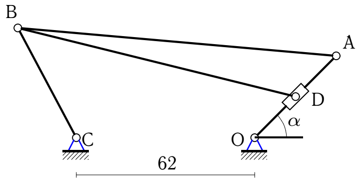
ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ К13

Дано:



$OA = 40$ см, $AB = 111$ см,
$\alpha = 45°$,
$\omega_{OA} = 3\frac{1}{c}$,
$BC = 43$ см.

Рис. 1

Найти скорости и ускорения шарниров A, B, а также скорость и ускорение муфты D относительно направляющего стержня A.

1. План решения

Абсолютное движение муфты представим в виде суммы относительного движения по звену OA и переносного вместе с ним. Траекторией относительного движения является прямая, переносного движения – окружность с центром в точке O. По теореме сложения скоростей абсолютная скорость

$$\vec{v} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}.$$

Абсолютное ускорение вычисляется по теореме Кориолиса

$$\vec{a} = \vec{a}_{\text{от}} + \vec{a}_{\text{п}} + \vec{a}_{\text{к}}.$$

Неизвестные абсолютные скорость и ускорение выражаются через соответствующие величины полюса В

$$\vec{v} = \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_{DB}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_D = \vec{a}^n_B + \vec{a}^\tau_B + \vec{a}^{\text{ц}}_{DB} + \vec{a}^{\text{в}}_{DB}.$$

В результате для $\vec{v}_{\text{от}}$ и $\vec{a}_{\text{от}}$ имеем два основных векторных уравнения

$$\vec{v}_B + \vec{v}_{DB} = \vec{v}_{\text{от}} + \vec{v}_{\text{п}}. \tag{13.1}$$

$$\vec{a}^n_B + \vec{a}^\tau_B + \vec{a}^{\text{ц}}_{DB} + \vec{a}^{\text{в}}_{DB} = \vec{a}_{\text{от}} + \vec{a}_{\text{п}} + \vec{a}_{\text{к}}. \tag{13.2}$$

Решение этих уравнений можно выполнить *графически* и *аналитически*.
Таким образом, имеем следующий план решения:
1) Расчет скоростей четырехзвенника $OABC$.
2) Определение $\vec{v}_{\text{от}}$ по формуле (1).
3) Расчет ускорений четырехзвенника $OABC$.
4) Определение $\vec{a}_{\text{от}}$ по формуле (2).

2. Графическое решение

1) *Расчет скоростей*

Существуют два способа графического расчета скоростей механизма: построение *плана скоростей* и расчет с помощью *мгновенных центров* скоростей. Используем первый способ. Сначала с помощью циркуля, линейки и транспортира на миллиметровой бумаге построим в масштабе сам механизм. Определим длину стержня $BD = 99$ см.

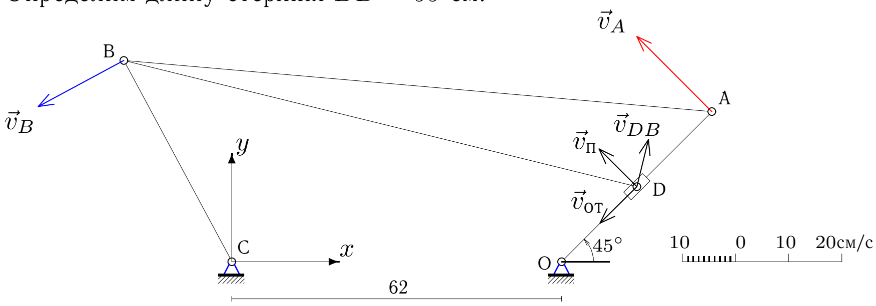


Рис. 2.

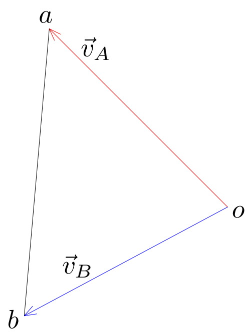


Рис. 3.

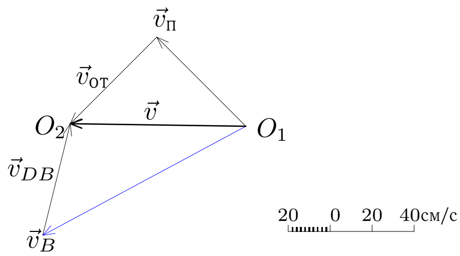


Рис. 4.

