воспользовавшись формулами (2.18), (2.19) и (2.20), запишем формулу (2.12) в виде

$$\Pi = P_1 \frac{r}{2} \sin \varphi + \frac{c}{2} r^2 (1 - \cos \varphi)^2. \quad (2.21)$$

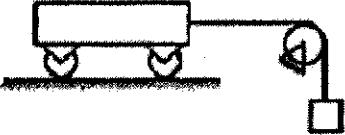
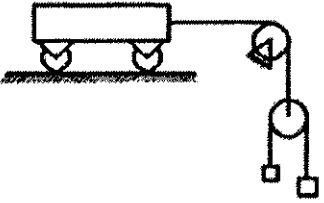
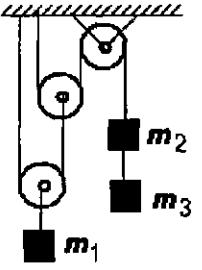
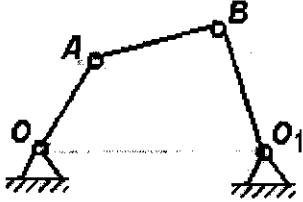
Для вычисления искомой обобщенной силы остается взять с обратным знаком производную от потенциальной энергии P , определяемой формулой (2.21), по обобщенной координате φ :

$$Q_\varphi = -\frac{r}{2}[P_1 \cos \varphi + 2cr(1 - \cos \varphi) \sin \varphi].$$

Объем вычислений, проведенных при подсчете обобщенной силы Q_φ в каждом из вариантов, примерно равносценен. Однако следует иметь ввиду, что первым вариантом можно воспользоваться независимо от характера задаваемых сил, в то время как второй вариант пригоден только в случае задаваемых сил имеющих потенциал.

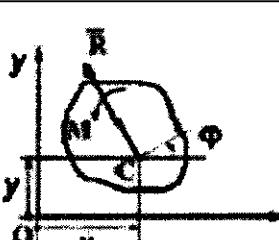
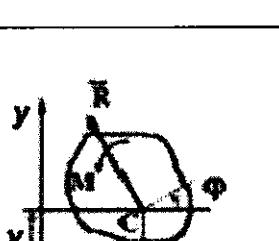
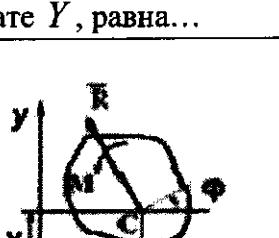
2.3. Тестовые задания

2.3.1. Определение числа степеней свободы механической системы

A1 Число степеней свободы данной системы равно... 	Варианты ответов: 1) нулю 2) единице 3) трем 4) двум
A2 Число степеней свободы данной системы равно... 	Варианты ответов: 1) нулю 2) единице 3) трем 4) двум
A3 Число степеней свободы данной системы равно... 	Варианты ответов: 1) двум 2) нулю 3) единице 4) трем
A4 Число степеней свободы данной системы равно... 	Варианты ответов: 1) трем 2) нулю 3) единице 4) двум

<p>A5</p> <p>Число степеней свободы данной системы равно...</p> 	<p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) двум 2) единице 3) трем 4) нулю
--	--

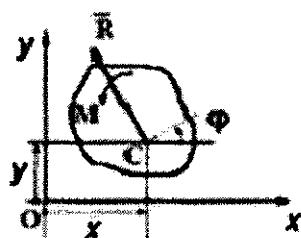
2.3.2. Определение обобщенной силы

<p>A17</p> <p>Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 6\bar{i} + 7\bar{j}$ и главному моменту $M = 8 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ - в данный момент).</p> <p>Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате Y, равна...</p>	 <p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) 7 2) 18 3) -14 4) -12
<p>A18</p> <p>Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 4\bar{i} - 5\bar{j}$ и главному моменту $M = 7 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 2\bar{i} + 0,2\bar{j}$ - в данный момент).</p> <p>Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате Y, равна...</p>	 <p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) -10 2) -2 3) -5 4) -1
<p>A19</p> <p>Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 6\bar{i} + 7\bar{j}$ и главному моменту $M = 8 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ - в данный момент).</p> <p>Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате Y, равна...</p>	 <p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) 7 2) 18 3) -12 4) -14
<p>A20</p> <p>Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 6\bar{i} + 7\bar{j}$ и главному моменту $M = 8 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ - в данный момент).</p> <p>Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате φ, равна...</p>	 <p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) 16 2) 24 3) -16 4) 8

A21

Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 3\bar{i} - 6\bar{j}$ и главному моменту $M = 10 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$ - в данный момент).

Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате φ , равна...



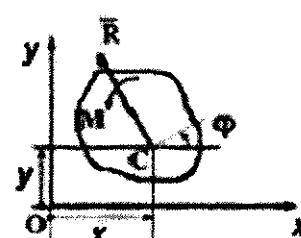
Варианты ответов:

- 1) 10
- 2) 4
- 3) 9
- 4) 24

A22

Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 6\bar{i} + 7\bar{j}$ и главному моменту $M = 8 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 3\bar{i} - 2\bar{j}$ - в данный момент).

Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате x , равна...



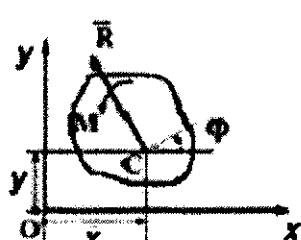
Варианты ответов:

- 1) 3
- 2) 6
- 3) 18
- 4) -12

A23

Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 3\bar{i} + 6\bar{j}$ и главному моменту $M = 10 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 4\bar{i} - 3\bar{j}$ - в данный момент).

Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате x , равна...



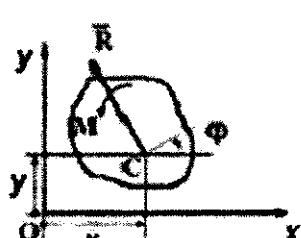
Варианты ответов:

- 1) 3
- 2) 9
- 3) 12
- 4) 15

A24

Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 4\bar{i} - 5\bar{j}$ и главному моменту $M = 7 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 2\bar{i} + 0,2\bar{j}$ - в данный момент).

Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате Y , равна...



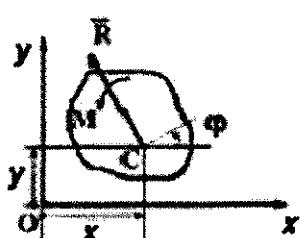
Варианты ответов:

- 1) -1
- 2) -10
- 3) -5
- 4) -2

A25

Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = 4\bar{i} - 5\bar{j}$ и главному моменту $M = 7 \text{ Нм}$ ($\bar{r} = \bar{OC} = 2\bar{i} + 0,2\bar{j}$ - в данный момент).

Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате φ , равна...



Варианты ответов:

- 1) 4
- 2) 5
- 3) -5
- 4) 7

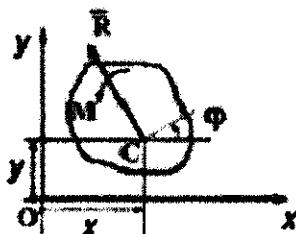
A26

Плоская система сил, действующая на тело, приведена к главному вектору $\bar{R} = -4\bar{i} - 5\bar{j}$ и главному моменту $M = 6 \text{ Нм}$ $\bar{r} = \overline{OC} = 2\bar{i} + 0,2\bar{j}$ - в данный момент).

Тогда обобщенная сила, соответствующая обобщенной координате Y , равна...

Варианты ответов:

- 1) -4
- 2) -6
- 3) -5
- 4) 2



3. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДИНАМИКИ

3.1. Движение механической системы «блок - грузы»

Грузы A и B соединены тонкой нерастяжимой нитью, переброшенной через блок D (рис. 3.1).

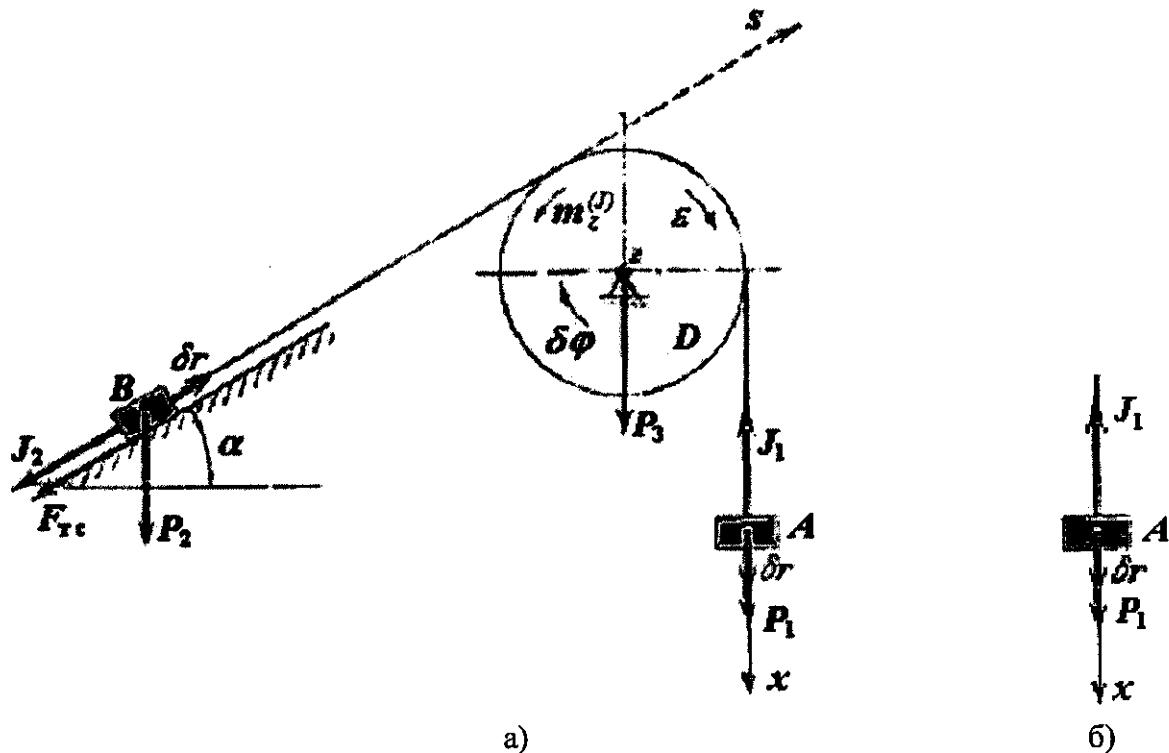


Рис. 3.1. Схема механической системы

При опускании груза A веса P_1 блок D веса P_3 вращается вокруг неподвижной оси, а груз B веса P_2 поднимается вверх по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту. Коэффициент трения скольжения груза B о наклонную плоскость равен f . Блок D считать однородным круглым диском.

Определить ускорение w грузов A и B .

Решение. При решении задачи методом кинетостатики пришлось бы для определения ускорения w грузов рассмотреть каждую из трех масс системы

(груз A , груз B и блок D) в отдельности, составить уравнения «равновесия» этих масс и решить систему трех уравнений с тремя неизвестными.

Значительно проще решается эта задача применением общего уравнения динамики. Вместо решения системы уравнений приходится решать лишь одно уравнение.

Направим ось z вдоль оси вращения блока D за рисунок. Радиус блока обозначим r .

Изобразим задаваемые силы, приложенные к данной системе:

P_1 - вес груза A , P_2 - вес груза B , P_3 - вес блока D . При наличии идеальных связей, наложенных на систему, силы реакций связей в общее уравнение динамики не входят.