План скоростей механизма начнем с построения вектора скорости точки А. Величина скорости

$$v_A = \omega_{OA} OA = 3 \cdot 40 = 120 \text{ см/с}.$$

Направление вектора — перпендикулярно радиусу ОА (рис.2) против часовой стрелки (т.к. $\omega > 0$). Откладываем этот вектор от произвольной точки, обозначенной буквой o (рис.3). Конец вектора отмечаем буквой a. Через точку o проводим прямую параллельную направлению вектора скорости шарнира В, перпендикулярно радиусу СВ его траектории вокруг С. На этой прямой должна лежать точка b — конец вектора $\vec{v}_B$. По основному свойству плана скоростей $\overline{ab} \perp \overline{AB}$. Через точку a перпендикулярно АВ проводим вторую прямую. Пересечение проведенных прямых дает искомую точку b и, следовательно, длину вектора $v_B = 109.7$ см/с (измеряем в масштабе) и угловую скорость звена AB

$$\omega_{AB} = ab/AB = 137.2/111 = 1.24 \text{ рад/с}.$$

Так как $OD = OA/2 = 20$ см, то скорость точки D, той точки звена OA, которая совпадает в данный момент с положением муфты, (переносная скорость) $v_{\text{п}} = v_D = 3 \cdot 20 = 60$ см/с. Вектор $\vec{v}_{\text{п}}$ направлен перпендикулярно звену OA.

2) *Определение $\vec{v}_{om}$*

Равенство (1) представим графически. От некоторой точки O_1 отложим вектор $\vec{v}_{\text{п}}$, известный по величине и направлению. От его конца мы должны отложить $\vec{v}_{\text{от}}$, известный лишь направлением (вдоль OA). Проведем через конец $\vec{v}_{\text{п}}$ прямую параллельную OA. Рассмотрим теперь левую часть равенства (1). От точки O_1 проведем вектор v_B, а через его конец прямую перпендикулярную BD (на ней лежит неизвестный пока вектор $\vec{v}_{DB}$). Точка O_2 пересечения двух построенных прямых определяет вектор абсолютной скорости $\vec{v}$ и вектора $v_{\text{от}} = 58.4$ см/с и $v_{DB} = 54.4$ см/с (измеряем в масштабе). Отсюда найдем необходимую в дальнейшем угловую скорость

$$\omega_{DB} = v_{DB}/DB = 54.4/99 = 0.55 \text{ рад/с}.$$

3) *Расчет ускорений четырехзвенника OABC.*

Ускорение точки A, лежащей на стержне OA, совершающем вращательное движение с постоянной угловой скоростью 3 рад/с, определяется аналитически

$$a_A = \omega_{OA}^2 OA = 9 \cdot 40 = 360 \text{ см/с}^2.$$

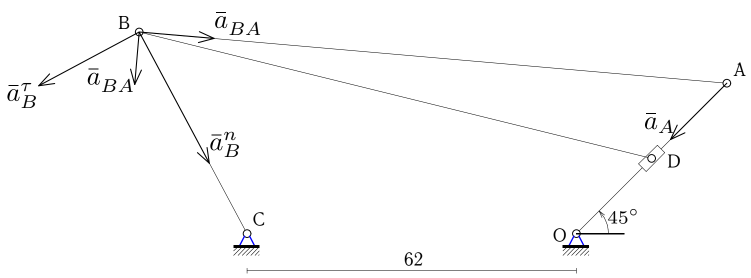
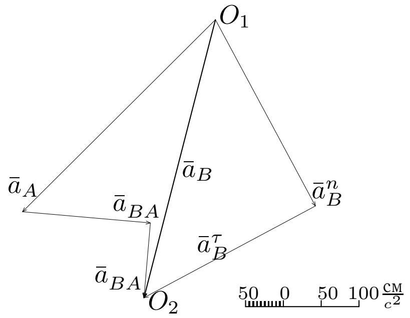


Рис. 5. *Направления векторов ускорения*

Ускорение точки B определим из векторного уравнения

$$\vec{a}_B = \vec{a}_B^n + \vec{a}_B^\tau = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^{\text{ц}} + \vec{a}_{BA}^{\text{в}},$$

решение которого найдем графически. Для этого вычислим предварительно модули векторов $a_B^n = v_B^2/BC = 109.7^2/43 = 280$ см/с^2, $a_{BA}^{\text{ц}} = \omega_{DB}^2 DB = 0.55^2 \cdot 99 = 29.8$ см/с^2.



От некоторой точки O_1 строим план ускорений. Откладываем один за другим известные вектора $\vec{a}_A$ и $\vec{a}_{BA}^{\text{ц}}$. К концу последнего проводим перпендикуляр к AB — на нем должен лежать вектор $\vec{a}_{BA}^{\text{в}}$. От той же точки O_1 откладываем $\vec{a}_B^n$ и перпендикуляр к нему ($\vec{a}_B^\tau$). Пересечение двух перпендикуляров дает точку O_2 — конец искомого вектора $\vec{a}_B$.

Рис. 6. *План ускорений*

Измерим длины построенных векторов. Получим $a_B = 380$ см/с^2 и касательное ускрение $a_B^\tau = 257$ см/с^2. Ускорение точки D (переносное для муфты) определим по формуле

$$a_D = a_{\text{п}} = \omega_{OA}^2 OD = 9 \cdot 20 = 180 \text{ см/с}^2.$$

4) *Определение $\vec{a}_{om}$*

Направления всех векторов, входящих в уравнение (1), изобразим на чертеже механизма

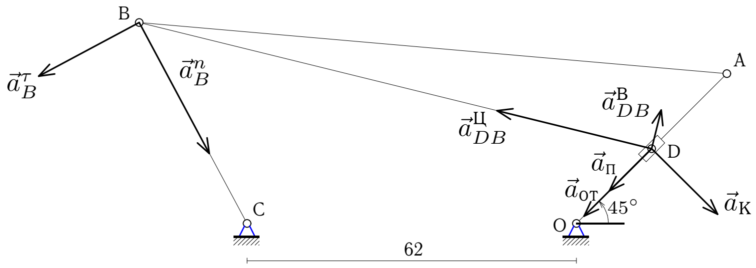


Рис. 7

Направление вектора ускорения Кориолиса получается поворотом по часовой стрелке ($\omega_{\text{п}} = \omega_{OA} > 0$) вектора относительной скорости $v_{\text{от}}$. Модули некоторых векторов из (2) можно вычислить. Так как вектор переносной угловой скорости перпендикулярен плоскости чертежа, а, следовательно, и относительной скорости, то

$$a_{\text{к}} = 2\omega_{\text{п}} v_{\text{от}} \sin 90^\circ = 2 \cdot 3 \cdot 58.4 = 350.2 \text{ см/с}^2.$$

Зная ω_{DB}, найдем

$$a_{DB}^{\text{ц}} = \omega_{DB}^2 DB = 0.55^2 \cdot 99 = 29.9 \text{ см/с}^2.$$

Величины $a_{\text{п}} = 180$ см/с^2, $a_B^n = 280$ см/с^2 и $a_B^\tau = 257$ см/с^2 найдены ранее.

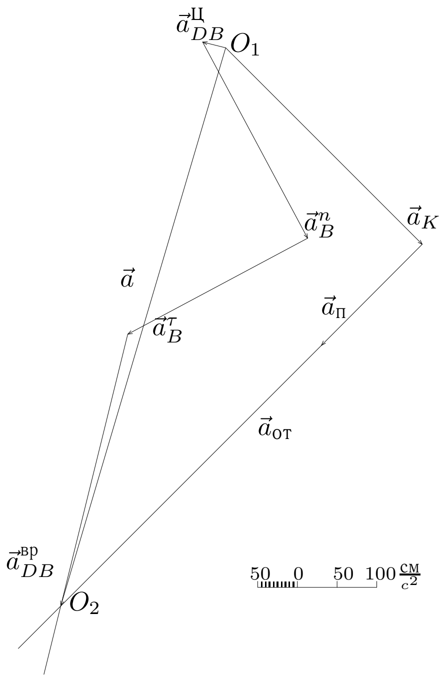


Рис. 8. *Определение a_{om}*

По аналогии с предыдущими графическими построениями от некоторой точки O_1 (рис.8) отложим отдельно известные вектора из левой и правой части уравнения (2). Точка O_2 пересечения направлений $\vec{a}_{\text{от}}$ и $\vec{a}^{\text{в}}_{DB}$ определяет абсолютное ускорение $\vec{a}$ и искомое $\vec{a}_{\text{от}}$. Измеряя длину вектора на чертеже, приближенно получим $a_{\text{от}} = 464$ см/с^2.