Добавив силу трения скольжения $F_{\text{т.с.}}$ груза B о наклонную плоскость, мы считаем, что на данную систему наложены только идеальные связи (нить при движении системы считается натянутой и нерастяжимой). Остается прибавить силы инерции материальных точек системы. Пусть груз A опускается с исключенным ускорением w .

К грузам A и B , совершающим поступательное движение, приложим равнодействующие сил инерции, направив их противоположно ускорениям соответствующих грузов, т. е. J_1 - вверх, а J_2 - параллельно наклонной плоскости вниз, причем

$$J_{1x} = -\frac{P_1}{g}w_x, \quad J_{2s} = -\frac{P_2}{g}w_s = -\frac{P_2}{g}w_x. \quad (3.1)$$

К блоку D , вращающемуся вокруг неподвижной оси, приложим главный момент сил инерции $m_z^{(J)}$, знак которого противоположен знаку проекции углового ускорения ε_z :

$$m_z^{(J)} = -I_z \varepsilon_z.$$

Так как $I_z = \frac{P_3 r^2}{2g}$, а $\varepsilon_z = \frac{w_x}{r}$, то

$$m_z^{(J)} = \frac{P_3 r w_x}{2g}. \quad (3.2)$$

(Главный вектор сил инерции блока $\mathbf{V}^{(J)} = -M\mathbf{w}_C$ равен нулю, так как центр тяжести блока расположен на оси вращения.)

Мысленно остановив систему, дадим одной из ее материальных точек **возможное** перемещение. Можно дать линейное возможное перемещение грузу A вверх или вниз, либо грузу B - по наклонной плоскости вверх или вниз, либо блоку D - угловое возможное перемещение по или против часовой стрелки.

Дадим грузу A возможное перемещение δr по вертикали вниз. Не следует считать, что направления движения какой-либо материальной точки и ее возможного перемещения должны обязательно совпадать. Направление движения точки зависит от системы сил, которые к ней приложены, возможное же перемещение точки, рассматриваемое из данного положения, зависит только

от связей, наложенных на эту точку, в остальном оно произвольно. При этом, в силу нерастяжимости нити, груз B получит равное по модулю возможное перемещение, направленное вдоль наклонной плоскости вверх, а блок D получит угловое возможное перемещение $\delta\varphi$. Взяв точку нити на ободе блока, получим зависимость между линейным и угловым возможными перемещениями

$$\delta r = r \cdot \delta\varphi, \quad (3.3)$$

где r - радиус блока.

Применим к данной системе материальных точек общее уравнение динамики, т. е. приравняем нуль сумму работ задаваемых сил (включая силы реакции неидеальных связей) и сил инерции на возможных перемещениях точек системы

$$P_1 \cdot \delta r + J_{1x} \cdot \delta r + m_z^{(J)} \cdot \delta\varphi - P_2 \cdot \delta r \sin\alpha - F_{\text{т.с.}} \cdot \delta r + J_{2s} \cdot \delta r = 0. \quad (3.4)$$

Подставив в уравнение (3.4) $F_{\text{т.с.}} = f \cdot N = f \cdot P_2 \cos\alpha$ и воспользовавшись формулами (3.1), (3.2) и (3.3), после сокращения на δr получим:

$$P_1 = \frac{P_1}{g} w_x - \frac{P_3}{g} w_x - P_2 \sin\alpha - f P_2 \cos\alpha - \frac{P_2}{g} w_x = 0,$$

откуда находим проекцию искомого ускорения грузов A и B :

$$w_x = 2g \frac{P_1 - P_2(\sin\alpha + f \cos\alpha)}{2P_1 + 2P_2 + P_3}. \quad (3.5)$$

Если бы по условию задачи требовалось также определить какие-либо силы реакций связей либо давлений на связи, то пришлось бы применить принцип освобождаемости к связи, силу реакции которой требуется определить, и к соответствующей массе системы применить метод кинетостатики. При наличии вычисленных ускорений это не представляет затруднений.

Так, если требуется определить силу реакции правой ветви нити, мы мысленно обрываем нить вблизи груза A , прикладываем к грузу три силы (см. рис. 3.1, б): P_1 - вес груза, T_1 - силу реакции нити, J_1 - силу инерции груза A .

Записываем уравнение «равновесия» груза A в проекции на вертикальную ось x :

$$P_1 - T_1 + J_{1x} = 0.$$

Так как $J_{1x} = -\frac{P_1}{g} w_x$, то $T_1 = P_1 - \frac{P_1}{g} w_x$,

где w_x - ускорение груза, записанное в формуле (3.5).

После подстановки значения w_x получим:

$$T_1 = \frac{P_1[P_3 + 2P_2(1 + \sin\alpha + f \cos\alpha)]}{2P_1 + 2P_2 + P_3}.$$

3.2. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы (задание Д-17 [8])

Для заданной механической системы (рис. 3.2) определить ускорение w груза 1 и натяжения T_{1-2} и T_{2-3} ветвей 1–2 и 2–3 нити, к которой прикреплены грузы.

Дано: $G_1 = G_2 = G_3 = G$; коэффициент трения скольжения $f = 0,2$; $r_2 = r_3 = r$. Блок 2 и каток 3 – сплошные однородные цилиндры.

Решение. Применим к решению задачи общее уравнение динамики. На рис. 3.3 представлены силы, действующие в механической системе: силы тяжести \vec{G}_1 – груза 1, \vec{G}_2 – блока 2, \vec{G}_3 – катка 3, а также сила трения скольжения \vec{F} груза по наклонной плоскости.

Приложим силы инерции. Сила инерции груза 1, движущегося поступательно с ускорением \vec{w}_1 , определяется вектором

$$\vec{\Phi}_1 = -m_1 \cdot \vec{w}_1.$$

Силы инерции блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси с угловым ускорением $\vec{\varepsilon}_2$, приводятся к паре сил, момент которой

$$\vec{M}_2^\Phi = -J_{2x} \cdot \vec{\varepsilon}_2.$$

Силы инерции катка 3, совершающего плоское движение, приводятся к вектору

$$\vec{\Phi}_3 = -m_3 \cdot \vec{w}_3,$$

и к паре сил, момент которой равен

$$\vec{M}_3^\Phi = -J_{3x} \cdot \vec{\varepsilon}_3,$$

где \vec{w}_3 – ускорение центра масс катка, $\vec{\varepsilon}_3$ – угловое ускорение катка.

Сообщим системе возможное перемещение (рис. 3.3) и составим общее уравнение динамики:

$$-G_1 \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \delta s + \Phi_1 \cdot \delta s + M_2^\Phi \cdot \delta\varphi_2 + \Phi_3 \cdot \delta s + M_3^\Phi \cdot \delta\varphi_3 = 0, \quad (3.6)$$

где $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$ – углы поворота блока 2 и катка 3 на возможном перемещении.

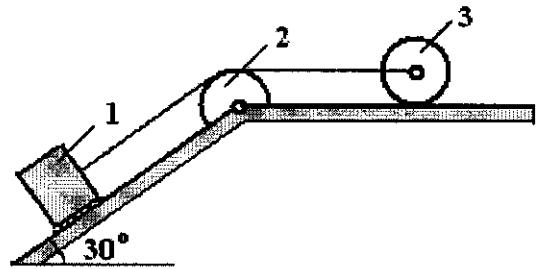


Рис. 3.2. Схема механической системы

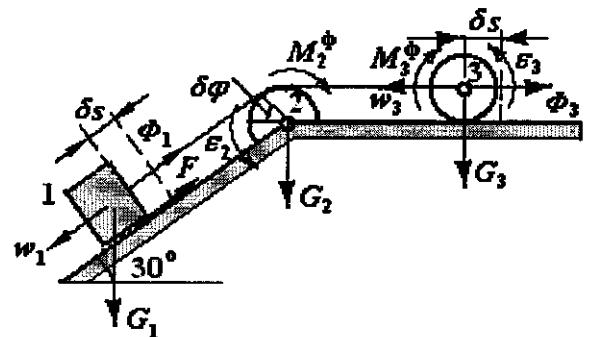


Рис. 3.3. Перемещения тел и силы, действующие на них

Учитывая, что в данной задаче $G_1 = G_2 = G_3 = G = mg$, нить нерастяжима и, следовательно, $w_3 = w_1 = w$, имеем:

$$\Phi_1 = m \cdot w; \quad M_2^\phi = J_{2x} \cdot \varepsilon_2 = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{w}{r} = \frac{m \cdot r \cdot w}{2};$$

$$\Phi_3 = m \cdot w; \quad M_3^\phi = J_{3x} \cdot \varepsilon_3 = \frac{mr^2}{2} \cdot \frac{w}{r} = \frac{m \cdot r \cdot w}{2}.$$

Сила трения

$$F = f \cdot G \cdot \cos 30^\circ = f \cdot mg \cdot \cos 30^\circ.$$

Уравнение (3.6) примет вид

$$-mg \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + f \cdot mg \cdot \cos 30^\circ \cdot \delta s + m \cdot w \cdot \delta s +$$

$$+ \frac{m \cdot r \cdot w}{2} \delta \varphi_2 + m \cdot w \cdot \delta s + \frac{m \cdot r \cdot w}{2} \delta \varphi_3 = 0.$$

Установим зависимость между возможными перемещениями, входящими в уравнение (3.6):

$$\delta \varphi_2 = \delta \varphi_3 = \frac{\delta s}{r}$$

и подставим эти зависимости для углов поворота в уравнение (3.6).

После деления всех членов уравнения (3.6) на m и δs получим:

$$-q \cdot \sin 30^\circ + f \cdot g \cdot \cos 30^\circ + w + w/2 + w + w/2 = 0,$$

откуда

$$w = \frac{g}{3} (\sin 30^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) = \frac{9,81}{3} (0,5 - 0,2 \cdot 0,87) = 1,09 \text{ м/с}^2.$$

Для определения натяжения в ветви 1 – 2 нити мысленно разрежем эту нить и заменим её действие на груз 1 реакцией \vec{T}_{1-2} (рис. 3.4).

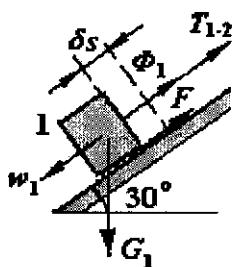


Рис. 3.4. Схема сил, действующих на груз 1

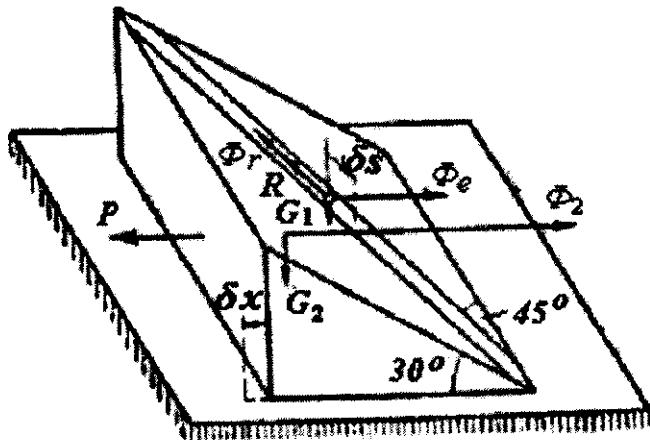
$$-G_1 \cdot \delta s \cdot \sin 30^\circ + F \cdot \delta s + \Phi_1 \cdot \delta s = 0,$$

откуда значение реакции

$$T_{1-2} = G_1 \cdot \sin 30^\circ - F - \Phi_1 = mg \cdot \sin 30^\circ - m \cdot w - f \cdot mg \cdot \cos 30^\circ =$$

$$= mg \left[\sin 30^\circ - f \cdot \cos 30^\circ - \frac{1}{3} (\sin 30^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) \right] = G \cdot \frac{2}{3} (\sin 30^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) = 0,22 G.$$

Для определения натяжения в ветви 2 – 3 нити мысленно разрежем эту нить и заменим её действие на каток 3 реакцией \vec{T}_{2-3} (рис. 3.5).