3. Аналитическое решение

Для аналитического решения необходимо выбрать систему координат и определить координаты всех шарниров.

Поместим начало координат в точку C (рис.2) Таким образом,
$x_C = 0$, $y_C = 0$, $x_O = 62$, $y_O = 0$,
$x_A = 62 + 40\cos 45^\circ = 90.28$ см, $y_A = 40 \sin 45^\circ = 28.28$ см,
$x_D = 62 + 20\cos 45^\circ = 76.14$ см, $y_D = 20 \sin 45^\circ = 14.14$ см.
Координаты точки B найдем из очевидной системы уравнений [1]

$$(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = AB^2,$$

$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 = BC^2.$$

Получим решение $x_B = -20.30$ см, $y_B = 37.91$ см.

[1]Maple-алгоритм изложен в *Решебнике. Теоретическая механика, с. 218*

1) *Расчет скоростей*

Уравнения *трех угловых скоростей* [2] примет вид

$$(y_A - y_O)\omega_{OA} + (y_B - y_A)\omega_{BA} + (y_C - y_B)\omega_{BC} = 0,$$

$$(x_A - x_O)\omega_{OA} + (x_B - x_A)\omega_{BA} + (x_C - x_B)\omega_{BC} = 0,$$

или при $\omega_{OA} = 3\frac{1}{c}$

$$9.63\omega_{BA} - 37.91\omega_{BC} = -28.28 \cdot 3,$$

$$-110.58\omega_{BA} + 20.30\omega_{BC} = -28.28 \cdot 3.$$

Получим решение
$\omega_{BA} = 1.236\frac{1}{c},\ \omega_{BC} = 2.552\frac{1}{c}.$

2) *Определение $\vec{v}_{om}$*

Предположим, что вектор относительной скорости $\vec{v}_{\text{от}}$ направлен от точки A к B. Уравнение (1) запишем в координатной форме, в проекциях на оси x и y. Для этого воспользуемся представлением формулы Эйлера для скорости в виде

$$\vec{v}_B = \vec{\omega}_{BC} \times \overline{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ x_B - x_C & y_B - y_C & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\vec{v}_{DB} = \vec{\omega}_{BD} \times \overline{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BD} \\ x_D - x_B & y_D - y_B & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\vec{v}_{\text{п}} = \vec{v}_D = \vec{\omega}_{OA} \times \overline{OD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{OA} \\ x_D - x_O & y_D - y_O & 0 \end{vmatrix}.$$

Отсюда следуют формулы для проекций

$$\begin{array}{ll} v_{Bx} = -\omega_{BC}(y_B - y_C), & v_{By} = \omega_{BC}(x_B - x_C), \\ v_{DBx} = -\omega_{BD}(y_D - y_B), & v_{DBy} = \omega_{BD}(x_D - x_B), \\ v_x = -\omega_{OA}(y_D - y_O), & v_y = \omega_{OA}(x_D - x_O). \end{array} \tag{13.3}$$

В результате

$$-\omega_{BC}(y_B - y_C) - \omega_{BD}(y_D - y_B) = -v_{\text{от}} \cos 45^\circ - \omega_{OA}(y_D - y_O),$$

$$\omega_{BC}(x_B - x_C) + \omega_{BD}(x_D - x_B) = -v_{\text{от}} \sin 45^\circ + \omega_{OA}(x_D - x_O).$$

Подставив сюда известные координаты и найденные угловые скорости, запишем систему уравнений для $v_{\text{от}}$ и ω_{BD}

$$0.71 v_{\text{от}} + 23.77\omega_{BD} = 54.32,$$

[2] Решебник. Теоретическая механика

$$0.71 v_{\text{от}} + 96.44\omega_{BD} = 94.23.$$

Решение системы
$v_{\text{от}} = 58.36\frac{}{c}$, $\omega_{BD} = 0.549\frac{1}{c}$.