Ускорение тела 1 складывается из относительного \vec{w}_r и переносного $\vec{w}_e = \vec{w}_2$. Соответственно на рис. 3.7 показаны две составляющие силы инерции $\vec{\Phi}_r$ и $\vec{\Phi}_e$, причём

$$\vec{\Phi}_r = -m \cdot \vec{w}_r, \quad \vec{\Phi}_e = -m_1 \cdot \vec{w}_2.$$

Для того, чтобы получить уравнения движения механической системы с двумя степенями свободы применим принцип наложения дополнительных связей (принцип затвердевания). Мысленно закрепив тело 2, сообщим телу 1 возможное перемещение δs и составим общее уравнение динамики:

$$G_1 \cdot \delta s \cdot \cos(\vec{G}_1, \delta \vec{s}) - (R + \Phi_r) \cdot \delta s + \Phi_e \cdot \delta s \cdot \cos(\vec{\Phi}_e, \delta \vec{s}) = 0,$$

где $(\vec{G}_1, \delta \vec{s})$ – угол между векторами \vec{G}_1 и $\delta \vec{s}$; $(\vec{\Phi}_e, \delta \vec{s})$ – угол между векторами $\vec{\Phi}_e$ и $\delta \vec{s}$.

Учитывая, что $\cos(\vec{G}_1, \delta \vec{s}) = \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$; $\cos(\vec{\Phi}_e, \delta \vec{s}) = \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$, получим

$$m_1 g \cdot \sin 30^\circ \cdot \sin 45^\circ - b \cdot \dot{s} - m_1 \ddot{s} + m_1 \ddot{x} \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = 0$$

или

$$\ddot{s} + \frac{b}{m_1} \dot{s} - \frac{\sqrt{6}}{4} \ddot{x} = g \frac{\sqrt{2}}{4}. \quad (3.7)$$

Теперь мысленно закрепим тело 1 в ёлобе и сообщим телу 2 возможное перемещение δx .

Общее уравнение динамики в этом случае имеет вид

$$(P - \Phi_2 - \Phi_e) \cdot \delta x + \Phi_r \cdot \delta x \cdot \cos(\vec{\Phi}_r, \delta x) = 0.$$

Учитывая, что $\cos(\vec{\Phi}_r, \delta x) = \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ$, найдем

$$P - m_2 \ddot{x} - m_1 \ddot{x} + m_1 \ddot{s} \cdot \cos 30^\circ \cdot \sin 45^\circ = 0$$

или

$$(5m + m) \ddot{x} - m \frac{\sqrt{6}}{4} \ddot{s} = P. \quad (3.8)$$

Для решения системы дифференциальных уравнений (3.7) и (3.8) из (3.7) находим:

$$\ddot{x} = \frac{4}{\sqrt{6}} \ddot{s} + \frac{4b}{\sqrt{6m}} \dot{s} - \frac{g}{\sqrt{3}}.$$

Подставляя это значение \ddot{x} в (3.8), получим

$$3,75 \sqrt{6m} \ddot{s} + 4\sqrt{6b} \dot{s} = P + 2m\sqrt{3}g. \quad (3.9)$$

Введём обозначения:

Показав на схеме силу инерции $\vec{\Phi}_3$, момент сил инерции M_3^ϕ катка и сообщив катку возможное перемещение δs , составим общее уравнение динамики:

$$-T_{2-3} \cdot \delta s + \Phi_3 \cdot \delta s + M_3^\phi \cdot \delta\varphi = 0,$$

$$\text{где } \Phi_3 = m \cdot w, \quad M_3^\phi = \frac{m \cdot r \cdot w}{2}, \quad \delta\varphi = \frac{\delta s}{r},$$

$$w = \frac{g}{3} (\sin 30^\circ - f \cdot \cos 30^\circ).$$

Таким образом, имеем

$$-T_{2-3} + \Phi_3 + M_3^\phi / r = 0, \quad T_{2-3} = \frac{3}{2} m \cdot w = \frac{3}{2} m \cdot \frac{g}{3} (\sin 30^\circ - f \cdot \cos 30^\circ) = 0,17 G.$$

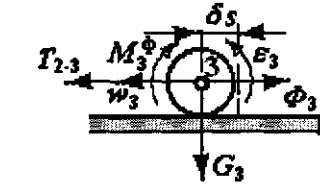


Рис. 3.5. Схема сил, действующих на каток 3

3.3. Применение общего уравнения динамики к исследованию движения механической системы с двумя степенями свободы (задание Д-18 [8])

Механическая система тел 1 и 2 (рис. 3.6) движется под воздействием **постоянной силы \vec{P}** и сил тяжести.

Дано: массы тел 1 и 2 механической системы $m_1 = m$, $m_2 = 5m$ (тело 1 считать материальной точкой); \vec{P} – постоянная сила, приложенная к телу 2 (тело 2 может двигаться только прямолинейно вдоль линии действия силы \vec{P}); $\vec{R} = -b\vec{v}$ (b – коэффициент пропорциональности в выражении силы сопротивления \vec{R} относительному движению тел 1 и 2, \vec{v} – относительная скорость тел). Коэффициент трения скольжения тела 2 $f = 0$.

Найти уравнения движения системы в обобщенных координатах $q_1 = x$ и при заданных начальных условиях: $q_{10} = 0$, $q_{20} = s_0$, $\dot{q}_{10} = 0$, $\dot{q}_{20} = 0$.

Решение. Воспользуемся общим уравнением динамики. Покажем задаваемые (активные) силы: силы тяжести тел 1 и 2 – \vec{G}_1 и \vec{G}_2 , силу \vec{P} , а также силу сопротивления движению тела 1 по желобу тела 2 (рис. 3.7). Со стороны тела 1 на тело 2 действует сила $\vec{R}' = \vec{R}$, которая на рис. 3.7 не показана.

Приложим силы инерции. Сила инерции тела 2, движущегося прямолинейно с ускорением \vec{w}_2 , определяется как $\vec{\Phi}_2 = -m_2 \cdot \vec{w}_2$.

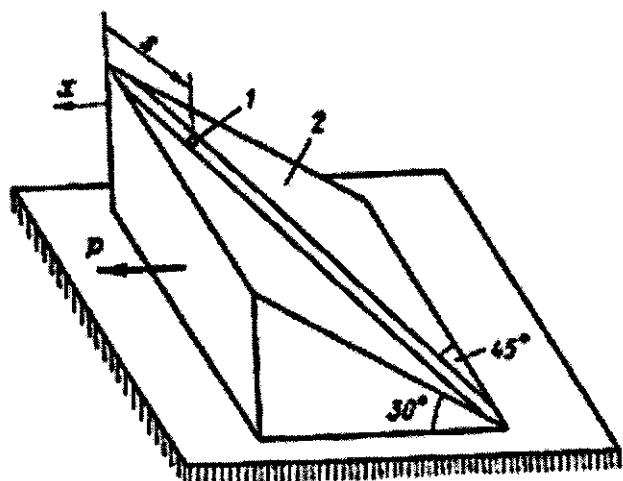


Рис. 3.6. Схема механической системы

$$3,75\sqrt{6}m = a; \quad 4\sqrt{6}b = \mu; \quad P + 2m\sqrt{3}g = h.$$

Тогда уравнение (3.9) примет вид:

$$a \cdot \ddot{s} + \mu \cdot \dot{s} = h \quad \text{или} \quad \ddot{s} + \frac{\mu}{a} \dot{s} = \frac{h}{a}. \quad (3.10)$$

Общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид:

$$s = C_1 + C_2 \cdot e^{-\frac{\mu}{a}t} + \frac{h}{\mu}t. \quad (3.11)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 определяются из начальных условий.

При $t = 0$

$$s = s_0, \quad \dot{s} = 0.$$

Следовательно, из уравнения (3.11)

$$s_0 = C_1 + C_2.$$

Дифференцируя (3.11) по t , имеем

$$\dot{s} = -\frac{\mu}{a}C_2 e^{-\frac{\mu}{a}t} + \frac{h}{\mu}.$$

При $t = 0 \quad \dot{s} = 0 \quad \text{или} \quad 0 = -\frac{\mu}{a}C_2 + \frac{h}{\mu}$, откуда $C_2 = \frac{a \cdot h}{\mu^2}$. Учитывая, что

$$s_0 = C_1 + C_2, \text{ находим } C_1 = s_0 - C_2 = s_0 - \frac{a \cdot h}{\mu^2}.$$

Окончательно

$$s = s_0 - \frac{a \cdot h}{\mu^2}(1 - e^{-\frac{\mu}{a}t}) + \frac{h}{\mu}t. \quad (3.12)$$

Для того, чтобы получить второе уравнение движения $x = x(t)$, найдем из (3.8)

$$\ddot{x} = \frac{1}{4\sqrt{6}}\ddot{s} + \frac{P}{6m}.$$

Дважды дифференцируя (3.12), определяем, что

$$\ddot{s} = \frac{h}{a}e^{-\frac{\mu}{a}t}.$$

Тогда

$$\ddot{x} = \frac{h}{a4\sqrt{6}}e^{-\frac{\mu}{a}t} + \frac{P}{6m}.$$

Так как $a = 3,75\sqrt{6}m$, то

$$\ddot{x} = \frac{h}{90m}e^{-\frac{\mu}{a}t} + \frac{P}{6m}. \quad (3.13)$$

Интегрируя (3.13), находим:

$$\dot{x} = -\frac{h \cdot a}{90m\mu}e^{-\frac{\mu}{a}t} + \frac{P}{6m}t + C_3,$$

$$x = -\frac{h \cdot a^2}{90m\mu^2} e^{-\frac{\mu}{a}t} + \frac{P}{12m} t^2 + C_3 t + C_4. \quad (3.14)$$

Согласно условию задачи при $t=0$ $x=0$, $\dot{x}=0$. Следовательно, имеем

$$0 = \frac{h \cdot a^2}{90m\mu^2} + C_4, \quad 0 = -\frac{h \cdot a}{90m\mu} + C_3,$$

откуда $C_3 = \frac{h \cdot a}{90m\mu}$, $C_4 = -\frac{h \cdot a^2}{90m\mu^2}$.

Подставляя эти значения постоянных в (3.14), получим:

$$x = -\frac{h \cdot a^2}{90m\mu^2} e^{-\frac{\mu}{a}t} + \frac{P}{12m} t^2 + \frac{h \cdot a}{90m\mu} t - \frac{h \cdot a^2}{90m\mu^2},$$

или

$$x = \frac{P}{12m} t^2 - \frac{h \cdot a}{90m\mu} \left[t - \frac{a}{\mu} (1 - e^{-\frac{\mu}{a}t}) \right]. \quad (3.15)$$

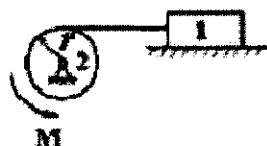
Уравнения (3.12) и (3.15) являются решением задачи.

3.4. Тестовые задания

Д63

Тело 1 массой $m_1 = 30$ кг движется с постоянным ускорением $a = 2$ м/с², момент инерции барабана относительно оси вращения $I_2 = 1,2$ кг·м², радиус $r = 0,4$ м ($q = 10$ м/с²).

Тогда модуль момента M пары сил равен...

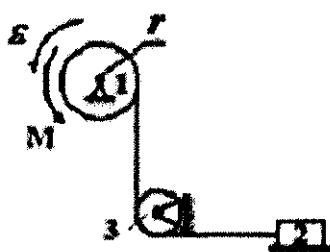


Варианты ответов:

- 1) 156 Нм
- 2) 30 Нм
- 3) 144 Нм
- 4) 18 Нм

Д64

Угловое ускорение барабана 1 $\varepsilon = 10$ с⁻²; радиус барабана 1, который можно считать однородным цилиндром, $r = 0,4$ м; массы тел $m_1 = m_2 = m_3 = 2$ кг, блок 3 можно считать однородным цилиндром с радиусом $r_3 = 0,2$ м ($q = 10$ м/с², трением пренебречь).

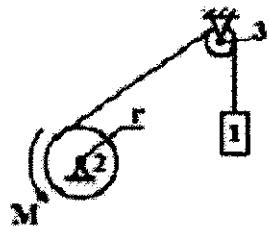


Варианты ответов:

- 1) 5,6 Нм
- 2) 6,4 Нм
- 3) 4 Нм
- 4) 5,2 Нм

Д65

Тело 1 поднимается с ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$, массы тел $m_1 = m_2 = 50 \text{ кг}$, $m_3 = 10 \text{ кг}$, радиус барабана 2, который можно считать однородным цилиндром, $r = 0,5 \text{ м}$, блок 3 можно считать однородным цилиндром с радиусом $r_3 = 0,2 \text{ м}$ ($q = 10 \text{ м/с}^2$).



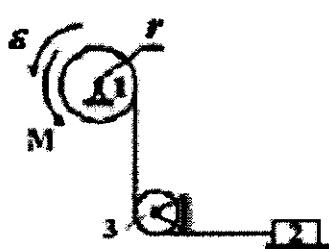
Тогда модуль постоянного момента M пары сил равен...

Варианты ответов:

- 1) 720 Нм
- 2) 360 Нм
- 3) 330 Нм
- 4) 660 Нм

Д66

Угловое ускорение барабана 1 $\varepsilon = 10 \text{ с}^{-2}$, массы тел $m_1 = m_2 = 2 \text{ кг}$, радиус барабана 1, который можно считать однородным цилиндром, $r = 0,2 \text{ м}$, ($q = 10 \text{ м/с}^2$, трением пренебречь).



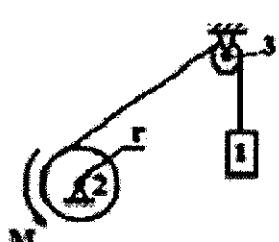
Тогда модуль постоянного момента M пары сил равен...

Варианты ответов:

- 1) 1,2 Нм
- 2) 3,6 Нм
- 3) 0,4 Нм
- 4) 1,6 Нм

Д67

Тело 1 поднимается с ускорением $a = 2 \text{ м/с}^2$, массы тел $m_1 = m_2 = 50 \text{ кг}$, $m_3 = 10 \text{ кг}$, радиус барабана 2, массу которого можно считать равномерно распределенной по его ободу, $r = 0,5 \text{ м}$, массу блока можно считать равномерно распределенной по его ободу ($q = 10 \text{ м/с}^2$).



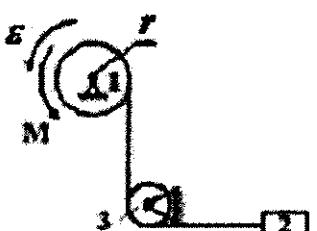
Тогда модуль постоянного момента M пары сил равен...

Варианты ответов:

- 1) 720 Нм
- 2) 660 Нм
- 3) 330 Нм
- 4) 360 Нм

Д68

Угловое ускорение барабана 1 $\varepsilon = 10 \text{ с}^{-2}$, массы тел $m_1 = m_2 = 2 \text{ кг}$, радиус барабана 1, который можно считать однородным цилиндром, $r = 0,2 \text{ м}$, ($q = 10 \text{ м/с}^2$, трением пренебречь).



Тогда модуль постоянного момента M пары сил равен...

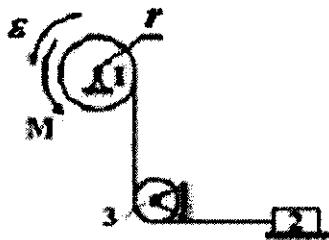
Варианты ответов:

- 1) 6,4 Нм
- 2) 5,6 Нм
- 3) 4 Нм
- 4) 5,2 Нм

Д69

Угловое ускорение барабана 1 $\varepsilon = 10 \text{ c}^{-2}$, массы тел $m_1 = m_2 = 2 \text{ кг}$, радиус барабана 1, массу которого можно считать равномерно распределенной по ободу, $r = 0,4 \text{ м}$, блок 3 можно считать однородным цилиндром с радиусом $r = 0,2 \text{ м}$ ($q = 10 \text{ м/c}^2$, трением пренебречь).

Тогда модуль постоянного момента M пары сил равен...



Варианты ответов:

- 5) 6,4 Нм
- 6) 5,6 Нм
- 7) 4 Нм
- 8) 5,2 Нм

4. УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ВТОРОГО РОДА

4.1. Уравнения Лагранжа 2-го рода при определении ускорения груза лебедки

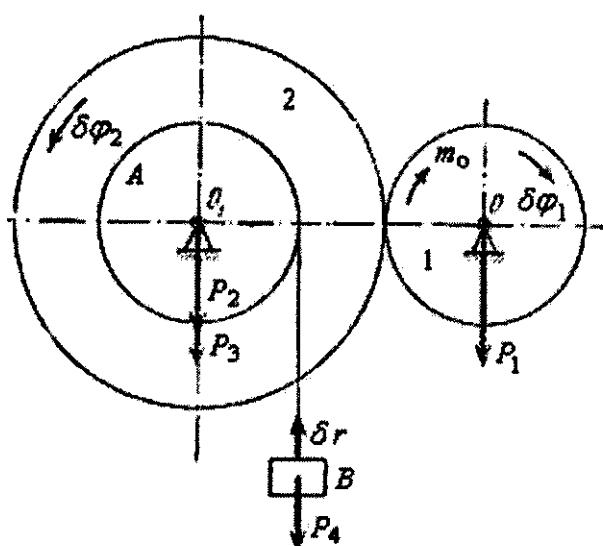


Рис. 4.1. Схема лебедки и действующих сил

Зубчатое колесо 1 веса P_1 и радиуса r_1 электрической лебедки (рис. 4.1) приводится в движение парой сил, момент которой равен m_0 .

Колесо 2 веса P_2 и радиуса r_2 , находящееся во внешнем зацеплении с колесом 1, связано с барабаном A веса P_3 и радиуса r_3 , на который намотана нить. К концу нити привязан груз B веса P_4 , который при включении мотора поднимается вверх.

Определить ускорение груза B , считая зубчатые колеса 1 и 2 и барабан A сплошными круглыми цилиндрами. Массой нити пренебречь.

Решение. Электрическая лебедка является системой с одной степенью свободы. Так, положение зубчатого колеса 1 определяет положение всех материальных точек рассматриваемой системы.

Выберем в качестве обобщенной координаты угол поворота φ_1 зубчатого колеса 1, считая φ_1 положительным в направлении по часовой стрелке.

Уравнение Лагранжа для обобщенной координаты Φ_1 имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_1} = Q_{\varphi_1}. \quad (4.1)$$

К лебедке приложены задаваемые силы: P_1 – вес колеса 1, P_2 – вес колеса 2, P_3 – вес барабана A , P_4 – вес груза B , пара сил с моментом m_0 .

Все связи, наложенные на систему, являются идеальными (нить считается нерастяжимой и натянутой).

Дадим зубчатому колесу 1 возможное перемещение $\delta\phi_1$ в направлении возрастания угла ϕ_1 , т.е. по часовой стрелке. При этом зубчатое колесо 2 с барабаном A повернется против часовой стрелки на угол $\delta\phi_2$, а груза B поднимется вверх на δr . Нетрудно видеть, что $\delta\phi_2 = -\frac{r_1}{r_2}\delta\phi_1$, а

$$\delta r = -r_3\delta\phi_2 = \frac{r_1}{r_2}r_3\delta\phi_1. \quad (4.2)$$

Для определения обобщенной силы Q_{ϕ_1} вычислим сумму работ всех задаваемых сил на возможных перемещениях точек системы, соответствующих обобщенному возможному перемещению $\delta\phi_1$:

$$\delta A = m_0\delta\phi_1 - P_4\delta r.$$

Работа сил P_1, P_2 и P_3 равна нулю, так как точки приложения этих сил не подвижны. Используя формулу (4.2), имеем:

$$\delta A = \left(m_0 - \frac{r_1}{r_2}r_3P_4 \right) \delta\phi_1.$$

Следовательно, обобщенная сила Q_{ϕ_1} , являющаяся коэффициентом в выражении суммы элементарных работ задаваемых сил при обобщенном возможном перемещении $\delta\phi_1$, имеет вид

$$Q_{\phi_1} = m_0 - \frac{r_1}{r_2}r_3P_4. \quad (4.3)$$

Переходим к вычислению кинетической энергии материальной системы, состоящей из двух зубчатых колес, барабана A и груза B :

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} + T^{(3)} + T^{(4)}. \quad (4.4)$$

Кинетическая энергия зубчатого колеса 1

$$T^{(1)} = \frac{1}{2}I_0\dot{\phi}_1^2 = \frac{P_1r_1^2}{4g}\dot{\phi}_1^2,$$

где I_0 - момент инерции колеса 1 относительно оси вращения.

Кинетические энергии зубчатого колеса 2 и барабана A , учитывая, что $\dot{\phi}_2 = -\frac{r_1}{r_2}\dot{\phi}_1$, соответственно можно представить в виде

$$T^{(2)} = \frac{1}{2}I_2\dot{\phi}_2^2 = \frac{P_2r_1^2}{4g}\dot{\phi}_1^2 \quad \text{и} \quad T^{(3)} = \frac{1}{2}I_3\dot{\phi}_2^2 = \frac{P_3r_3^2}{4g}\left(\frac{r_1}{r_2}\dot{\phi}_1\right)^2, \quad (4.6)$$

где I_2, I_3 - моменты инерции колеса 2 и барабана 3 относительно оси вращения, проходящей через точку O_1 .

Кинетическая энергия груза B , движущегося поступательно,

$$T^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{P_4}{g} v_4^2.$$

Так как $v_4 = r_3 \dot{\phi}_2 = -r_3 \frac{r_1}{r_2} \dot{\phi}_1$, то

$$T^{(4)} = \frac{1}{2} \frac{P_4 r_3^2}{g} \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \dot{\phi}_1^2. \quad (4.7)$$

После подстановки в формулу (4.4) значений $T^{(1)}$, $T^{(2)}$, $T^{(3)}$ и $T^{(4)}$ из формул (4.5), (4.6) и (4.7) получим выражение кинетической энергии электрической лебедки:

$$T = \frac{1}{4g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \dot{\phi}_1^2. \quad (4.8)$$

Частная производная, от кинетической энергии T по обобщенной скорости $\dot{\phi}_1$, запишется в виде

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} = \frac{1}{2g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \dot{\phi}_1.$$

Находим производную от полученного результата по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\phi}_1} = \frac{1}{2g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \ddot{\phi}_1. \quad (4.9)$$

Частная производная по $\dot{\phi}_1$, от кинетической энергии T системы, в выражение которой не входит обобщенная координата ϕ_1 , равна нулю:

$$\frac{\partial T}{\partial \phi_1} = 0. \quad (4.10)$$

В результате подстановки формул (4.3), (4.9) и (4.10) в уравнение Лагранжа (4.1) получим дифференциальное уравнение движения лебедки для обобщённой координаты ϕ_1 :

$$\frac{1}{2g} \left[(P_1 + P_2) r_1^2 + (P_3 + 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2 \right] \ddot{\phi}_1 = m_0 - \frac{r_1}{r_2} r_3 P_4,$$

откуда определим искомое угловое ускорение зубчатого колеса 7:

$$\ddot{\phi}_1 = 2g \frac{m_0 - P_4 \frac{r_1}{r_2} r_3}{(P_1 - P_2) r_1^2 + (P_3 - 2P_4) r_3^2 \left(\frac{r_1}{r_2} \right)^2}. \quad (4.11)$$

Если $m_0 > P_4 \frac{r_1}{r_2} r_3$, то ускорение груза B направлено вверх. Если $m_0 = P_4 \frac{r_1}{r_2} r_3$, лебедка находится в покое, либо все ее массы движутся равномерно. При этом направление движения зависит от начальных условий движения.