3) *Расчет ускорений четырехзвенника OABC.*

При $\varepsilon_{OA} = 0$ запишем уравнения *трех угловых ускорений*[3]

$$-110.58\varepsilon_{BA} + 20.30\varepsilon_{BC} = 3^2 \cdot 28.28 + 1.236^2 \cdot 9.63 - 2.552^2 \cdot 37.91 = 22.33,$$

$$9.63\varepsilon_{BA} - 37.91\varepsilon_{BC} = -3^2 \cdot 28.28 + 1.236^2 \cdot 110.58 - 2.552^2 \cdot 20.30 = -217.89.$$

Решение этой системы
$\varepsilon_{AB} = 0.895\frac{1}{c^2}$, $\varepsilon_{BC} = 5.975\frac{1}{c^2}$.

4) *Определение* $\vec{a}_{om}$

Для того, чтобы уравнение (2) записать в координатной форме, потребуются проекции векторов ускорений. Имеем

$$\vec{a}^{n}_{B} = \vec{\omega}_{BC} \times \vec{v}_{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BC} \\ v_{Bx} & v_{By} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}^{\tau}_{B} = \vec{\varepsilon}_{BC} \times \overline{CB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{BC} \\ x_B - x_C & y_B - y_C & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}^{\text{ц}}_{DB} = \vec{\omega}_{BD} \times \vec{v}_{DB} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{BD} \\ v_{DBx} & v_{DBy} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}^{\text{в}}_{DB} = \vec{\varepsilon}_{BD} \times \overline{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \varepsilon_{BD} \\ x_D - x_B & y_D - y_B & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_{\text{п}} = \vec{a}^{n}_{D} = \vec{\omega}_{OA} \times \vec{v}_{D} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{OA} \\ v_{Dx} & v_{Dy} & 0 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a}_{\text{к}} = 2\vec{\omega}_{\text{п}} \times \vec{v}_{\text{от}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_{\text{п}} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая определители по элементам верхней строки (орты координатных осей x и y $\vec{i}$, $\vec{j}$) с учетом уже найденных проекций скоростей (3), получим

[3] Решебник. Теоретическая механика

выражения

$$
\begin{aligned}
&a^n_{Bx} = -\omega^2_{BC}(x_B - x_C),\\
&a^\tau_{Bx} = -\varepsilon_{BC}(y_B - y_C),\\
&a^{\text{ц}}_{DBx} = -\omega^2_{BD}(x_D - x_B),\\
&a^{\text{в}}_{DBx} = -\varepsilon_{BD}(y_D - y_O),\\
&a_x = -\omega^2_{OA}(x_D - x_O),\\
&a_x = 2 \cdot \omega_{OA} v_{\text{от}} \sin 45^\circ.
\end{aligned}
$$

Аналогично получаются проекции на ось y. В итоге

$$
\begin{aligned}
&-\omega^2_{BC}(x_B - x_C) - \varepsilon_{BC}(y_B - y_C) - \omega^2_{BD}(x_D - x_B) - \varepsilon_{BD}(y_D - y_B) =\\
&= -a_{\text{от}} \cos 45^\circ - \omega^2_{OA}(x_D - x_O) + 2 \cdot \omega_{OA} v_{\text{от}} \sin 45^\circ.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\omega^2_{BC}(y_B - y_C) + \varepsilon_{BC}(x_B - x_C) - \omega^2_{BD}(y_D - y_B) + \varepsilon_{BD}(x_D - x_B) =\\
&= -a_{\text{от}} \sin 45^\circ - \omega^2_{OA}(y_D - y_O) - 2 \cdot \omega_{OA} v_{\text{от}} \cos 45^\circ.
\end{aligned}
$$

Подставив сюда все известные величины, получим систему уравнений для $a_{\text{от}}$ и ε_{BD}

$$0.71 a_{\text{от}} + 23.77 \varepsilon_{BD} = 243.7,$$

$$0.71 a_{\text{от}} + 96.44 \varepsilon_{BD} = -13.87.$$

Решение системы [4]

$a_{\text{от}} = 463.77 \frac{\text{см}}{c^2},\ \varepsilon_{BD} = -3.544 \frac{1}{c^2}.$

[4] В процессе аналитического решения приходится 4 раза решать систему двух линейных уравнений. Эту математическую процедуру лучше выполнить на ЭВМ, или даже на программируемом калькуляторе.