Эту задачу можно было решить также с помощью дифференциального уравнения вращения твердого тела вокруг неподвижной оси:

$$I_z \ddot{\phi} = \sum_{k=1}^n m_z(F_k^e).$$

Это уравнение следовало составить **дважды**: один раз для зубчатого колеса 1 и второй раз — для остальной части электрической лебедки. Для этого нужно было мысленно разорвать данную систему на две части в точке сцепления зубчатых колес 1 и 2, заменив действие отброшенной части конструкции соответствующей силой реакции связи. В составленную систему дифференциальных уравнений движения войдет сила реакция связи. Лишь после исключения этой силы реакции из полученной системы уравнений можно прийти к формуле (4.11). Преимущество уравнений Лагранжа, не содержащих сил реакций связей, совершенно очевидно.

4.2. Применение уравнений Лагранжа второго рода к исследованию движения механической системы с одной степенью свободы (задание Д-19 [8])

К ведущему валу I редуктора скоростей (рис. 4.2) приложена пара сил, момент которой (вращающий момент) постоянен и равен M_I .

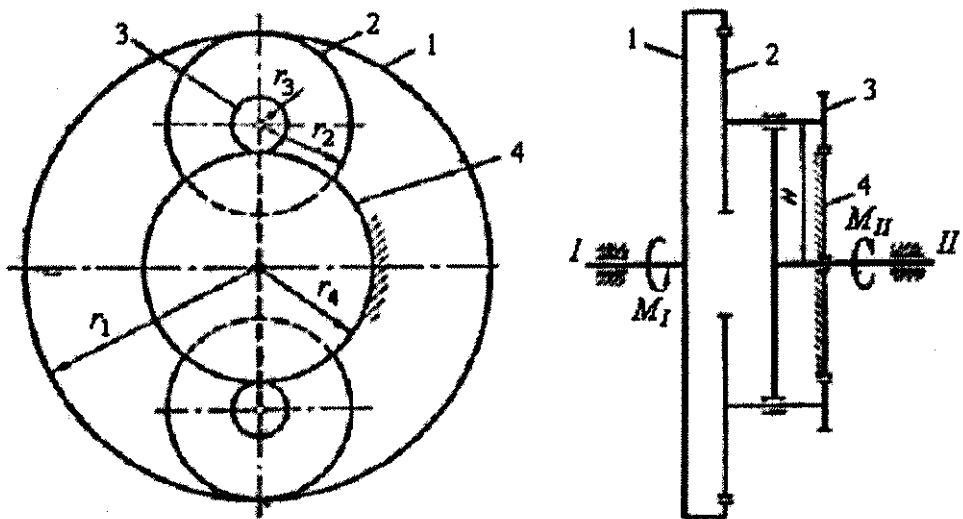


Рис. 4.2. Схема планетарного редуктора

К ведомому валу II приложены силы сопротивления, создающие относительно оси II постоянный момент M_{II} (момент сопротивления).

В задании приняты следующие обозначения:

m_{2-3} – **масса** каждого сателлита 2-3, состоящего из колес 2 и 3; J_{2-3} – момент инерции сателлита 2-3 относительно собственной оси; J_I – момент инерции частей редуктора, жестко связанных с валом I относительно его оси; J_{II} – момент инерции частей редуктора, жестко связанных с валом II относи-

r_1, r_2, r_3, r_4 – радиусы колес 1–4.

Дано: $M_I = 100 \text{ Нм}$, $M_{II} = 320 \text{ Нм}$; $J_I = 4 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $m_{2-3} = 100 \text{ кг}$; $J_{2-3} = 2 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $J_{II} = 12 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; $r_1 = 60 \text{ см}$; $r_2 = 25 \text{ см}$; $r_3 = 5 \text{ см}$; $r_4 = 30 \text{ см}$.

Определить угловые ускорения ведущего ε_I и ведомого ε_{II} валов редуктора.

Решение. Воспользуемся уравнением Лагранжа второго рода. Приняв за обобщенную координату системы, имеющей одну степень свободы, угол поворота φ_I ведущего вала, имеем:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} - \frac{\partial T}{\partial \varphi_I} + \frac{\partial P}{\partial \varphi_I} = Q_{\varphi_I}. \quad (4.12)$$

Найдем кинетическую энергию системы как функцию обобщенной скорости $\dot{\varphi}_I$, равной угловой скорости ведущего вала ω_I . Для вычисления кинетической энергии рассматриваемой системы необходимо знать угловые скорости всех звеньев редуктора: ведущего вала (колеса 1) ω_I , сателлитов ω_{2-3} .

Относительные угловые скорости колес редуктора равны

$$\omega_{1r} = \omega_I - \omega_0, \quad \omega_{2r} = \omega_2 - \omega_0, \quad \omega_{3r} = \omega_3 - \omega_0, \quad \omega_{4r} = \omega_4 - \omega_0,$$

где $\omega_I = \omega_1$ (колесо 1 жестко связано с ведущим валом I); $\omega_2 = \omega_3 = \omega_{2-3}$, а угловая скорость водила $\omega_0 = \omega_{II}$, так как водило жестко связано с ведомым валом .

Приведём формулы, устанавливающие зависимости между относительными угловыми скоростями колес 1 и 2, а также 3 и 4:

$$\frac{\omega_1 - \omega_{II}}{\omega_2 - \omega_{II}} = \frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{\omega_3 - \omega_{II}}{\omega_4 - \omega_{II}} = -\frac{r_4}{r_3}. \quad (4.13)$$

Перемножая левые и правые части равенств, а также учитывая, что $\omega_2 = \omega_3$, получаем

$$\frac{\omega_1 - \omega_{II}}{\omega_4 - \omega_{II}} = -\frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}.$$

Так как колесо 4 неподвижно, т. е. $\omega_4 = 0$, то

$$\frac{\omega_1 - \omega_{II}}{-\omega_{II}} = -\frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}.$$

Из этого равенства

$$\omega_{II} = \omega_I \frac{1}{1 + \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}}. \quad (4.14)$$

Из первого равенства (4.13) и равенства (4.14)

$$\omega_2 = \omega_I \frac{r_1(r_4 + r_3)}{r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4}. \quad (4.15)$$

Полученные значения ω_{II} и ω_2 показывают, что вал II и сателлиты вращаются в одном направлении с валом I.

Составим выражение кинетической энергии всех движущихся частей редуктора:

$$T = \frac{J_I \cdot \omega_I^2}{2} + 2 \left(\frac{m_{2-3} v_{C_2}^2}{2} + \frac{J_{2-3} \omega_2^2}{2} \right) + \frac{J_{II} \cdot \omega_{II}^2}{2},$$

где

$$v_{C_2} = H \cdot \omega_{II} = (r_3 + r_4) \cdot \omega_{II} = \frac{r_1 \cdot r_3 (r_3 + r_4)}{r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4} \cdot \omega_I.$$

Выразив все линейные и угловые скорости через угловую скорость ведущего вала $\omega_I = \dot{\phi}_I$, получим:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\phi}_I^2 \left[J_I + \frac{2m_{2-3} r_1^2 \cdot r_3^2 (r_3 + r_4)^2}{(r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4)^2} + \frac{2J_{2-3} r_1^2 (r_3 + r_4)^2}{(r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4)^2} + J_{II} \frac{r_1^2 \cdot r_3^2}{(r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4)^2} \right].$$

Из выражения кинетической энергии редуктора находим приведённый к оси ведущего вала момент инерции редуктора:

$$J_{np} = J_I + \frac{2m_{2-3} r_1^2 \cdot r_3^2 (r_3 + r_4)^2}{(r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4)^2} + \frac{2J_{2-3} r_1^2 (r_3 + r_4)^2}{(r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4)^2} + J_{II} \frac{r_1^2 \cdot r_3^2}{(r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4)^2}. \quad (4.16)$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{2} J_{np} \cdot \dot{\phi}_I^2.$$

Определим потенциальную энергию P редуктора. Силами, имеющими потенциал, являются силы тяжести. Но центр тяжести всех движущихся частей редуктора неизменно находится на оси его материальной симметрии - прямой, совпадающей с осями валов I и II, так что потенциальная энергия редуктора постоянна: $P = const$.

Найдём обобщенную силу Q_{ϕ_I} , соответствующую задаваемым силам, действующим на редуктор и не имеющим потенциала. Такими силами являются: силы, приложенные к валу I и образующие пару, момент которой (вращающий

момент) равен M_1 , и силы сопротивления, приложенные к валу II и создающие относительно оси II момент сопротивления M_{II} .

Сообщим углу φ_I приращение $\delta\varphi_I$ и составим сумму элементарных работ задаваемых сил на этом возможном перемещении. В эту сумму войдет работа вращающего момента M_I и работа момента сил сопротивления M_{II} , которая отрицательна,

$$\delta A_{\varphi_I} = M_I \delta\varphi_I - M_{II} \delta\varphi_{II}.$$

Зависимость между угловыми перемещениями ведущего и ведомого валов такая же, как и зависимость между абсолютными значениями угловых скоростей:

$$\delta\varphi_{II} = \delta\varphi_I \frac{1}{1 + \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}}.$$

Тогда

$$\delta A_{\varphi_I} = \left(M_I - M_{II} \frac{1}{1 + \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}} \right) \delta\varphi_I.$$

Обобщенная сила

$$Q_{\varphi_I} = \frac{\delta A_{\varphi_I}}{\delta\varphi_I} = M_I - M_{II} \frac{1}{1 + \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}}.$$

Найдем значения левой части уравнения (4.12):

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}_I} = J_{np} \cdot \ddot{\varphi}_I, \quad \frac{\partial T}{\partial \varphi_I} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_I} = 0.$$

Уравнение (4.12) примет вид

$$J_{np} \cdot \ddot{\varphi}_I = M_I - M_{II} \frac{1}{1 + \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}}. \quad (4.17)$$

Из уравнения (4.17), учитывая выражение (4.16), получим:

$$\varepsilon_I = \ddot{\varphi}_I = - \frac{M_I - M_{II} \frac{r_1 \cdot r_3}{r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4}}{J_I + \frac{2r_1^2(r_3 + r_4)^2}{(r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4)^2} (m_{2-3} \cdot r_3^2 + J_{2-3}) + J_{II} \frac{r_1^2 \cdot r_3^2}{(r_1 \cdot r_3 + r_2 \cdot r_4)^2}}.$$

Зависимость между угловыми ускорениями ведущего и ведомого валов та-кая же, как и зависимость (4.14) между их угловыми скоростями:

$$\varepsilon_{II} = \varepsilon_I \frac{1}{1 + \frac{r_2 \cdot r_4}{r_1 \cdot r_3}}.$$

Подставив в эти формулы заданные числовые значения всех величин, находим:

$$\varepsilon_I = 0,37 \text{ c}^{-2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{II} = 0,106 \text{ c}^{-2}.$$

5. УДАР

5.1. Основные положения

Удар есть процесс взаимодействия тел, движущихся с различными скоростями. Взаимодействие тел происходит в течение очень малого промежутка времени. В теории удара классической механики удар считается мгновенным, координаты взаимодействующих тел не меняются, мгновенно изменяются скорости соударяющихся тел.

При построении схемы удара двух тел (рис. 5.1) изображаются оси $n-\tau$. Ось n проходит через центры масс соударяющихся тел и называется линией центров. Ось τ является касательной в точке соприкосновения к поверхностям соударяющихся тел.

Удар называется *центральным*, если точка K соприкосновения соударяющихся тел лежит на линии центров C_1C_2 (рис. 5.1), а касательная τ , проведенная в точке соприкосновения к поверхностям этих тел, перпендикулярна к линии центров.

Удар называется *прямым*, если скорости центров масс соударяющихся тел в начале удара лежат на линии центров (рис. 5.2).

Если хотя бы одна из скоростей центров масс соударяющихся тел в начале удара не лежит на линии центров, то удар называется *косым* (рис. 5.3).

Удар называется *неупругим*, если недеформированное состояние соударяющихся тел не восстанавливается. В конце удара центры масс тел движутся с одинаковыми скоростями.

Удар называется *частично упругим*, если недеформированное

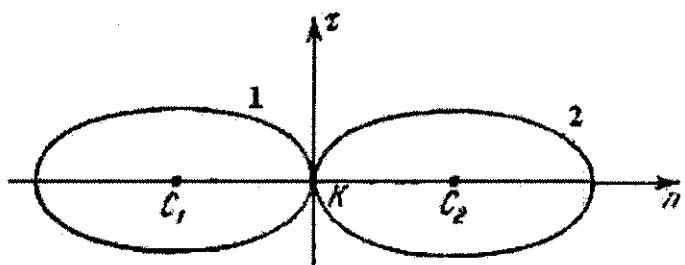


Рис. 5.1. Схема центрального удара

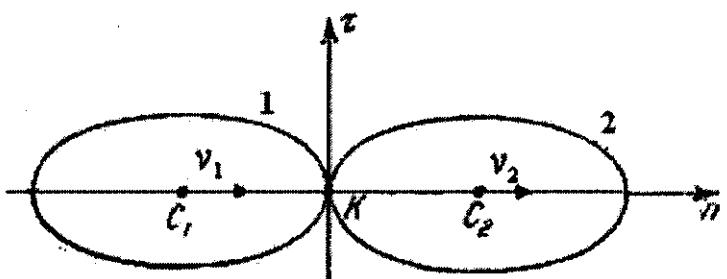


Рис. 5.2. Схема прямого центрального удара

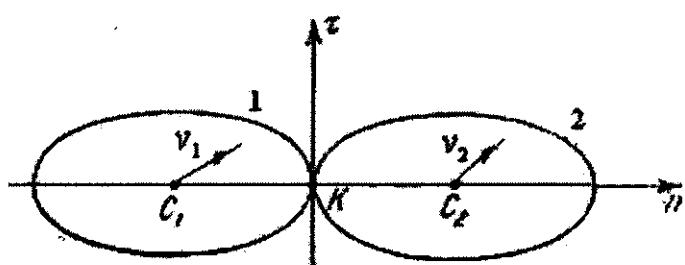


Рис. 5.3. Схема косого центрального удара

состояние соударяющихся тел не полностью восстанавливается. В конце удара центры масс тел движутся с разными скоростями.

Удар называется *упругим*, если недеформированное состояние соударяющихся тел полностью восстанавливается.

При рассмотрении прямого центрального неупругого удара двух тел проекция на ось n общей скорости соударяющихся тел в конце удара равна:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

Импульс ударной силы определяется формулой

$$S = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} (v_{1n} - v_{2n}).$$

При рассмотрении прямого центрального частично упругого удара двух тел процесс удара разделен на два этапа. В течение первого этапа соударяющиеся тела деформируются и ударная сила растёт от нуля до максимума. В течение второго этапа происходит частичное восстановление недеформированного состояния и ударная сила изменяется от максимума до нуля.

В момент окончания первого этапа и начала второго центры масс тел имеют одинаковые скорости, которые у них были бы, если бы удар был бы неупругий.

В конце второго этапа центры тяжести тел имеют уже различные скорости u_1 и u_2 . Коэффициентом восстановления недеформированного состояния k называется отношение импульса ударной силы второго этапа к импульсу ударной силы первого этапа:

$$k = \frac{S_{II}}{S_I}.$$

Коэффициент восстановления является безразмерной величиной и изменяется в пределах от 0 до 1 ($0 \leq k \leq 1$):

При неупругом ударе $k = 0$, при частично упругом ударе $k < 1$, при упругом ударе $k = 1$.

При прямом центральном частично упругом ударе двух тел проекции на ось n скоростей соударяющихся тел в конце удара **равны**:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}), \quad u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}),$$

где $u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$.

В случае упругого удара, т. е. при $k = 1$:

$$u_{1n} = 2u_n - v_{1n}, \quad u_{2n} = 2u_n - v_{2n}.$$

При рассмотрении прямого частично упругого удара тела о неподвижную плоскость неподвижная плоскость принимается за второе тело с массой

$m_2 = \infty$ и скоростями $v_2 = 0$, $u_2 = 0$. Учитывая, что скорость в конце первого этапа удара $u_n = 0$, получим

$$u_{1n} = -k \cdot v_{1n}.$$

При рассмотрении косого центрального частично упругого удара двух тел поверхности соударяющихся тел считаются абсолютно гладкими. Ось n проводится вдоль линии центров C_1C_2 (рис. 5.4). Ось τ перпендикулярна к оси n .

Проекции скоростей центров масс соударяющихся тел в начале удара имеют вид:

$$\begin{aligned}v_{1n} &= v_1 \cos \alpha_1, & v_{2n} &= v_2 \cos \alpha_2, \\v_{1\tau} &= v_1 \sin \alpha_1, & v_{2\tau} &= v_2 \sin \alpha_2.\end{aligned}$$

Проекции скоростей центров масс соударяющихся тел в конце удара (рис. 5.5) равны:

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad u_{2\tau} = v_{2\tau},$$

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}),$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}),$$

$$\text{где } u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2},$$

$$\operatorname{tg} \beta_1 = \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}} = \frac{v_{1\tau}}{u_n + k(u_n - v_{1n})},$$

$$\operatorname{tg} \beta_2 = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}} = \frac{v_{2\tau}}{u_n + k(u_n - v_{2n})}.$$

Модули скоростей центров масс соударяющихся тел в конце удара равны:

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2}.$$

При изучении косого частично упругого удара о неподвижную плоскость (рис. 5.6) поверхности тела и неподвижной плоскости считаются абсолютно гладкими.

Проекции скорости центра масс падающего тела в начале удара определяются как

$$v_{1n} = v_1 \cos \alpha_1, \quad v_{1\tau} = v_1 \sin \alpha_1.$$

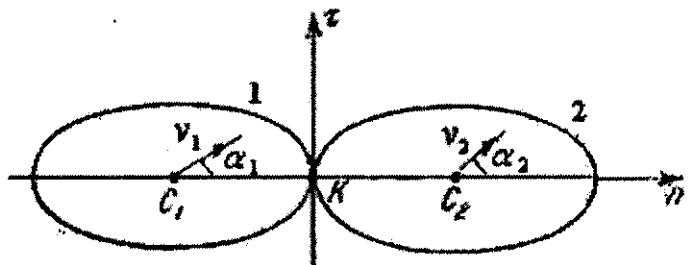


Рис. 5.4. Схема косого частично упругого удара (начало удара)

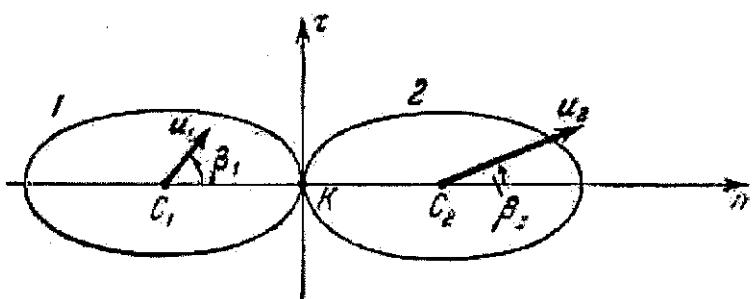


Рис. 5.5. Схема косого частично упругого удара (конец удара)

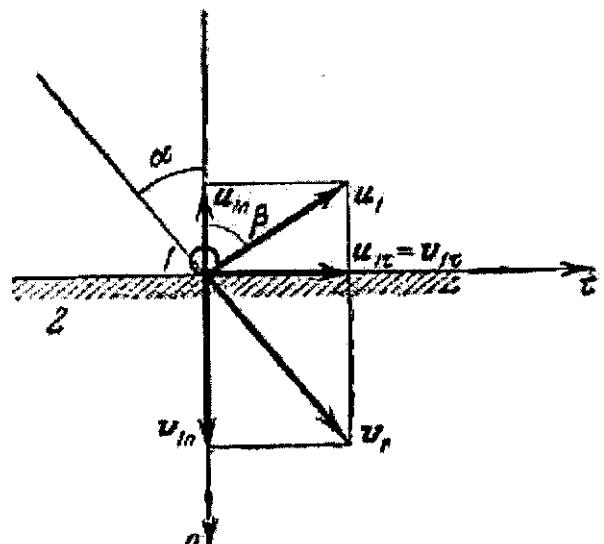


Рис. 5.6. Схема косого частично упругого удара тела о неподвижную плоскость

Проекции скорости центра масс падающего тела в конце удара определяются как

$$u_{1\tau} = v_{1\tau}, \quad u_{1n} = -kv_{1n}.$$

Модуль скорости центра масс падающего тела в конце удара определяется формулой

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2} = \sqrt{v_{1\tau}^2 + k^2 v_{1n}^2}.$$

Коэффициент восстановления вычисляется по формуле $k = \frac{\tan \alpha}{\tan \beta}$, где

α - угол падения, β - угол отражения.

Задачи об определении скоростей, соударяющихся тел в конце центрально-го косого частично упругого удара рекомендуется решать в следующей последовательности:

- 1) направить ось n вдоль линии центров, ось τ – перпендикулярно к ней;
- 2) вычислить проекции на оси n и τ скоростей $v_{1n}, v_{2n}, v_{1\tau}, v_{2\tau}$ соударяю-щихся тел в начале удара;
- 3) вычислить проекцию общей скорости u_n соударяющихся тел на ось n в конце неупругого удара по формуле

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2};$$

- 4) вычислить проекции скоростей $v_{1n}, v_{2n}, v_{1\tau}, v_{2\tau}$ соударяющихся тел на оси n и τ в конце удара по формулам:

$$\begin{aligned} u_{1\tau} &= v_{1\tau}, \quad u_{2\tau} = v_{2\tau}, \\ u_{1n} &= u_n + k(u_n - v_{1n}), \\ u_{2n} &= u_n + k(u_n - v_{2n}); \end{aligned}$$

- 5) определить скорости обоих тел в конце удара.

Модули скоростей равны:

$$u_1 = \sqrt{u_{1\tau}^2 + u_{1n}^2}, \quad u_2 = \sqrt{u_{2\tau}^2 + u_{2n}^2}.$$

Направления скоростей определяются формулами:

$$\tan \beta_1 = \tan(\mathbf{n}, \mathbf{u}_1) = \frac{u_{1\tau}}{u_{1n}}, \quad \tan \beta_2 = \tan(\mathbf{n}, \mathbf{u}_2) = \frac{u_{2\tau}}{u_{2n}}.$$

При ударе тела о неподвижную плоскость следует считать массу непод-вижной плоскости бесконечно большой, а скорость до удара равной нулю ($m_2 = \infty, v_2 = 0$).

В случае центральных прямых ударов двух тел вычисления упрощаются, так как проекции скоростей на ось τ обращаются в нуль.

5.2. Задачи соударения двух тел

5.2.1. Неупругий удар движущегося шара о неподвижный шар

Шар массой $m_1 = 10$ кг ударяется (рис. 5.7) о неподвижный шар массой $m_2 = 20$ кг.

Какую скорость v_1 должен иметь центр масс первого шара до удара, для того чтобы после неупротого удара их общая скорость равнялась 6 м/сек?

Решение. Ось n направим вдоль линии центров C_1C_2 налево, как показано на рисунке.

Проекции скоростей центров тяжести шаров на ось n в начале удара имеют вид:

$$v_{1n} = 0, v_{2n} = 0.$$

Проекция общей скорости шаров на ось n в конце неупротого удара равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}.$$

Из этого соотношения находим проекцию искомой скорости центра масс первого шара в начале неупротого удара:

$$v_{1n} = \frac{(m_1 + m_2)u_n - m_2 v_{2n}}{m_1} = \frac{(m_1 + m_2)u_n - m_2 v_{2n}}{m_1} = \frac{(10 + 20)6 - 20 \cdot 0}{10} = 18 \text{ м/с.}$$

5.2.2. Неупругий удар движущихся навстречу друг другу шаров

Скорости центров масс двух шаров (рис. 5.8), двигавшихся навстречу друг другу, равные: $v_1 = 6$ м/сек, $v_2 = 10$ м/сек. Масса первого шара $m_1 = 10$ кг. Определить массу второго шара и величину ударного импульса S , если после неупротого удара шары остановились.

Решение. Направляем ось n вдоль линий центров C_1C_2 . Проекции скоростей центров масс шаров на ось n в начале удара будут: $v_{1n} = 6$ м/сек, $v_{2n} = -10$ м/сек.

Так как проекция общей скорости на ось n после неупротого удара равна нулю, то

$$\frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = 0, \quad m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n} = 0,$$

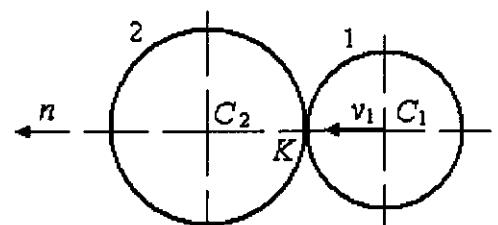


Рис. 5.7. Схема неупротого удара подвижного шара о неподвижный

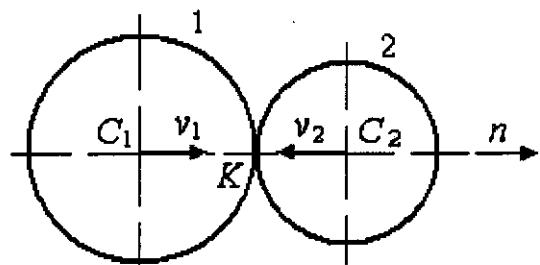


Рис. 5.8. Схема неупротого удара шаров

откуда

$$m_2 = -\frac{m_1 v_{1n}}{v_{2n}} = 6 \text{ кг.}$$

Величина ударного импульса равна

$$S = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (v_{1n} - v_{2n}) = \frac{10 \cdot 6}{10 + 6} (6 + 10) = 60 \text{ кг} \cdot \text{с.}$$

5.2.3. Частично упругий удар шаров, движущихся в одном направлении

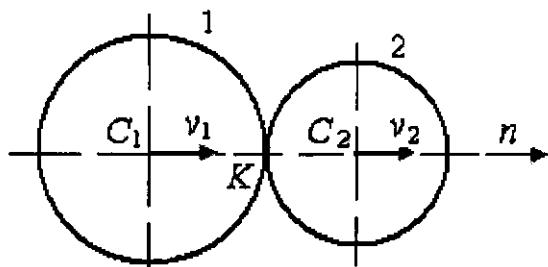


Рис. 5.9. Схема частично упругого удара шаров, движущихся в одном направлении

нения шаров. Проекции скоростей на ось n в случае неупругого удара равны: $v_{1n} = 10 \text{ м/сек}$ и $v_{2n} = 6 \text{ м/сек}$.

Проекций общей скорости на ось n в случае неупругого удара будет:

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{12 \cdot 10 + 10 \cdot 6}{12 + 10} = 8,18 \text{ м/сек.}$$

Проекций искомых скоростей центров масс шаров на ось n в конце упругого удара:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}) = 8,18 + 0,8(8,18 - 10) = 6,72 \text{ м/сек.}$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}) = 8,18 + 0,8(8,18 - 6) = 9,92 \text{ м/сек.}$$

Положительные значения u_{1n} и u_{2n} указывают, что в конце упругого удара шары будут двигаться в том же направлении. Первый шар, двигавшийся до удара быстрее второго, после удара будет от него отставать.

5.2.4. Частично упругий удар шаров, движущихся навстречу друг другу

Определить скорости центров масс двух шаров $m_1 = 12 \text{ кг}$ и $m_2 = 10 \text{ кг}$ в конце частично упругого удара (рис. 5.10), если их скорости в начале удара были равны соответственно: $v_1 = 10 \text{ м/сек}$ и $v_2 = 6 \text{ м/сек}$. Шары двигались навстречу друг другу. Коэффициент восстановления k при ударе равен 0,8.

Решение. Ось n направлена вдоль линии центров направо. Проекции скоростей на ось n центров тяжести в начале удара будут: $v_{1n} = 10 \text{ м/сек}$, $v_{2n} = 6 \text{ м/сек}$.

Проекция общей скорости на ось n в случае неупругого удара равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{12 \cdot 10 - 10 \cdot 6}{12 + 10} = 2,73$$

Проекции искомых скоростей центров тяжести шаров на ось n в конце упругого удара определяются формулами:

$$u_{1n} = u_n + k(u_n - v_{1n}) = 2,73 + 0,8(2,73 - 10) = -3,07 \text{ м/сек.}$$

$$u_{2n} = u_n + k(u_n - v_{2n}) = 2,73 + 0,8(2,73 + 6) = 9,65 \text{ м/сек.}$$

Знаки u_{1n} и u_{2n} указывают, что после удара шары будут двигаться в разные стороны, т. е. первый шар налево, а второй, шар направо.

5.2.5. Частично упругий удар шарика, падающего на неподвижную горизонтальную плиту

С какой высоты h_1 падает шарик на неподвижную горизонтальную плиту (рис. 5.11), если после частично упругого удара он поднимается на высоту $h_2 = 81 \text{ см}$. Коэффициент восстановления равен 0,9.

Решение. Ось n направим по вертикали вниз. Скорость центра тяжести шарика в начале удара обозначим. Скорость неподвижной плоскости равна нулю: $v_2 = 0$. Масса ее m_2 бесконечно велика, т. е. $m_2 = \infty$. Проекция общей скорости и на ось n в случае неупругого удара равна

$$u_n = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2} = \frac{\frac{m_1}{m_2} v_{1n} + v_{2n}}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = 0.$$

Проекция скорости центра тяжести шарика на ось n в конце удара равна

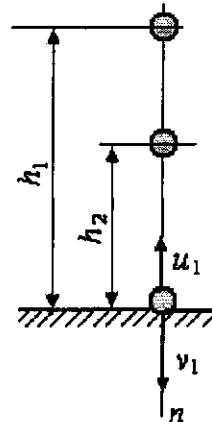


Рис. 5.11. Схема падения шара на плиту

Знак минус указывает, что скорость шарика в конце удара направлена вверх. Зависимость между модулями скоростей центра тяжести шарика в конце удара имеет вид

(5.1)

$$u_1 = kv_1. \quad (5.1)$$

Так как шарик, падая, совершил свободное падение, то

$$v_1 = \sqrt{2gh_1}. \quad (5.2)$$

После частично упругого удара шарик начинает подъем вверх со скоростью u_1 . В наивысшей точке подъема h_2 скорость шарика равна нулю. Следовательно,

$$u_1 = \sqrt{2gh_2}. \quad (5.3)$$

После подстановки значений v_1 и u_1 из формул (5.1) и (5.3) в формулу (5.1) находим:

$$\sqrt{h_2} = k\sqrt{h_1}, \quad (5.4)$$

откуда

$$h_2 = \frac{h_1}{k^2} = \frac{81}{0,9^2} = 1 \text{ м.}$$

Формула (5.4), записанная в виде

$$k = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}, \quad (5.5)$$

дает возможность экспериментально определить коэффициент восстановления при частично упругом ударе.

В случае неупругого удара шарик от плиты не отскакивает, т. е. $k = 0$. Из формулы (5.5) получим, что $k = 0$.

В случае упругого удара шарик должен отскочить в исходное положение, т. е. $h_2 = h_1$. Из формулы (5.5) получим, что $k = 1$.

При частично упругом ударе $h_2 < h_1$ и, следовательно, $0 < k < 1$.

5.3. Тестовые задания

<p>Для процессора ударного взаимодействия НЕ является характерным...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) конечное изменение скоростей тел за время удара 2) незначительное изменение положений тел за время удара 3) сохранение полной механической энергии взаимодействующих тел 4) малая продолжительность процесса
<p>Коэффициент восстановления при ударе...</p>	<p>Варианты ответов:</p> <ol style="list-style-type: none"> 1) равен отношению абсолютных скоростей тел до удара 2) может быть любым неотрицательным числом 3) можно найти, зная зависимость ударной силы от времени 4) характеризует изменение формы соударяющихся тел



$$v_1 = 4 \text{ м/с} \quad v_2 = 6 \text{ м/с} \quad u_1 = 8 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 8 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 1 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) $24 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 2) $40 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 3) $8 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 4) $16 \text{ Н}\cdot\text{с}$



$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 6 \text{ м/с} \quad u_1 = 1 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) невозможно вычислить, используя предложенные данные
- 2) 0,25
- 3) 1
- 4) 0,5



$$v_1 = 4 \text{ м/с} \quad v_2 = 5 \text{ м/с}$$



$$u_1 = 2 \text{ м/с} \quad u_2 = 4 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 6 \text{ кг}$, $m_2 = 4 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 2 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) $12 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 2) $24 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 3) $36 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 4) $4 \text{ Н}\cdot\text{с}$



$$v_1 = 5 \text{ м/с} \quad v_2 = 2 \text{ м/с}$$



$$u_1 = 3 \text{ м/с} \quad u_2 = 5 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) $\frac{7}{8}$
- 2) невозможно вычислить, используя предложенные данные
- 3) $\frac{2}{3}$
- 4) $\frac{3}{8}$



$$v_1 = 4 \text{ м/с} \quad v_2 = 6 \text{ м/с} \quad u_1 = 8 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 8 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 1 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) $24 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 2) $40 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 3) $16 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 4) $8 \text{ Н}\cdot\text{с}$



$$v_1 = 1 \text{ м/с} \quad v_2 = 8 \text{ м/с} \quad u_1 = 2 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) $1/7$
- 2) $5/7$
- 3) $5/9$
- 4) невозможно вычислить, используя предложенные данные



$$v_1 = 1 \text{ м/с} \quad v_2 = 8 \text{ м/с} \quad u_1 = 2 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) $5/7$
- 2) $5/9$
- 3) невозможно вычислить, используя предложенные данные
- 4) $1/7$



$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 6 \text{ м/с} \quad u_1 = 1 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) 1
- 2) невозможно вычислить, используя предложенные данные
- 3) $1/2$
- 4) $1/4$



$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 4 \text{ м/с} \quad u_1 = 1 \text{ м/с} \quad u_2 = 1 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 5 \text{ кг}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 2 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) $6 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 2) $0 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 3) $10 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 4) $5 \text{ Н}\cdot\text{с}$



$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 7 \text{ м/с} \quad u_1 = 3 \text{ м/с} \quad u_2 = 1 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) $4/9$
- 2) $4/5$
- 3) $1/2$
- 5) невозможно вычислить, используя предложенные данные



$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 4 \text{ м/с} \quad u_1 = 1 \text{ м/с} \quad u_2 = 1 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 5 \text{ кг}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 2 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) $10 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 2) $6 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 3) $0 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 4) $5 \text{ Н}\cdot\text{с}$



$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 7 \text{ м/с} \quad u_1 = 3 \text{ м/с} \quad u_2 = 1 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) $\frac{4}{9}$
- 2) $\frac{4}{5}$
- 3) $\frac{1}{2}$
- 4) невозможно вычислить, используя предложенные данные



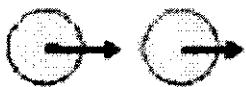
$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 6 \text{ м/с} \quad u_1 = 0,5 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 6 \text{ кг}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 2 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) $15 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 2) $12 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 3) $0 \text{ Н}\cdot\text{с}$
- 4) $9 \text{ Н}\cdot\text{с}$



$$v_1 = 4 \text{ м/с} \quad v_2 = 1 \text{ м/с} \quad u_1 = 2 \text{ м/с} \quad u_2 = 4 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) $\frac{2}{3}$
- 2) $\frac{6}{5}$
- 3) $\frac{5}{6}$
- 4) невозможно вычислить, используя предложенные данные



$$v_1 = 4 \text{ м/с} \quad v_2 = 1 \text{ м/с} \quad u_1 = 2 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...



Варианты ответов:

- 1) невозможно вычислить, используя предложенные данные
- 2) 3/5
- 3) 1/5
- 4) 1/3



$$v_1 = 4 \text{ м/с} \quad v_2 = 1 \text{ м/с} \quad u_1 = 1 \text{ м/с} \quad u_2 = 2 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = m_2 = 3 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 1 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) 15 Н·с
- 2) 0 Н·с
- 3) 12 Н·с
- 4) 9 Н·с



$$v_1 = 4 \text{ м/с} \quad v_2 = 6 \text{ м/с} \quad u_1 = 8 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 2 \text{ кг}$, $m_2 = 8 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 1 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) 40 Н·с
- 2) 8 Н·с
- 3) 16 Н·с
- 4) 24 Н·с



$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 5 \text{ м/с} \quad u_1 = 3 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...

Варианты ответов:

- 1) 1/3
- 2) 3/5
- 3) 5/7
- 4) невозможно вычислить, используя предложенные данные



$$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 4 \text{ м/с} \quad u_1 = 1 \text{ м/с} \quad u_2 = 1 \text{ м/с}$$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 5 \text{ кг}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 2 за время удара равен...

Варианты ответов:

- 1) 0 Н·с
- 2) 10 Н·с
- 3) 5 Н·с
- 4) 6 Н·с

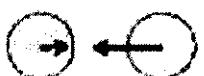


$v_1 = 2 \text{ м/с} \quad v_2 = 6 \text{ м/с}$

$u_1 = 0,5 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) соударения.

Массы тел: $m_1 = 6 \text{ кг}$, $m_2 = 1 \text{ кг}$. Импульс ударной силы, действующей на тело 2 за время удара равен...



$v_1 = 1 \text{ м/с} \quad v_2 = 8 \text{ м/с}$

$u_1 = 2 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$

На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...



$v_1 = 4 \text{ м/с} \quad v_2 = 1 \text{ м/с}$

$u_1 = 2 \text{ м/с} \quad u_2 = 3 \text{ м/с}$

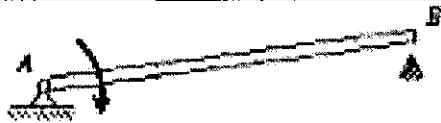
На рисунке показаны скорости двух тел до (v_1, v_2) и после (u_1, u_2) упругого соударения.

Коэффициент восстановления при ударе этих тел...



Стержень AB длиной 0,2 м вращается с угловой скоростью 2 рад/с вокруг оси шарнира A . Момент инерции стержня относительно оси вращения равен $8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

После удара концом B о неподвижное препятствие стержень останавливается. Импульс ударной реакции равен...



Стержень AB длиной 0,2 м вращается с угловой скоростью 4 рад/с вокруг оси шарнира A . Момент инерции стержня относительно оси вращения равен $8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

После удара концом B о неподвижное препятствие стержень останавливается. Импульс ударной реакции равен...

Варианты ответов:

1) $15 \text{ Н}\cdot\text{с}$

2) $9 \text{ Н}\cdot\text{с}$

3) $0 \text{ Н}\cdot\text{с}$

4) $12 \text{ Н}\cdot\text{с}$

Варианты ответов:

1) $5/9$

2) $1/7$

3) невозможно вычислить, используя предложенные данные

4) $5/7$

Варианты ответов:

1) невозможно вычислить, используя предложенные данные

2) $1/5$

3) $1/3$

4) $3/5$

Варианты ответов:

1) $16 \text{ Н}\cdot\text{с}$

2) $3,2 \text{ Н}\cdot\text{с}$

3) $5 \text{ Н}\cdot\text{с}$

4) $80 \text{ Н}\cdot\text{с}$

Варианты ответов:

1) $32 \text{ Н}\cdot\text{с}$

2) $6,4 \text{ Н}\cdot\text{с}$

3) $160 \text{ Н}\cdot\text{с}$

4) $10 \text{ Н}\cdot\text{с}$

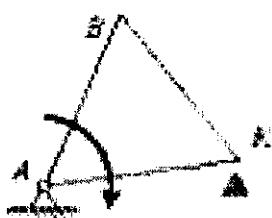
Пластина ABK вращается с угловой скоростью 4 рад/с вокруг оси, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости пластины.

Момент инерции пластины относительно оси вращения равен $8 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$; размеры $AK = BK = AB = 0,2 \text{ м}$.

После удара в точке K о неподвижный выступ пластина останавливается. Импульс ударной реакции в точке K равен...

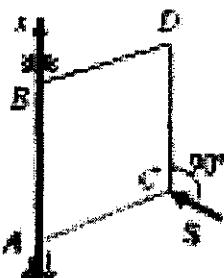
Момент инерции пластины относительно оси Ax равен 10 $\text{кг}\cdot\text{м}^2$; размеры $AB = BD = 0,5 \text{ м}$.

После приложения в точке D ударного импульса $S = 40 \text{ Н}\cdot\text{с}$ квадратная пластина $ABCD$ начинает вращаться вокруг оси Ax с угловой скоростью...



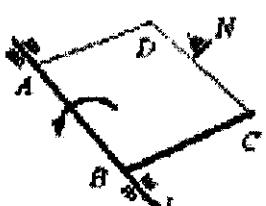
Момент инерции пластины относительно оси Ax равен 10 $\text{кг}\cdot\text{м}^2$; размеры $AB = BD = 0,5 \text{ м}$.

После приложения в точке C ударного импульса $S = 160 \text{ Н}\cdot\text{с}$ квадратная пластина $ABCD$ начинает вращаться вокруг оси Ax с угловой скоростью...



Вращаясь вокруг оси Ax с угловой скоростью 6 рад/с, квадратная пластина $ABCD$ наталкивается на неподвижное препятствие в точке N и после удара останавливается.

Момент инерции пластины относительно оси вращения Ax равен 10 $\text{кг}\cdot\text{м}^2$; длина стороны $AB = BC = 0,6 \text{ м}$. Импульс ударной реакции в точке N равен ...



Варианты ответов:

- 1) 32 $\text{Н}\cdot\text{с}$
- 2) 10 $\text{Н}\cdot\text{с}$
- 3) 160 $\text{Н}\cdot\text{с}$
- 4) 6,4 $\text{Н}\cdot\text{с}$

Варианты ответов:

- 1) 1 c^{-1}
- 2) 8 c^{-1}
- 3) 4 c^{-1}
- 4) 2 c^{-1}

Варианты ответов:

- 1) 64 c^{-1}
- 2) 16 c^{-1}
- 3) 8 c^{-1}
- 4) 4 c^{-1}

Варианты ответов:

- 1) 21,6 $\text{Н}\cdot\text{с}$
- 2) 60 $\text{Н}\cdot\text{с}$
- 3) 3000 $\text{Н}\cdot\text{с}$
- 4) 100 $\text{Н}\cdot\text{с}$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Методические указания представляют практический материал, поясняющий последовательность решения задач, выполнения расчетно-проектировочных и контрольных заданий по теоретической механике (разделы «Аналитическая механика», «Удар»).

В методических указаниях каждый раздел сопровождается тестовыми заданиями, которые могут быть использованы для самостоятельной работы и контроля знаний.

Рассмотрен принцип возможных перемещений и его применение при анализе равновесия механической системы (равновесие сил, приложенных к механической системе с одной степенью свободы; определение опорных реакций составной балки; определение реакций опор составной конструкции). Тестовые задания данного раздела ориентированы на определение соотношения сил, действующих на звенья плоского рычажного механизма и обеспечивающих его равновесие.

Рассмотрены задачи по определению обобщенных сил в механической системе (механическая система «лебедка - груз», кулисный механизм). Тестовые задания ориентированы на определение числа степеней свободы различных механических систем, определение обобщенных сил по соответствующим обобщенным координатам.

Рассмотрены задачи по применению общего уравнения динамики при анализе движения механических систем (механическая система «блок - грузы», механическая система с одной степенью свободы, механическая система с двумя степенями свободы). Тестовые задания рассматривают различные схемы канатных механизмов и требуют определения модуля движущих сил на ведущем звене, обеспечивающим его движение с заданным ускорением.

Рассмотрены задачи по применению уравнений Лагранжа 2-го рода при анализе движения механических систем (определение ускорения груза лебедки, исследование движения механической системы с одной степенью свободы - планетарного механизма).

Рассмотрены основные положения теории удара (основные понятия, схемы удара, расчётные формулы). Рассмотрены задачи соударения двух тел. Тестовые задания представляют задачи удара и связаны с определением таких характеристик, как импульс ударной силы, коэффициент восстановления при ударе, импульс ударной реакции.

Данные методические указания будут полезны в процессе самостоятельной работы при изучении соответствующих разделов дисциплины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Яблонский, А. А. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике / А. А. Яблонский –М.: Высшая школа, 1972, 1978, 1985, 1998.
2. Бать, М. Л. Теоретическая механика в примерах и задачах / М. Л. Бать, Г. Ю. Джанелидзе, А. С. Кельзон. - М.: Наука, 1985. - Т.2. - 560 с.
3. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. - М.: Высшая школа, 1984. - Ч.2. - 368 с.
4. Бутенин, Н. В. Курс теоретической механики / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. - М.:Наука, 1985. - Т.2. –496 с.
5. Добронравов, В. В. Курс теоретической механики / В. В. Добронравов, Н. Н. Никитин. –М.: Высшая школа, 1983.- 576 с.
6. Лойцянский, Л. Г. Курс теоретической механики / Л. Г. Лойцянский, А. И. Лурье. –М.: Наука, 1983. - Т.2. - 640 с.
7. Санкин, Ю. Н. Лекции по теоретической механике: учебное пособие. Часть 2. Динамика, аналитическая механика / Ю. Н. Санкин. –Ульяновск: УлГТУ, 2004. – 267 с.
8. Манжосов, В. К. Расчетно-проектировочные и контрольные задания по теоретической механике. Часть 4. Аналитическая механика / В. К. Манжосов, О. Д. Новикова. –Ульяновск: УлГТУ, 2005. - 36 с.